Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Ньешпорский, А. Сим, Преобразования Беклунда для гиперболических поверхностей в E^3 на основе конгруэнции Вейнгартена, *ТМФ*, 2000, том 122, номер 1, 102–117

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf558>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 16:26:08

© 2000 г.

М. Ньешпорский*, А. Сим*

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БЕКЛУНДА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В E^3 НА ОСНОВЕ КОНГРУЭНЦИИ ВЕЙНГАРТЕНА

Показано, что исследование конгруэнций Вейнгартена в E^3 одновременно приводит к системе уравнений в частных производных, описывающих гиперболические поверхности в E^3 , и к ее преобразованию Беклунда.

1. ВВЕДЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Давно известно, что существует связь между локальной дифференциальной геометрией и уравнениями в частных производных (в том числе нелинейными). В частности, представления о связи между геометрией и интегрируемыми (солитонными) уравнениями возникли около 1870 г., когда было обнаружено, что уравнение синус-Гордона

$$\psi_{uv} = \sin \psi \quad (1)$$

описывает в трехмерном евклидовом пространстве E^3 поверхности постоянной отрицательной гауссовой кривизны. Очевидно, что псевдосферические поверхности могут рассматриваться в более широком контексте гиперболических поверхностей, т.е. поверхностей в E^3 с отрицательной гауссовой кривизной. В этом случае уравнение (1) заменяется на следующую систему:

$$\begin{aligned} \psi_{uv} + \left(\frac{r_v s \sin \psi}{2rt} \right)_v + \left(\frac{r_u t \sin \psi}{2rs} \right)_u - ts \sin \psi &= 0, \\ s_v &= \frac{1}{2r} (t \cos \psi r_u - s r_v), \\ t_u &= \frac{1}{2r} (s \cos \psi r_v - t r_u). \end{aligned} \quad (2)$$

Интегрируемое уравнение (1) является простым частным случаем системы (2), соответствующим выбору $r = \text{const}$ и $s = t = 1$. Это не случайно. Мы утверждаем, что

*Institute of Theoretical Physics, Warsaw University, Warsaw, Poland.
E-mail: maciejun@fuw.edu.pl, sym@fuw.edu.pl

многие интегрируемые уравнения могут быть получены как редукции системы (2). Мы не обсуждаем все возможные интегрируемые редукции этой системы, что составляет отдельную и, возможно, непростую задачу. Вместо этого мы ограничимся обсуждением одной конкретной редукции системы (2), известной как система Бианки [1, 2]. В настоящей работе установлена общая схема редукции системы (2) в рамках солитонной теории.

Независимые переменные в системе (2) являются асимптотическими координатами [2, 3] на гиперболической поверхности в E^3 . Это означает, что первая (I) и вторая (II) фундаментальные формы гиперболической поверхности в этих координатах имеют вид

$$\begin{aligned} I &= r^2(s^2 du^2 + 2st \cos \psi du dv + t^2 dv^2), \\ II &= 2rst \sin \psi du dv. \end{aligned} \quad (3)$$

Напомним, что параметрические линии $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ называются асимптотическими линиями [2, 3]. В этом контексте уравнения (2) являются уравнениями Гаусса–Майнарди–Кодацци (ГМК) для форм (3). При этом величина

$$K = -\frac{1}{r^2} \quad (4)$$

определяет гауссову кривизну гиперболической поверхности.

Следует подчеркнуть, что мы интерпретируем (2) как систему трех уравнений для четырех неизвестных (r, s, t, ψ) , в частности переменная r заранее не определена.

Удобным инструментом для исследования интегрируемости системы (2) неожиданно оказываются так называемые конгруэнции Вейнгартена (W-конгруэнции) [3, 4]. Вообще говоря, прямолинейная конгруэнция есть двухпараметрическое семейство прямых линий в трехмерном евклидовом пространстве. Каждая прямолинейная конгруэнция однозначно определяет совокупность, состоящую из двух фокальных поверхностей, например $\mathcal{F}$ и $\tilde{\mathcal{F}}$, и фокального отображения $\beta: \mathcal{F} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}$, переводящего первый фокус линии конгруэнции во второй [3–5]. В определенном смысле тройка $(\mathcal{F}, \tilde{\mathcal{F}}, \beta)$ является геометрическим прототипом стандартной тройки решений (“старое решение”, “новое решение” и преобразование Беклунда). Эта концепция поясняется ниже. Класс W-конгруэнций выделяется тем, что обе фокальные поверхности являются гиперболическими, а фокальное отображение переводит асимптотические линии $\mathcal{F}$ в асимптотические линии $\tilde{\mathcal{F}}$.

Опираясь на понятие W-конгруэнции, мы докажем следующее утверждение (преобразование Беклунда для системы (2)).

Пусть некоторая четверка функций (r, s, t, ψ) есть решение системы (2). Выберем какое-нибудь решение X следующего *линейного* уравнения:

$$X_{uv} + \frac{r_v}{2r} X_u + \frac{r_u}{2r} X_v - ts \cos \psi X = 0. \quad (5a)$$

Выпишем *линейную* систему для неизвестной $(y^1, y^2, y^3)^T$ (индекс “Т” означает транспонирование):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & \left(\frac{\psi_u}{2} + \frac{r_v s \sin \psi}{2rt} \right) & s \sin \frac{\psi}{2} \\ -\left(\frac{\psi_u}{2} + \frac{r_v s \sin \psi}{2rt} \right) & 0 & -s \cos \frac{\psi}{2} \\ -s \sin \frac{\psi}{2} & s \cos \frac{\psi}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{bmatrix} + \\ &+ r \begin{bmatrix} s \sin \frac{\psi}{2} X \\ -s \cos \frac{\psi}{2} X \\ X_u \end{bmatrix}, \\ \frac{\partial}{\partial v} \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -\left(\frac{\psi_v}{2} + \frac{r_u t \sin \psi}{2rs} \right) & t \sin \frac{\psi}{2} \\ \left(\frac{\psi_v}{2} + \frac{r_u t \sin \psi}{2rs} \right) & 0 & t \cos \frac{\psi}{2} \\ -t \sin \frac{\psi}{2} & -t \cos \frac{\psi}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{bmatrix} - \\ &- r \begin{bmatrix} t \sin \frac{\psi}{2} X \\ t \cos \frac{\psi}{2} X \\ X_v \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5б)$$

Пусть $(y^1, y^2, y^3)^T$ есть решение (5б). Переменные δ, ρ, φ определяются из соотношений

$$\begin{aligned} y^1 &= -X \rho \sin \frac{\delta}{2}, \\ y^2 &= -X \rho \cos \frac{\delta}{2}, \\ y^3 &= X \rho \operatorname{ctg} 2\varphi. \end{aligned} \quad (5в)$$

Утверждение состоит в том, что новая четверка функций $(\tilde{r}, \tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{\psi})$, заданная соотношениями

$$\begin{aligned} \tilde{r}r &= \left(\frac{\rho}{\sin \varphi \cos \varphi} \right)^2, \\ \tilde{s} \sin \frac{\tilde{\delta} + \tilde{\psi}}{2} &= -sr \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\rho} \sin \frac{\delta + \psi}{2}, \\ \tilde{t} \sin \frac{\tilde{\delta} - \tilde{\psi}}{2} &= tr \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\rho} \sin \frac{\delta - \psi}{2}, \\ \tilde{s} \cos \frac{\tilde{\delta} + \tilde{\psi}}{2} &= -2\varphi_u + s \cos \frac{\delta + \psi}{2}, \\ \tilde{t} \cos \frac{\tilde{\delta} - \tilde{\psi}}{2} &= 2\varphi_v + t \cos \frac{\delta - \psi}{2}, \end{aligned} \quad (5г)$$

где $\tilde{\delta}$ – соответствующий аналог δ , тоже удовлетворяет (2).

Можно заметить, что после подстановки

$$x = \sqrt{r}X \quad (6)$$

уравнение (5а) приобретает вид

$$x_{uv} - \left(\frac{(\sqrt{r})_{uv}}{\sqrt{r}} + ts \cos \psi \right) x = 0. \quad (7)$$

Формулы (5) задают преобразование Беклунда для системы (2), т.е. эти формулы описывают процесс генерации новых решений $(\tilde{r}, \tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{\psi})$ из старых (r, s, t, ψ) посредством чисто *линейных* (5а), (5б) или *алгебраических* (5в), (5г) операций.

Существуют как минимум два доказательства этого базового результата. Первое (и более простое) использует формализм классического преобразования Мутарда (раздел 2). Второе, более сложное, основано на общем формализме дифференциальной геометрии без использования преобразования Мутарда и потому в принципе могло бы быть распространено на более общие случаи (раздел 3). В разделе 4 формулы (5) применены к упомянутой выше системе Бианки, этот раздел содержит вывод результатов солитонного типа для системы Бианки исключительно геометрическими средствами. В частности, показано, что спектральный параметр появляется в этом контексте естественным образом, без использования стандартного подхода точечных симметрий [2, 6]. Как известно, последний подход не всегда приводит к успеху при введении спектрального параметра в “голой” (не зависящей от спектрального параметра) линейной задаче. Наш результат указывает на то, что техника построения спектрально-зависимых линейных задач из “голых”, основанная на преобразованиях Беклунда в рамках формализма прямолинейных конгруэнций, является более эффективной, чем подход, связанный с точечными симметриями.

2. ФОРМУЛЫ ЛЕЛЬЁВРА И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МУТАРДА

Целью этого раздела является доказательство формул (5). Для этого будет использован несколько измененный подход Г. Джонаса [7].

В 1888 г. Лельёвром [8] был предложен *линейный* метод построения гиперболических поверхностей в асимптотических координатах. Это означает, что имеется также и *линейная* процедура получения решений системы (2). Эта процедура состоит в следующем:

1) выбирается любая действительная функция $Q(u, v)$;

2) выбираются три линейно независимых решения $(N_1, N_2, N_3) = \vec{N}$ уравнения Мутарда

$$N_{uv} = QN; \quad (8)$$

3) тогда формулы Лельёвра

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{\vec{N} \cdot \vec{N}}} \vec{N},$$

$$\vec{R} = \int_{(u_0, v_0)}^{(u, v)} \{ [\vec{N}_u \times \vec{N}] du + [\vec{N} \times \vec{N}_v] dv \}$$

задают выражения для единичного вектора нормали $\vec{n}$ и вектора позиции $\vec{R}$ гиперболической поверхности в асимптотических координатах. Наконец, четверка (r, s, t, ψ) , определенная из соотношений

$$\begin{aligned} r &= \vec{N} \cdot \vec{N}, \\ s^2 &= \frac{\vec{R}_u \cdot \vec{R}_u}{r^2}, \\ t^2 &= \frac{\vec{R}_v \cdot \vec{R}_v}{r^2}, \\ \operatorname{tg} \psi &= \frac{(\vec{R}_u \cdot \vec{n}_v)r}{\vec{R}_u \cdot \vec{R}_v}, \end{aligned} \quad (9)$$

задает решение системы (2). И наоборот, можно показать, что векторная функция $\vec{N} = \sqrt{r}\vec{n}$ на произвольной гиперболической поверхности с заданными асимптотическими координатами удовлетворяет некоторому уравнению Мутарда (8).

Рассмотрим теперь преобразование Мутарда [9, 10], переводящее решения “старого” уравнения Мутарда в решения “нового”.

Выберем любое ненулевое решение x уравнения (8). Можно показать, что функция

$$\tilde{N} = \frac{1}{x} \int_{(u_0, v_0)}^{(u, v)} \{ (Nx_u - N_u x) du + (-Nx_v + N_v x) dv \} \quad (10)$$

является решением другого уравнения Мутарда

$$\tilde{N}_{uv} = \tilde{Q} \tilde{N} \quad (11)$$

при

$$\tilde{Q} = x \left(\frac{1}{x} \right)_{uv}. \quad (12)$$

Можно говорить о преобразовании $N \xrightarrow{x} \tilde{N}$ из пространства решений уравнения (8) в пространство решений уравнения (11). Это преобразование является не чем иным, как примером преобразования Дарбу в смысле, принятом в [11].

Общая теория W-конгруэнций была впервые построена Гишаром [12], который, по существу, использовал и формулы Лельёвра, и преобразование Мутарда. Дальнейшее развитие теории W-конгруэнций было выполнено Джоном [7]. Он упростил используемый формализм и, в частности, предложил несколько эффективных формул для расчета второй фокальной поверхности при заданной первой. Здесь мы будем следовать подходу Джонаса, несколько модифицировав его (на самом деле наши формулы являются евклидовыми аналогами аффинных формул Джонаса). Схематически доказательство (5) выглядит следующим образом. В первую очередь мы раскладываем вектор $x\vec{N}$ по некоторому произвольному ортогональному реперу $\{\vec{E}_i\}$ на “старой” гиперболической поверхности¹⁾:

$$x\vec{N} = y^i \vec{E}_i \quad (13)$$

¹⁾Мы благодарим А. Доливу, предложившего эту операцию.

(предполагается суммирование по i). Подставив (13) в преобразование Мутарда (10) и учитывая (6) и уравнения движущегося репера

$$d\vec{E}_i = (U_i^j du + V_i^j dv)\vec{E}_j, \quad (14)$$

немедленно получаем “дифференциальную” часть (5б) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & U_1^2 & U_1^3 \\ -U_1^2 & 0 & U_2^3 \\ -U_1^3 & -U_2^3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} XU_1^3 \\ XU_2^3 \\ X_u \end{bmatrix}, \\ \frac{\partial}{\partial v} \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & V_1^2 & V_1^3 \\ -V_1^2 & 0 & V_2^3 \\ -V_1^3 & -V_2^3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{bmatrix} - r \begin{bmatrix} XV_1^3 \\ XV_2^3 \\ X_v \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (15)$$

Нетрудно рассчитать V_j^i и U_j^i (см. следующий раздел). Используя (9) и заменив $\vec{N}$ на $\vec{\tilde{N}}$, легко найти новую четверку $(\tilde{r}, \tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{\psi})$.

Как указывалось выше, нашей главной целью является вывод формул (5) без использования преобразования Мутарда, основанный на общем дифференциально-геометрическом формализме.

3. W-КОНГРУЭНЦИЯ В E^3

3.1. Прямолинейные конгруэнции. Приведем здесь некоторые основные определения из теории прямолинейных конгруэнций [3]. Двухпараметрическая система прямых линий в E^3 называется прямолинейной конгруэнцией (или для краткости просто конгруэнцией).

Конгруэнция может быть описана заданием поверхности отсчета $\vec{A}(u, v)$ и направлений (единичных векторов) линий $\vec{e}(u, v)$. Таким образом, вектор позиции точки линии (u, v) есть $\vec{M}(u, v) = \vec{A}(u, v) + t\vec{e}(u, v)$ при некотором $t \in R$.

Говорят, что линия (u, v) “пересекается” со своими инфинитезимально близкими соседями $(u + du, v + dv)$ (где $du/dv = \text{const}$), если расстояние между этой линией и соседними есть $o(\sqrt{(du)^2 + (dv)^2})$. Точка “пересечения” называется фокусом. Конгруэнция называется гиперболической на (u, v) , если на линии (u, v) существуют два несовпадающих фокуса. В противном случае конгруэнция называется параболической (один фокус) или эллиптической (ни одного фокуса). Здесь мы ограничимся рассмотрением только гиперболического случая. Центральная точка отрезка, ограниченного фокальными точками на (u, v) , называется средней точкой на (u, v) . Положения фокальных точек конгруэнции называются фокальными поверхностями, а положения средних точек — средними поверхностями. Таким образом, в гиперболическом случае есть две фокальные поверхности, которые можно обозначить, например, как $\mathcal{F}$ и $\tilde{\mathcal{F}}$. Фундаментальным свойством фокальных поверхностей является то, что все линии данной конгруэнции касательны в фокусах одновременно обеим фокальным поверхностям. Две точки, например $p \in \mathcal{F}$ и $\tilde{p} \in \tilde{\mathcal{F}}$, через которые проходит одна и та же линия конгруэнции l , называют соответствующими. Это соответствие определяет естественное обратимое взаимное

преобразование фокальных поверхностей – фокальное отображение $\beta: \mathcal{F} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}$. В данном случае мы рассмотрим фокальные преобразования, отвечающие преобразованию Беклунда в теории солитонов. Плоскость, проходящая через линию конгруэнции и касательная к одной из фокальных поверхностей в фокусе, называется фокальной плоскостью.

Напомним, что конгруэнция называется W -конгруэнцией, если ее фокальное отображение переводит любую асимптотическую линию $\mathcal{F}$ в асимптотическую линию $\tilde{\mathcal{F}}$. W -конгруэнция является, по существу, проективным понятием, и этим проще всего объяснить ее значение в классической дифференциальной геометрии и в современной теории солитонов. Неожиданные проективные свойства солитонной теории рассмотрены в пионерской работе Доливы и Сантини [13].

3.2. Преобразование Беклунда и W -конгруэнции. Возникает естественный вопрос об условиях, которые должны быть наложены на две пары фундаментальных форм $(I, \Pi$ и $\tilde{I}, \tilde{\Pi})$ с тем, чтобы они были фундаментальными формами фокальных поверхностей некоторой W -конгруэнции. Замечательно, что исчерпывающий ответ на этот вопрос приводит к системе (2) и к ее преобразованию Беклунда одновременно!

Ниже мы используем классический метод движущегося репера Картана в формулировке Финикова [3]. Вообще говоря, мы рассматриваем трехгранники (трехгранник состоит из вершины и трех связанных с ней упорядоченных ортонормальных векторов) как движущиеся реперы. В частном случае W -конгруэнций мы фактически имеем дело с тремя реперами: репером первой фокальной поверхности $\{\vec{F}, \vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3\}$, репером второй фокальной поверхности $\{\vec{\tilde{F}}, \vec{\tilde{E}}_1, \vec{\tilde{E}}_2, \vec{\tilde{E}}_3\}$ и репером конгруэнции $\{\vec{A}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

Угол между первой и второй фокальными плоскостями обозначен как 2φ , а расстояние между средней точкой $\vec{A}$ линии l и фокусом ($\vec{F}$ или $\vec{\tilde{F}}$) этой же линии – как ρ .

Теперь мы готовы определить все три интересующих нас репера с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{A} + \rho \vec{e}_3, & \vec{\tilde{F}} &= \vec{A} - \rho \vec{e}_3, \\ \vec{E}_1 &= \vec{e}_3, & \vec{\tilde{E}}_1 &= \vec{e}_3, \\ \vec{E}_2 &= \vec{e}_1 \cos \varphi - \vec{e}_2 \sin \varphi, & \vec{\tilde{E}}_2 &= \vec{e}_1 \cos \varphi + \vec{e}_2 \sin \varphi, \\ \vec{E}_3 &= \vec{n} = \vec{e}_1 \sin \varphi + \vec{e}_2 \cos \varphi, & \vec{\tilde{E}}_3 &= \vec{\tilde{n}} = -\vec{e}_1 \sin \varphi + \vec{e}_2 \cos \varphi, \end{aligned} \quad (16)$$

где подразумевается, что $\vec{e}_3$ есть единичный вектор вдоль линии l , направленный от $\tilde{\mathcal{F}}$ к $\mathcal{F}$, $\vec{e}_1$ находится в содержащей l бисектральной плоскости между фокальными плоскостями на линии l и, наконец, $\vec{n}$ ($\vec{\tilde{n}}$) означает единичную нормаль к $\mathcal{F}$ ($\tilde{\mathcal{F}}$) в $\vec{F}$ ($\vec{\tilde{F}}$). Все реперы правосторонние. Реперы, введенные таким образом, называются каноническими.

Запишем “уравнения движения” для фокальных реперов:

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= \Omega^i \vec{E}_i, & d\vec{\tilde{F}} &= \tilde{\Omega}^i \vec{\tilde{E}}_i, \\ d\vec{E}_j &= \Omega_j^i \vec{E}_i, & d\vec{\tilde{E}}_j &= \tilde{\Omega}_j^i \vec{\tilde{E}}_i, \end{aligned} \quad (17)$$

и для репера конгруэнции

$$\begin{aligned} d\vec{A} &= \omega^i \vec{e}_i, \\ d\vec{e}_j &= \omega_j^i \vec{e}_i. \end{aligned} \quad (18)$$

Нашей первой целью является расчет всех соотношений между всеми 1-формами, т.е. $\Omega^i, \Omega_j^i, \tilde{\Omega}^i, \tilde{\Omega}_j^i, \omega^i, \omega_j^i$. Поскольку реперы ортонормальны, имеем

$$\Omega_k^i = -\Omega_i^k, \quad \tilde{\Omega}_k^i = -\tilde{\Omega}_i^k, \quad \omega_k^i = -\omega_i^k. \quad (19)$$

Условия интегрируемости для (17) и (18) имеют вид

$$d\Omega^i = \Omega^k \wedge \Omega_k^i, \quad d\Omega_j^i = \Omega_j^k \wedge \Omega_k^i, \quad (20)$$

$$d\tilde{\Omega}^i = \tilde{\Omega}^k \wedge \tilde{\Omega}_k^i, \quad d\tilde{\Omega}_j^i = \tilde{\Omega}_j^k \wedge \tilde{\Omega}_k^i, \quad (21)$$

$$d\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i, \quad d\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i. \quad (22)$$

Поскольку векторы $\vec{E}_3, \vec{\tilde{E}}_3$ нормальны соответствующим фокальным поверхностям, получаем

$$\Omega^3 = 0, \quad \tilde{\Omega}^3 = 0, \quad (23)$$

а выбор канонического репера для конгруэнции приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} \omega^1 &= \rho \operatorname{ctg} \varphi \omega_2^3, \\ \omega^2 &= \rho \operatorname{tg} \varphi \omega_1^3. \end{aligned} \quad (24)$$

В терминах дифференциальных форм фундаментальные формы для первой фокальной поверхности суть

$$\begin{aligned} I &= (\Omega^1)^2 + (\Omega^2)^2, \\ II &= \Omega^1 \Omega_1^3 + \Omega^2 \Omega_2^3. \end{aligned} \quad (25)$$

Рассмотрим среднюю поверхность в координатах (u, v) таких, что параметрические линии $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ соответствуют асимптотическим линиям на $\mathcal{F}$ и $\tilde{\mathcal{F}}$ одновременно. Это предположение эквивалентно нашему основному предположению о том, что конгруэнция является W-конгруэнцией.

Сравнивая (25) с (3) и учитывая, что $d\Omega^3 = 0 = \Omega^1 \wedge \Omega_1^3 + \Omega^2 \wedge \Omega_2^3$ (по лемме Картана), мы получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} \Omega^1 &= rs \cos \frac{\delta + \psi}{2} du + rt \cos \frac{\delta - \psi}{2} dv, \\ \Omega^2 &= rs \sin \frac{\delta + \psi}{2} du + rt \sin \frac{\delta - \psi}{2} dv, \\ \Omega_1^3 &= +s \sin \frac{\delta + \psi}{2} du - t \sin \frac{\delta - \psi}{2} dv, \\ \Omega_2^3 &= -s \cos \frac{\delta + \psi}{2} du + t \cos \frac{\delta - \psi}{2} dv, \end{aligned} \quad (26)$$

где δ – дополнительная функция и переменные $(\delta + \psi)/2$ и $(\delta - \psi)/2$ имеют смысл углов между вектором $\vec{e}_3$ (направленным вдоль линии конгруэнции) и векторами, касательными к асимптотическим линиям $v = \text{const}$ и $u = \text{const}$, соответственно.

Теперь с учетом (26) мы можем определить коэффициенты U_j^i и V_j^i в уравнениях (14). Действительно, если подставить $\delta = 0$ в (26) (векторы $\vec{E}_1, \vec{E}_2$ теперь касательны линиям кривизны) и учесть, что $\Omega_j^i = U_j^i du + V_j^i dv$, то можно убедиться, что (15) совпадает с (56).

Подстановка (26) в (20) приводит к (2). Мы также имеем

$$\Omega_1^2 = \left[\frac{r_v s \sin \psi}{2rt} - \left(\frac{\delta - \psi}{2} \right)_u \right] du + \left[-\frac{r_u t \sin \psi}{2rs} - \left(\frac{\delta + \psi}{2} \right)_v \right] dv. \quad (27)$$

Таким образом, на этом этапе у нас в распоряжении есть все выражения для форм Ω^i и Ω_j^i . Такие же расчеты могут быть выполнены для второй фокальной поверхности $\tilde{\mathcal{F}}$ (конечно, переменные в аналогичных формулах должны быть в этом случае помечены тильдой).

Чтобы получить недостающие выражения для форм ω^i, ω_j^i , мы дифференцируем (16) и используем (17) и (18), в результате получаем

$$\begin{aligned} \omega_1^3 &= -\frac{1}{2 \sin \varphi} \left(\frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\rho} \Omega^2 + \Omega_1^3 \right) = \frac{1}{2 \sin \varphi} \left(\frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\rho} \tilde{\Omega}^2 + \tilde{\Omega}_1^3 \right), \\ \omega_2^3 &= \frac{1}{2 \cos \varphi} \left(\frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\rho} \Omega^2 - \Omega_1^3 \right) = \frac{1}{2 \cos \varphi} \left(\frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\rho} \tilde{\Omega}^2 - \tilde{\Omega}_1^3 \right), \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \omega^3 &= \frac{1}{2}(\Omega^1 + \tilde{\Omega}^1), \\ d\rho &= \frac{1}{2}(\Omega^1 - \tilde{\Omega}^1), \\ \omega_1^2 &= \frac{1}{2}(\Omega_2^3 + \tilde{\Omega}_2^3), \\ d\varphi &= \frac{1}{2}(-\Omega_2^3 + \tilde{\Omega}_2^3), \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \Omega_1^2 &= \frac{1}{2\rho} \Omega^2 + \text{ctg } 2\varphi \Omega_1^3, \\ \tilde{\Omega}_1^2 &= -\left(\frac{1}{2\rho} \tilde{\Omega}^2 + \text{ctg } 2\varphi \tilde{\Omega}_1^3 \right). \end{aligned} \quad (30)$$

Теперь из (28) следует, что

$$r\tilde{r} = \left(\frac{\rho}{\sin \varphi \cos \varphi} \right)^2, \quad (31)$$

$$\tilde{s} \sin \frac{\tilde{\delta} + \tilde{\psi}}{2} = -sr \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\rho} \sin \frac{\delta + \psi}{2}, \quad (32)$$

$$\tilde{t} \sin \frac{\tilde{\delta} - \tilde{\psi}}{2} = tr \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\rho} \sin \frac{\delta - \psi}{2}. \quad (33)$$

Сравнение (27) (и аналогичного уравнения для переменных с тильдой) с (30) приводит к соотношениям

$$\begin{aligned}\frac{\delta_u - \psi_u}{2} &= \frac{r_v s \sin \psi}{2rt} - s \sin \frac{\delta + \psi}{2} \left(\operatorname{ctg} 2\varphi + \frac{r}{2\rho} \right), \\ \frac{\delta_v + \psi_v}{2} &= -\frac{r_u t \sin \psi}{2rs} + t \sin \frac{\delta - \psi}{2} \left(\operatorname{ctg} 2\varphi - \frac{r}{2\rho} \right),\end{aligned}\quad (34)$$

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{\delta}_u - \tilde{\psi}_u}{2} &= \frac{\tilde{r}_v \tilde{s} \sin \tilde{\psi}}{2\tilde{r}\tilde{t}} + \tilde{s} \sin \frac{\tilde{\delta} + \tilde{\psi}}{2} \left(\operatorname{ctg} 2\varphi + \frac{\tilde{r}}{2\rho} \right), \\ \frac{\tilde{\delta}_v + \tilde{\psi}_v}{2} &= -\frac{\tilde{r}_u \tilde{t} \sin \tilde{\psi}}{2\tilde{r}\tilde{s}} - \tilde{t} \sin \frac{\tilde{\delta} - \tilde{\psi}}{2} \left(\operatorname{ctg} 2\varphi - \frac{\tilde{r}}{2\rho} \right).\end{aligned}\quad (35)$$

Наконец, мы заменяем формулы (29) для $d\rho$ и $d\varphi$ на явные выражения

$$\begin{aligned}\varphi_u &= \frac{1}{2} \left(s \cos \frac{\delta + \psi}{2} - \tilde{s} \cos \frac{\tilde{\delta} + \tilde{\psi}}{2} \right), \\ \varphi_v &= \frac{1}{2} \left(-t \cos \frac{\delta - \psi}{2} + \tilde{t} \cos \frac{\tilde{\delta} - \tilde{\psi}}{2} \right), \\ \rho_u &= \frac{1}{2} \left(rs \cos \frac{\delta + \psi}{2} - \tilde{r}\tilde{s} \cos \frac{\tilde{\delta} + \tilde{\psi}}{2} \right), \\ \rho_v &= \frac{1}{2} \left(rt \cos \frac{\delta - \psi}{2} - \tilde{r}\tilde{t} \cos \frac{\tilde{\delta} - \tilde{\psi}}{2} \right).\end{aligned}\quad (36)$$

Заметим, что условия интегрируемости (22) и $d^2\varphi = 0$, $d^2\rho = 0$ также выполняются в силу (2), (31)–(33) и (34)–(36).

Здесь уместно подытожить результаты выполненных расчетов. Нашей целью было описание совокупности W-конгруэнций и их фокальных поверхностей. Фокальные поверхности $\mathcal{F}$ и $\tilde{\mathcal{F}}$ представлены решениями системы (2), т.е. $\mathcal{F}$ задана четверкой (r, s, t, ψ) , а $\tilde{\mathcal{F}} - (\tilde{r}, \tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{\psi})$. Одновременно сама W-конгруэнция задает связь между (r, s, t, ψ) и $(\tilde{r}, \tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{\psi})$, а именно соотношения (29)–(34). Предположим теперь, что имеется решение (r, s, t, ψ) уравнений (2) (“старое решение”). Можно найти “новое решение” $(\tilde{r}, \tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{\psi})$, переписав (31)–(36) в следующем виде:

$$\begin{aligned}\frac{\delta_u - \psi_u}{2} &= \frac{r_v s \sin \psi}{2rt} - s \sin \frac{\delta + \psi}{2} \left(\Theta + \frac{r}{2\rho} \right), \\ \frac{\delta_v + \psi_v}{2} &= -\frac{r_u t \sin \psi}{2rs} + t \sin \frac{\delta - \psi}{2} \left(\Theta - \frac{r}{2\rho} \right);\end{aligned}\quad (37)$$

$$\begin{aligned}(\ln \rho)_u &= -\frac{2\rho}{r} \Theta_u + \frac{r}{2\rho} s \cos \frac{\delta + \psi}{2} \left\{ 1 - \frac{4\rho^2}{r^2} (1 + \Theta^2) \right\}, \\ (\ln \rho)_v &= \frac{2\rho}{r} \Theta_v + \frac{r}{2\rho} t \cos \frac{\delta - \psi}{2} \left\{ 1 - \frac{4\rho^2}{r^2} (1 + \Theta^2) \right\};\end{aligned}\quad (38)$$

$$\begin{aligned}
& \Theta_{uv} + \Theta_u \left\{ -\frac{r_v}{2r} + t \cos \frac{\delta - \psi}{2} \left(\frac{r}{2\rho} - \Theta \right) \right\} + \Theta_v \left\{ -\frac{r_u}{2r} + s \cos \frac{\delta + \psi}{2} \left(\frac{r}{2\rho} + \Theta \right) \right\} + \\
& + \Theta s t \sin \frac{\delta - \psi}{2} \sin \frac{\delta + \psi}{2} \left\{ \frac{r^2}{4\rho^2} - (1 + \Theta^2) \right\} + \\
& + (1 + \Theta^2) \left(\frac{r_u}{r} t \cos \frac{\delta - \psi}{2} - \frac{r_v}{r} s \cos \frac{\delta + \psi}{2} \right) = 0;
\end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{r}r &= \left(\frac{2\rho}{\sin 2\varphi} \right)^2, \\
\tilde{s} \sin \frac{\tilde{\delta} + \tilde{\psi}}{2} &= -sr \frac{\sin 2\varphi}{2\rho} \sin \frac{\delta + \psi}{2}, \\
\tilde{t} \sin \frac{\tilde{\delta} - \tilde{\psi}}{2} &= tr \frac{\sin 2\varphi}{2\rho} \sin \frac{\delta - \psi}{2}, \\
\tilde{s} \cos \frac{\tilde{\delta} + \tilde{\psi}}{2} &= -2\varphi_u + s \cos \frac{\delta + \psi}{2}, \\
\tilde{t} \cos \frac{\tilde{\delta} - \tilde{\psi}}{2} &= 2\varphi_v + t \cos \frac{\delta - \psi}{2},
\end{aligned} \tag{40}$$

где $\Theta = \operatorname{ctg} 2\varphi$. Соотношения (40) совпадают с (5г). Если определить X из соотношений

$$\begin{aligned}
(\ln X)_u &= \frac{2\rho}{r} \Theta_u + s \cos \frac{\delta + \psi}{2} \left\{ \Theta + \frac{2\rho}{r} (1 + \Theta^2) \right\}, \\
(\ln X)_v &= -\frac{2\rho}{r} \Theta_v + t \cos \frac{\delta - \psi}{2} \left\{ -\Theta + \frac{2\rho}{r} (1 + \Theta^2) \right\},
\end{aligned} \tag{41}$$

а переменные y^i — из (5в), то можно переписать (37)–(39) в виде (5а), (5б).

4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ПОДХОД К СОЛИТОННОЙ ТЕОРИИ ДЛЯ СИСТЕМЫ БИАНКИ

Исследования поверхностей Бианки и соответствующих конгруэнций Бианки относятся к почти забытой сегодня части классической дифференциальной геометрии [14]. Тот факт, что уравнения ГМК, неявно описывающие класс поверхностей Бианки, являются солитонной системой, был впервые замечен Сенклом [1]. Дальнейшее развитие эта идея получила в работе [2] (см. также [15–18]). В этом разделе мы сформулируем солитонную теорию системы Бианки, включающую спектральные аспекты и основанную исключительно на геометрическом аппарате W -конгруэнций, развитом в разделе 3. В частности, мы обсудим чисто геометрическое происхождение спектрального параметра в соответствующей линейной задаче.

Конгруэнции Бианки определены как W -конгруэнции с равными значениями гауссовой кривизны в соответствующих точках фокальных поверхностей. Заметим, что конгруэнции Бианки не являются более проективным понятием, а представляют собой метрическую редукцию проективно-инвариантных W -конгруэнций. Условие

$$\tilde{r} = r \tag{42}$$

означает, что

$$r(u, v) = U(u) + V(v) \quad (43)$$

в силу (37)–(40). Поэтому гауссова кривизна $K(u, v)$ в соответствующих точках фокальных поверхностей задается соотношением

$$K(u, v) = -\frac{1}{\{U(u) + V(v)\}^2}, \quad (44)$$

(см. (4)). Гиперболическая поверхность, удовлетворяющая (44), традиционно называется *поверхностью Бианки*. Таким образом, фокальные поверхности конгруэнции Бианки являются поверхностями Бианки. Ясно, что, выбирая подходящие параметризации асимптотических линий, можно свести (43) к одному из трех следующих случаев:

- $r(u, v) = \text{const}$ (псевдосферические поверхности),
- $r(u, v) = u$ (см. [19]),
- $r(u, v) = u + v$ (см. [16, 17]).

Мы, однако, будем иметь дело с общим выражением (43).

Система уравнений ГМК (2) в рассматриваемом случае приводит к вполне интегрируемой системе (системе Бианки) [1, 2, 15–18]:

$$\begin{aligned} \psi_{uv} + \left(\frac{V_v s \sin \psi}{2t(U+V)} \right)_v + \left(\frac{U_u t \sin \psi}{2s(U+V)} \right)_u - ts \sin \psi &= 0, \\ s_v &= \frac{1}{2(U+V)} (t \cos \psi U_u - s V_v), \\ t_u &= \frac{1}{2(U+V)} (s \cos \psi V_v - t U_u), \end{aligned} \quad (45)$$

где $U(u)$ и $V(v)$ – заданные функции.

В работе [2] преобразование Беклунда для системы (45) обсуждено в контексте преобразований Дарбу. Прежде всего мы перепишем систему (5) с учетом рассматриваемой редукции. Ключевое наблюдение состоит в том, что уравнения (38) теперь могут быть проинтегрированы в силу первого уравнения из (40). Поэтому преобразование (5) (вер-

нее, его вариант в форме (37)–(40)) принимает вид

$$\begin{aligned} r &= U(u) + V(v), \\ \rho &= \sqrt{(U(u) + k_1)(V(v) - k_1)}, \\ \operatorname{ctg} \varphi &= \sqrt{\frac{V(v) - k_1}{U(u) + k_1}}, \\ k_1 &= \operatorname{const}; \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \delta_u &= \psi_u + \frac{r_v s \sin \psi}{rt} - 2s \sin \frac{\delta + \psi}{2} \operatorname{ctg} \varphi, \\ \delta_v &= -\psi_v - \frac{r_u t \sin \psi}{rs} - 2t \sin \frac{\delta - \psi}{2} \operatorname{tg} \varphi; \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \tilde{s} \sin \frac{\tilde{\delta} + \tilde{\psi}}{2} &= -s \sin \frac{\delta + \psi}{2}, \\ \tilde{t} \sin \frac{\tilde{\delta} - \tilde{\psi}}{2} &= t \sin \frac{\delta - \psi}{2}, \\ \tilde{s} \cos \frac{\tilde{\delta} + \tilde{\psi}}{2} &= -2\varphi_u + s \cos \frac{\delta + \psi}{2}, \\ \tilde{t} \cos \frac{\tilde{\delta} - \tilde{\psi}}{2} &= 2\varphi_v + t \cos \frac{\delta - \psi}{2}, \end{aligned} \quad (48)$$

где k_1 (параметр преобразования Беклунда) есть не что иное, как константа интегрирования.

Наконец, покажем, как из геометрических соображений получить зависящую от спектрального параметра задачу для системы Бианки (45). Для этого перепишем уравнения движения $d\vec{E}_i = (A_i^j du + B_i^j dv)\vec{E}_j$ для движущегося репера $\vec{E}_i$ первой фокальной поверхности (теперь $\vec{E}_1$ есть единичный вектор, направленный вдоль линии $v = \operatorname{const}$) в терминах матрицы перехода $\Psi = [\Psi_j^i]$ от фиксированного ортонормального репера $\{\vec{E}_i^0\}$ к движущемуся реперу $\{\vec{E}_i\}$:

$$\vec{E}_j = \Psi_j^i \vec{E}_i^0. \quad (49)$$

Полученные при этом уравнения

$$\Psi_u = A\Psi, \quad \Psi_v = B\Psi, \quad (50)$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & \psi_u + \frac{r_v s \sin \psi}{2rt} & 0 \\ -(\psi_u + \frac{r_v s \sin \psi}{2rt}) & 0 & -s \\ 0 & s & 0 \end{bmatrix}, \\ B &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{r_u t \sin \psi}{2rs} & t \sin \psi \\ \frac{r_u t \sin \psi}{2rs} & 0 & t \cos \psi \\ -t \sin \psi & -t \cos \psi & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (51)$$

представляют собой “голую” линейную задачу для (45). Действительно, условия совместности для (50) в точности совпадают с (45). Стандартная процедура введения

спектрального параметра в матрицы (51) состоит в действии на (50) точечными симметриями системы (2) [2]. При нашем же подходе внутренняя симметрия выводится из геометрических соображений.

Прежде всего мы линеаризуем дифференциальную часть преобразования Беклунда (37) с помощью подстановки $z_2/z_1 = \operatorname{tg}[(\delta + \psi)/4]$:

$$Z_u = a'(\zeta_1)Z, \quad Z_v = b'(\zeta_1)Z, \quad (52)$$

$$\begin{aligned} a'(\zeta_1) &= -\frac{i}{2} \left\{ -\zeta_1 s \sigma_3 - \left(\psi_u + \frac{r_v s \sin \psi}{2rt} \right) \sigma_2 \right\}, \\ b'(\zeta_1) &= -\frac{i}{2} \left\{ \frac{t \cos \psi}{\zeta_1} \sigma_3 - \frac{r_u t \sin \psi}{2rs} \sigma_2 + \frac{t \sin \psi}{\zeta_1} \sigma_1 \right\}, \end{aligned} \quad (53)$$

где

$$\begin{aligned} Z &= \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad \zeta_1 = \sqrt{\frac{k_1 - V}{k_1 + U}} = i \operatorname{ctg} \varphi_1, \\ \sigma_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (54)$$

Матрицы a' и b' принадлежат $su(2)$ и могут быть заменены на свои изоморфные копии A' и B' :

$$\begin{aligned} A'(\zeta_1) &= \begin{bmatrix} 0 & \psi_u + \frac{r_v s \sin \psi}{2rt} & 0 \\ -(\psi_u + \frac{r_v s \sin \psi}{2rt}) & 0 & -\zeta_1 s \\ 0 & \zeta_1 s & 0 \end{bmatrix}, \\ B'(\zeta_1) &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{r_u t \sin \psi}{2rs} & \frac{t \sin \psi}{\zeta_1} \\ \frac{r_u t \sin \psi}{2rs} & 0 & \frac{t \cos \psi}{\zeta_1} \\ -\frac{t \sin \psi}{\zeta_1} & -\frac{t \cos \psi}{\zeta_1} & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (55)$$

Линейная форма преобразования Беклунда приводит к линейной задаче, зависящей от параметра. Заменяем (50) на уравнения

$$\Psi'_u = A'(\zeta) \Psi', \quad \Psi'_v = B'(\zeta) \Psi', \quad (56)$$

где

$$\zeta = \sqrt{\frac{k - V}{k + U}} \quad (57)$$

есть спектральный параметр. Условия совместности для (56) суть по-прежнему (45).

Более того, мы по-прежнему имеем дело с конгруэнциями Бианки. Действительно, если функции, помеченные штрихом, вводятся как

$$\begin{aligned} s' &= \zeta s, \quad t' = \frac{t}{\zeta}, \quad \psi' = \psi, \\ r' &= \operatorname{const} \left(\frac{U}{1 + \frac{U}{k}} + \frac{V}{1 - \frac{V}{k}} \right), \\ \operatorname{ctg} \varphi' &= \sqrt{\frac{\frac{V}{1 - \frac{V}{k}} - k'}{\frac{U}{1 + \frac{U}{k}} + k'}}, \end{aligned} \quad (58)$$

то (56) сводится к (50), r' по-прежнему имеет вид $f(u) + g(v)$, а δ' удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned}\delta'_u &= \psi_u + \frac{r_v s \sin \psi}{rt} - 2s \sin \frac{\delta' + \psi}{2} \operatorname{ctg} \varphi'_1, \\ \delta'_v &= -\psi_v - \frac{r_u t \sin \psi}{rs} - 2t \sin \frac{\delta' - \psi}{2} \operatorname{tg} \varphi'_1,\end{aligned}\tag{59}$$

где

$$\operatorname{ctg} \varphi'_1 = \sqrt{\frac{V - k'_1}{U + k'_1}}, \quad k'_1 = \frac{kk'}{k + k'}.\tag{60}$$

Иными словами, спектральный параметр в (56) является “параметром деформации” для первой фокальной поверхности. Эта деформация, в свою очередь, приводит к деформации конгруэнции, сохраняющей свою начальную форму Бианки (ср. с [20]). Преобразование $(U, V, s, t, \psi) \mapsto (U', V', s', t', \psi')$, где $U' = U/(1 + U/k)$ и $V' = V/(1 - V/k)$, является симметрией (45).

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ И ВЫВОДЫ

Система (2) может быть записана в другом виде, если ввести новую комплексную переменную $\xi(u, v)$:

$$\begin{aligned}s^2 &= \frac{4\xi_u \bar{\xi}_u}{(1 + \xi\bar{\xi})^2}, \\ t^2 &= \frac{4\xi_v \bar{\xi}_v}{(1 + \xi\bar{\xi})^2}, \\ ts \cos \psi &= -\frac{2(\xi_u \bar{\xi}_v + \xi_v \bar{\xi}_u)}{(1 + \xi\bar{\xi})^2}.\end{aligned}\tag{61}$$

Уравнения (2) принимают форму

$$(1 + \xi\bar{\xi}) \left(\xi_{uv} + \frac{r_v}{2r} \xi_u + \frac{r_u}{2r} \xi_v \right) = 2\bar{\xi} \xi_u \xi_v\tag{62}$$

(см. также [16–18]).

Основные результаты настоящей работы заключаются в следующем. Система (2) (или (62)), описывающая класс гиперболических поверхностей в E^3 , является интегрируемой в том смысле, что ее решения могут быть получены линейными средствами (формулы (5)). Формулы (5) (или преобразования Беклунда для системы (2)) были выведены двумя способами (разделы 2 и 3). Наконец, в разделе 4 был представлен чисто геометрический подход к получению некоторых солитонных результатов, связанных с системой Бианки (45).

Благодарности. Один из авторов (М.Н.) благодарит организаторов конференции “NEEDS in Leeds 1998” за приглашение в ней участвовать и возможность представить эти результаты.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Польского комитета научных исследований (грант 2 РОЗВ 185 09).

Список литературы

- [1] *B. Cenkli*. Physica D. 1986. V. 18. P. 217–219.
- [2] *D. Levi, A. Sym*. Phys. Lett. A. 1990. V. 149. P. 381–387.
- [3] *С. П. Фоминков*. Теория конгруэнций. М.–Л.: Гостехиздат, 1950.
- [4] *M. Nieszporski, A. Sym*. Weingarten congruences and non-auto-Bäcklund transformations for hyperbolic surfaces. In: Proc. of First Non-Orthodox School on Nonlinearity and Geometry. Eds. D. Wójcik and J. Cieśliński. Warsaw: PWN, 1998. P. 37–40.
- [5] *R. Prus, A. Sym*. Rectilinear congruences and Bäcklund transformations: roots of the soliton theory. In: Proc. of First Non-Orthodox School on Nonlinearity and Geometry. Eds. D. Wójcik and J. Cieśliński. Warsaw: PWN, 1998. P. 25–36.
- [6] *J. Cieśliński*. Lie symmetries as a tool to isolate integrable geometries. In: Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems. Eds. M. Boiti, L. Martina, and F. Pempinelli. Singapore: World Scientific, 1992. P. 260–268.
- [7] *H. Jonas*. J. Deutsch. Math. Ver. 1920. V. 29. P. 40–74.
- [8] *M. Lelievre*. Bull. Sci. Math. 1888. V. 12. P. 126–128.
- [9] *Th.-F. Moutard*. J. Ec. Pol. 1878. V. 45. P. 1.
- [10] *C. Athorne*. Inverse Problems. 1993. V. 9. P. 217–232.
- [11] *V. B. Matveev, M. A. Sale*. Darboux Transformations and Solitons. Berlin: Springer-Verlag, 1991.
- [12] *C. Guichard*. C. R. Acad. Sci. Paris. 1890. V. 110. P. 126–127; 1891. V. 112. P. 1424–1426.
- [13] *A. Doliwa, P. M. Santini*. Phys. Lett. A. 1997. V. 233. P. 365–372.
- [14] *L. Bianchi*. Ann. Mat. 1890. V. 18. № 2. P. 301–358.
- [15] *A. I. Bobenko*. Surfaces in terms of 2 by 2 matrices: Old and new integrable cases. In: Harmonic Maps and Integrable Systems (Aspects of Math. V. E23). Eds. A. P. Fordy and J. C. Wood. Braunschweig/Wiesbaden, 1994.
- [16] *D. Korotkin*. On some integrable cases in surface theory. Preprint Sfb 288 №. 116. Berlin, 1994; <http://www-sfb288.math.tu-berlin.de>.
- [17] *J. Tafel*. J. Geom. Phys. 1995. V. 17. P. 381–390.
- [18] *W. K. Schief, C. Rogers, M. E. Johnston*. Chaos, Solitons, and Fractals. 1995. V. 5. № 1. P. 25–35.
- [19] *W. K. Schief*. Nonlinearity. 1995. V. 8. P. 1–9.
- [20] *J. Cieśliński*. The Darboux–Bianchi–Bäcklund transformation and soliton surfaces. In: Proc. of First Non-Orthodox School on Nonlinearity and Geometry. Eds. D. Wójcik and J. Cieśliński. Warsaw: PWN, 1998. P. 80–107.