Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. К. Буллоу, Н. М. Боголюбов, Р. Р. Пури, Квантовая интегрируемость и квантовый хаос в микромазере, *ТМФ*, 2000, том 122, номер 2, 182–204

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf562>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 11:17:03

© 2000 г. Р. К. Буллоу*, Н. М. Боголюбов†, Р. Р. Пури‡

КВАНТОВАЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ И КВАНТОВЫЙ ХАОС В МИКРОМАЗЕРЕ

Зависящие от времени квантовые гамильтонианы

$$\hat{H}(t) = \begin{cases} \hat{H}, & t_i < t < t_i + t_{\text{int}}, \\ \omega_0 \hat{N}, & t_i + t_{\text{int}} < t < t_{i+1}, \end{cases}$$

описывают мазеры с N двухуровневыми атомами, взаимодействующими с отдельной модой квантованного поля в резонаторе мазера; здесь t_i , $i = 1, 2, \dots, N_a$, – дискретные моменты времени, N_a велико ($\sim 10^5$), $\hat{N}$ – оператор числа частиц в алгебре Гейзенберга–Вейля (ГВ), а ω_0 – собственная частота резонатора. N атомов образуют $(N+1)$ -мерное представление алгебры Ли $su(2)$, а отдельная мода образует представление алгебры ГВ. Мы считаем, что N атомов в возбужденном состоянии попадают в резонатор в каждый момент t_i и покидают его в момент $t_i + t_{\text{int}}$. В пренебрежении всеми эффектами затухания и конечной температуры эта модель при $N = 1$ описывает одноатомный микромазер, в настоящее время действующий на атомах ^{85}Rb , совершающих микроволновые переходы между двумя высшими ридберговскими состояниями. Мы показываем, что $\hat{H}$ является полностью интегрируемым для любого $N = 1, 2, \dots$ в квантовом смысле, и находим нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) второго порядка, определяющее эволюцию оператора инверсии $S^Z(t)$ в алгебре Ли $su(2)$. При $N = 1$ и нелинейном условии $[S^Z(t)]^2 = (1/4)\hat{I}$ это ОДУ линейризуется, превращаясь в операторное уравнение гармонического осциллятора, которое мы решаем. При $N = 1$ движение в расширенном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ может описываться предельным циклом, сочетающим в себе движение атома под действием указанного нелинейного условия со сходимостью числа n фотонов к n_0 , определяемому уравнением $\sqrt{n_0 + 1} g t_{\text{int}} = r\pi$ (r целое, g – константа взаимодействия атом–поле). Движение стационарно для каждого значения t_i ; при каждом t_i состояние атом–поле имеет вид $|e\rangle|n_0\rangle$, где $|e\rangle$ – возбужденное состояние двухуровневого атома и $\hat{N}|n_0\rangle = n_0|n_0\rangle$. Используя подходящую алгебру петель, мы формулируем операторные уравнения движения в течение времени t_{int} для любого N в терминах пары Лакса. При $N = 2$ и $N = 3$ нелинейные операторные уравнения линейризуются при подходящем дополнительном нелинейном условии; мы находим операторные решения при $N = 2$ и $N = 3$, а затем мазерное решение при $N = 2$. Исследовав квазиклассические пределы нелинейных операторных уравнений движения, мы приходим к выводу, что “квантовый хаос” нельзя создать в N -атомном микромазере ни при каком N . Одним из препятствий оказывается особый вид квазиклассического предела для операторной

*Department of Mathematics UMIST, England. E-mail: robin.bullough@umist.ac.uk

†Санкт-Петербургское отделение МИ РАН, Санкт-Петербург, Россия.

E-mail: bogoliub@pdmi.ras.ru

‡Theoretical Physics Division, BARC, Mumbai (Bombay), India

задачи с N атомами. Поскольку эта s -числовая квазиклассика имеет нестабильную особую точку, “квантовый хаос”, вероятно, может быть создан путем воздействия на реальную квантовую систему дополнительным внешним микроволновым полем, взаимодействующим с резонатором мазера.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одноатомный микромазер представляет собой устройство, действующее в настоящее время в Институте квантовой оптики им. Макса Планка в Гархинге, недалеко от Мюнхена в Германии [1–3]. На практике атомы рубидия нагреваются в печи. Выходя оттуда, они проходят строгий отбор по скоростям и под действием лазера совершают переходы в так называемое высшее ридберговское состояние $63P_{3/2}$ (в спектральных обозначениях) [3]. Отдельные атомы ^{85}Rb попадают в сверхохлажденный ниобиевый резонатор размером ≈ 1 см. В экспериментах резонатор настраивается (путем сжатия) на резонанс с атомами. Атомы выходят из резонатора или в состоянии $63P_{3/2}$, или в состоянии $61D_{5/2}$. В последнем случае фотон остается в резонаторе, что приводит к созданию в нем электромагнитного поля.

Микромазер представляет собой устройство, динамика которого подчиняется законам квантовой, а не классической механики. Поля, создаваемые в резонаторе мазера, могут быть “субпуассоновыми” [3], не имеющими классических аналогов; эти электромагнитные поля внутри резонатора описываются уравнениями Максвелла в *квантовой* форме. Динамика включает в себя переходы между двумя высшими ридберговскими состояниями атома ^{85}Rb , которые мы обозначаем как $|e\rangle$ (состояние $63P_{3/2}$) и $|g\rangle$ (состояние $61D_{5/2}$). Переход $|e\rangle \rightarrow |g\rangle$ происходит на частоте 21.456 ГГц. Оба состояния $|e\rangle$ и $|g\rangle$ невырождены и с экспериментальной точки зрения являются хорошим примером *двухуровневого атома*. Очевидно, состояния $|e\rangle$ и $|g\rangle$ порождают двумерное гильбертово пространство $\mathcal{H}_a$. Разность энергий состояний $|e\rangle$ и $|g\rangle$ обозначим $\hbar\omega_0$, причем $\omega_0 \equiv 2\pi\nu_0$ обратных угловых секунд.

Атомы один за другим входят в резонатор в моменты времени t_i , $i = 1, 2, \dots, N_a$, при больших $N_a \approx 10^5$. Таким образом в экспериментах [1–3] достигается равновесие. Атомы попадают в резонатор в состоянии $|e\rangle$ в каждый момент времени t_i и вылетают из него через t_{int} в состоянии $|e\rangle$ или $|g\rangle$. В течение t_{int} каждый атом взаимодействует с квантованным полем, уже присутствующим в резонаторе мазера. Если атомы вылетают в состоянии $|e\rangle$, то, хотя динамика взаимодействия с полем в течение t_{int} может быть сложной, поле резонатора остается неизменным. Однако если они вылетают в состоянии $|g\rangle$, то фотон с энергией $\hbar\omega_0$ остается в резонаторе мазера и, таким образом, там возникает квантованное поле.

Очевидно, накачка динамической системы происходит за счет возбужденных атомов, попадающих в резонатор мазера в состоянии $|e\rangle$ и оставляющих там фотоны. При достижении равновесия система оказывается квантовой динамической системой, накачанной до состояния, далекого от основного. В настоящей работе мы показываем, что система может перейти в устойчивое, осциллирующее состояние, характерное для предельного цикла; это соответствует динамике устойчивого осциллирующего мазера. С учетом некоторых физических соображений, дополнительно к тем, которые мы использовали в настоящей работе (в особенности затухания в резонаторе, которое мы будем обсуждать ниже), нами [4] и другими авторами [5] было показано, что при крупномасштабном ус-

реднении динамика принимает вид, эквивалентный описываемому уравнениями Скалли–Лэма для одномодового лазера [6], осциллирующего выше порога. В нашей недавней работе [7] мы получили практически такой же результат.

Любое описание реального микромазера должно включать описание динамики как *входящих* в резонатор атомов, так и *вылетающих* из него [7]. Более того, единственным экспериментальным средством исследования поля резонатора является наблюдение состояний атомов, покинувших резонатор; эти состояния были зарегистрированы в экспериментах [3], и из статистического анализа этих атомных состояний можно попытаться сделать вывод о состояниях *полей* внутри резонатора [3, 7, 8]. Эта интересная квантовая задача также рассматривалась в нашей работе [7]: она сопряжена со значительными трудностями, связанными с описанием полной динамики, и здесь мы не будем рассматривать этот важный аспект. (Основной результат работы [7] заключается в том, что подобные квантовые измерения на самом деле не оказывают влияния на динамическое поведение, усредненное по ансамблю.)

Вследствие строгого отбора по скоростям атомов ^{85}Rb время t_{int} является стохастической переменной с очень малой дисперсией, т.е. практически детерминировано. В работе [7] мы моделируем такую динамику биномиальным распределением. В пределе непрерывного времени (который, по-видимому, достигается в экспериментах) вероятность того, что два атома переходят по отдельности в состояние $|e\rangle$ в некоторый момент времени t в промежутке от t до $t + dt$, равна $Re^{-Rt} dt$, что представляет собой экспоненциальное распределение Пуассона. Мы не будем учитывать это важное стохастическое свойство в настоящей работе. Достаточно будет допустить, что атомы влетают последовательно в дискретные моменты времени t_i , $i = 1, 2, \dots, N_a$, причем значения t_i произвольны: нам необходимо только условие $t_{i+1} - t_i > t_{\text{int}}$. В реальном микромазере стохастический вход атомов в резонатор означает $t_{i+1} - t_i \not> t_{\text{int}}$, поэтому только $N \geq 2$ атомов могут находиться в резонаторе в один и тот же момент времени. В данной статье мы рассматриваем $N = 2$, $N = 3$ или более атомов, входящих в резонатор (и покидающих его) в *один и тот же момент времени* – это “ N -атомный микромазер”¹⁾.

Поскольку резонатор настраивается в резонанс с атомами, мы можем рассматривать случай одной выделенной (резонансной) моды электромагнитного поля в микроволновом резонаторе. Можно рассмотреть и более совершенные модели, например такие, в которых атомы непосредственно взаимодействуют с термостатом [7, 10], чего мы, однако, в настоящей работе делать не будем. Начнем с изучения одного ($N = 1$) двухуровневого атома, взаимодействующего с одной выделенной модой квантованного электромагнитного поля. Точное решение этой так называемой модели Джейнса–Каммингса

¹⁾ Важное физическое соображение, касающееся реального микромазера, состоит в том, что в микроволновом резонаторе происходит затухание, характеризующееся константой затухания $2\kappa \equiv \omega_0 Q^{-1}$ (Q – логарифмический декремент затухания интенсивности поля). В экспериментах [3] были достигнуты очень высокие значения $Q > 10^{10}$. Резонатор из сверххлажденного ниобия при температуре $T \lesssim 0.5$ К тем не менее взаимодействует с термостатом (с внешним миром [7], т.е. он представляет собой *открытую* квантовую систему). Результирующее излучение черного тела оказывает значительное влияние на динамику [7] (даже если среднее число фотонов $\bar{n} < 0.15$, т.е. меньше единицы, и энергии отдельных фотонов малы, 10^{-23} Дж!). В настоящей работе мы не учитываем ни влияния затухания в резонаторе, ни эффектов, связанных с излучением черного тела. Ясно, однако, что они являются важными для настоящего динамического *равновесия*, которое достигается в реальном микромазере [7, 9, 10].

(ДжК) было получено в 1963 году [11].

Одноатомная модель реализуется экспериментально (см., например, [3]) следующим образом: время t_{int} выбирается “малым” (≈ 35 мкс); тогда среднее время повторения $T_p \equiv R^{-1}$ “велико” ($T_p \approx 7$ мс), при этом время затухания в резонаторе $T_c \equiv (2\kappa)^{-1}$ “очень большое” ($T_c \approx 0.2$ с). В течение времени t_{int} затухание в резонаторе пренебрежимо мало ($t_{\text{int}} T_c^{-1} \approx 1.75 \times 10^{-4}$), и процесс можно считать унитарной эволюцией [7]. Отметим также, что $T_p \gg t_{\text{int}}$ ($T_p : t_{\text{int}} \approx 200 : 1$), так что (в среднем и в пренебрежении возможными стохастическими эффектами) в резонаторе в течение времени $t_i + t_{\text{int}} < t < t_{i+1}$ нет атомов: резонатор пуст в среднем в течение 99.5% промежутков времени $t_{i+1} - t_i$. В реальной системе в течение этого длительного свободного от атомов промежутка времени резонатор все еще взаимодействует с термостатом, так что резонатор и его поле затухают [7], что вместе с излучением черного тела определяет равновесие [7, 9, 10]. Поскольку данная работа имеет целью прояснить квантовую динамику, мы пренебрегаем этим характерным свойством резонатора, рассматривая в качестве идеальной модели резонатор без затухания. Замечательным образом мы обнаружим, что такие накачанные (атомами) квантовые динамические системы по-прежнему могут достичь устойчивого далекого от основного состояния.

2. МОДЕЛЬНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Начнем с изучения следующей модельной квантовой динамической системы. Пустой резонатор описывается гамильтонианом

$$H = \omega a^\dagger a, \quad (1)$$

причем берется резонансное значение частоты $\omega = \omega_0$ и $\hbar = 1$. Операторы a , $a^\dagger$ и $\hat{N} \equiv a^\dagger a$ удовлетворяют коммутационным соотношениям Гейзенберга–Вейля

$$[\hat{N}, a] = -a, \quad [\hat{N}, a^\dagger] = a^\dagger, \quad [a, a^\dagger] = 1, \quad (2)$$

где 1 – единичный оператор. Это модель одного квантового осциллятора (одной выделенной квантованной резонаторной моды).

Мы описываем двухуровневый атом в представлении со спином $1/2$, причем спину вверх соответствует состояние $|e\rangle$, а спину вниз – состояние $|g\rangle$. Алгебра Ли $su(2)$ квантовых моментов импульса в терминах трех элементов $S^\pm, S^Z$ описывается коммутационными соотношениями

$$[S^Z, S^\pm] = \pm S^\pm, \quad [S^+, S^-] = 2S^Z, \quad (3)$$

а ее оператор Казимира равен

$$\hat{S}^2 = (S^Z)^2 + \frac{1}{2}(S^+ S^- + S^- S^+) = S(S+1)\hat{I}, \quad (4)$$

где S – “полный спин” и $\hat{I}$ – единичный оператор. Для $S = 1/2$ операторы двумерного представления строятся в терминах внешних произведений $|e\rangle$ и $|g\rangle$ как

$$S^+ = |e\rangle\langle g|, \quad S^- = |g\rangle\langle e|, \quad S^Z = \frac{1}{2}(|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|) \quad (5)$$

(состояния $|e\rangle$, $|g\rangle$ выбираются ортонормированными, так что $(S^+)^2 = (S^-)^2 = 0$ и $S^Z|e\rangle = +(1/2)|e\rangle$, $S^Z|g\rangle = -(1/2)|g\rangle$). Специальное (и важное для наших целей) свойство двумерного представления состоит в том, что

$$(S^Z)^2 = \frac{1}{4}\hat{I}. \quad (6)$$

Модель ДжК для одного двухуровневого атома, взаимодействующего с одной выделенной модой в резонаторе [11], описывается гамильтонианом

$$\hat{H} = \omega a^\dagger a + \omega_0 S^Z + g(a^\dagger S^- + S^+ a), \quad (7)$$

где g – константа связи (в экспериментах [3] $g = 44$ угл. с⁻¹) и $\omega = \omega_0$ при резонансе.

Мы рассматриваем *зависящий от времени* гамильтониан

$$\hat{H}(t) = \begin{cases} \hat{H}, & t_i < t < t_i + t_{\text{int}}, \\ \omega_0 \hat{N}, & t_i + t_{\text{int}} < t < t_{i+1}, \end{cases} \quad (8)$$

где $\hat{H}$ – гамильтониан (7), $\omega = \omega_0$, а $i = 1, 2, \dots, N_a$, причем N_a велико. Времена t_i произвольны, за исключением того, что $t_{i+1} - t_i > t_{\text{int}}$. Как было отмечено выше, любым затуханием мы пренебрегаем.

Можно проверить, что оператор

$$\hat{M} \equiv S^Z + \hat{N} \quad (9)$$

коммутирует с $\hat{H}$. Собственные состояния оператора $\hat{N}$ – это состояния $|n\rangle$, $n = 0, 1, 2, \dots$, с соответствующими собственными значениями n . Состояние $|0\rangle$ – вакуумное состояние. Операторы $\hat{H}$ и $\hat{M}$ действуют в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_{\text{ph}}$, где $\mathcal{H}_{\text{ph}}$ порождено состояниями $|n\rangle$. Единичный оператор в $\mathcal{H}_{\text{ph}}$ есть 1. Более точно можно записать

$$\hat{M} \equiv S^Z \otimes 1 + \hat{I} \otimes \hat{N}. \quad (10)$$

При такой записи S^Z представлен в $\mathcal{H}$ как $S^Z \otimes 1$, а $\hat{N}$ – как $\hat{I} \otimes \hat{N}$; с другой стороны, например, $S^+ a \equiv S^+ \otimes a$. Такие обозначения подчеркивают, что $\hat{H}$ и $\hat{M}$ коммутируют. Оператор $\hat{M}$ является оператором полного числа фотонов: состояния $|n\rangle$ являются n -фотонными состояниями, при этом в состоянии $|e\rangle$ двухуровневый атом может испустить один фотон, а в состоянии $|g\rangle$ излучение фотонов невозможно. Собственные состояния оператора $\hat{M} + (1/2)\hat{I} \otimes 1$, относящиеся к собственному значению $n + 1$, имеют вид $|e\rangle|n\rangle$ и $|g\rangle|n + 1\rangle$. Состояние $|g\rangle|0\rangle$ – без частиц – также является собственным состоянием оператора $\hat{M} + (1/2)\hat{I} \otimes 1$. Эти собственные состояния вместе порождают пространство $\mathcal{H} = \mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_{\text{ph}}$.

Одна система со спином $1/2$, которая описывается уравнением (5) вместе с ее оператором Казимира $\hat{S}^2 = (3/2)\hat{I}$, образует одну квантовую степень свободы. Одна резонаторная мода (2) образует вторую квантовую степень свободы. Гамильтониан $\hat{H}$ и оператор $\hat{M}$ описывают, таким образом, квантовую динамическую систему с двумя квантовыми степенями свободы и двумя коммутирующими постоянными. Такая картина согласуется с естественным определением квантовой *полностью интегрируемой* динамической системы. На практике гамильтониан $\hat{H}$ является точно решаемым [11] с

помощью квантового метода обратной задачи, или, что эквивалентно, алгебраического анзаца Бете [12].

Поскольку гамильтониан $\omega_0 a^\dagger a$ полностью интегрируем и описывает одну квантовую степень свободы, модельная динамическая система является интегрируемой в квантовом смысле на любом этапе движения (однако очевидно, что константы и их число изменяются в течение каждого интервала $t_i < t < t_i + t_{\text{int}}$ и $t_i + t_{\text{int}} < t < t_{i+1}$). В этом смысле модельная система (8) является *дискретно возбуждаемой* (*kicked*) спиновой системой. В таких спиновых системах может проявляться квантовый хаос [13]. Однако, как будет видно в дальнейшем, когда гамильтониан $\hat{H}$ определяется одноатомной моделью ДжК (7), квантовый хаос невозможен. Мы покажем, что по мере того как инвертированные атомы в состоянии $|e\rangle$ последовательно попадают в резонатор, система или переходит в равновесное состояние, являющееся предельным циклом (его операторной формой), к которому система была накачана атомами, или же, напротив, происходит захватывание фотонов в резонатор, при этом система вообще не достигает равновесия. Выбор между этими двумя различными видами динамики определяется тем, удовлетворяет или нет параметр gt_{int} условию “состояния захвата” (см. раздел 4). В реальном микромазере эффекты затухания и излучения черного тела обеспечивают обязательный переход системы в равновесное состояние [7, 9, 10].

Под квантовым хаосом мы понимаем квантовую динамику, при которой соответствующее s -числовое квазиклассическое предельное движение хаотично. Квазиклассический предельный переход для системы со спином S осуществляется путем устремления S к бесконечности, что происходит при добавлении многих систем спина $1/2$. Очевидно, наибольшее возможное значение S равно $(1/2)N$, где N — число двухуровневых атомов.

Для N двухуровневых атомов гамильтониан $\hat{H}$ (7) принимает вид гамильтониана модели Тевиса–Каммингса (ТК) [14]. Формально выражение (7) не изменяется, однако $S^\pm$ и S^Z теперь принимают значения в $(2S + 1) = (N + 1)$ -мерном представлении алгебры $su(2)$. Физически $S^\pm$ и S^Z принимают вид коллективных операторов N атомов (часто называемых операторами Дикке [15]):

$$S^\pm = \sum_{i=1}^N S_i^\pm, \quad S^Z = \sum_{i=1}^N S_i^Z. \quad (11)$$

Они образуют двумерные представления алгебры $su(2)$

$$[S_i^\pm, S_j^Z] = \mp \delta_{ij} S_i^\pm, \quad [S_i^+, S_j^-] = 2\delta_{ij} S_i^Z, \quad (12)$$

а коллективные операторы (11) образуют $(N + 1)$ -мерное представление.

Для N атомов имеется естественный N -атомный микромазер, в который одновременно влетают N атомов в возбужденном состоянии $|e_1\rangle|e_2\rangle \dots |e_N\rangle$. Подобные микромазеры пока не построены, и условие $T_p \gg t_{\text{int}}$ ($200 : 1$, см. выше) соблюдается в экспериментах, чтобы сделать очень малыми (порядка $t_{\text{int}} T_p^{-1} = t_{\text{int}} R \approx 1/200$) шансы появления двух атомов в резонаторе в течение времени t_{int} . Конечная вероятность того, что в резонаторе тем не менее могут быть два или более атомов в течение времени t_{int} , рассматривается как усложнение динамики [10, 16]. Возможно, что подобные устройства появятся в будущем, причем интересным моментом в динамике таких N -атомных микромазеров является то, что ТК-модели остаются полностью интегрируемыми в квантовом

смысле для произвольного $S = (1/2)N$. Они были точно решены при резонансе в [14], вне резонанса в [17] и недавно в весьма общей форме для произвольного N методом алгебраического анзаца Бете [12].

Насколько нам известно, N -атомная ТК-модель полностью интегрируема в квантовом смысле только на уровне коллективных операторов (11). Оператор числа фотонов $\widehat{M}$ коммутирует с $\widehat{H}$, даже когда S^Z и $S^\pm$ являются коллективными операторами (11). Оператор Казимира (4) при $S = (1/2)N > 1/2$ обеспечивает то, что коллективные операторы $S^\pm$ и S^Z образуют одну квантовую степень свободы. Одна выделенная мода в резонаторе дает еще одну степень свободы. Для произвольного $S = (1/2)N$ операторы $\widehat{H}$ и $\widehat{M}$ являются коммутирующими интегралами движения. С другой стороны, каждая из N систем со спином $1/2$, удовлетворяющих (12), имеет свой собственный оператор Казимира $(\widehat{S}_i)^2 = (S_i^Z)^2 + (1/2)(S_i^+ S_i^- + S_i^- S_i^+) = (1/2)(1/2 + 1)\hat{I}$, причем эти N систем, по всей видимости, определяют N квантовых степеней свободы. Вместе с одной выделенной модой имеются $2S + 1 = N + 1$ степеней свободы. Нам, однако, не удалось найти больше трех коммутирующих операторов $\widehat{S}^2$, $\widehat{M}$ и $\widehat{H}$ (см. раздел 5 и [12, 18]), и имеются свидетельства того, что уравнения движения для операторов $S_i^\pm$ и S_i^Z по отдельности не являются полностью интегрируемыми в квантовом смысле.

Модельная система, динамику которой мы изучаем в оставшейся части настоящей работы, описывается зависящим от времени гамильтонианом (8) с гамильтонианом $\widehat{H}$ в виде (7), выраженном в терминах N -атомных коллективных операторов (11).

3. ОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Для любого оператора $\hat{A}$ гейзенберговские уравнения движения имеют вид

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = -i[\hat{A}, \widehat{H}]. \quad (13)$$

Для модельной N -атомной системы (8) имеем $\widehat{H}(t) = \widehat{H}$ (см. формулу (7)) в течение каждого $t_i < t < t_i + t_{\text{int}}$. Тогда, используя (13), находим, что в течение этого времени

$$\ddot{S}^Z = -4g^2 \left(\widehat{M} + \frac{1}{2} \right) S^Z + 2g^2 (3(S^Z)^2 - S(S+1)\hat{I}), \quad (14)$$

где $\widehat{M}$ – постоянный оператор числа фотонов (9): $\widehat{M} = S^Z(t) + \widehat{N}(t)^2$. Операторы $\widehat{S}^2$, $\widehat{M}$ и $\widehat{H}$ попарно коммутируют, и замкнутые операторные уравнения движения (14) являются полностью интегрируемыми в квантовом смысле. В работе [12] с помощью алгебраического анзаца Бете были найдены решения этой системы для собственных значений и собственных состояний. В разделе 5 мы предлагаем новую лаксову пару для решения уравнения (14).

Рисунок демонстрирует некоторые свойства спектра собственных энергий: а – спектр для одной выделенной резонаторной моды; б – спектр для N резонансных атомов без учета взаимодействия с полем ($g = 0$). Этот спектр – спектр гигантского квантового

²⁾ Гейзенберговские уравнения (13) определяют пять операторных ОДУ первого порядка, их явный вид представлен ниже формулами (42): используя $[a, a^\dagger] = 1$, постоянный оператор $\widehat{M}$ и оператор Казимира (4), можно привести $\dot{S}^Z$ к виду (14) (см., например, [19]).

осциллятора при $N \rightarrow \infty$ — наблюдался в экспериментах³⁾, проводившихся в Париже в 1982 г. с микроволновыми резонаторами с сильным затуханием ($Q \sim 5 \times 10^3$) при температурах $T \approx 300^\circ \text{ К}$. При $g \neq 0$ двукратные, трехкратные, $\dots$, $(2S + 1)$ -кратные вырождения снимаются (см. рис. в), для случая $N = 2$ это показано на рис. г. При $N \rightarrow \infty$ и $g \neq 0$ система принимает вид двух связанных линейных квантовых осцилляторов. Заметим, что расстояния между уровнями на рис. г не являются типичными для квантовых интегрируемых систем, т.е. они не подчиняются распределению Пуассона [13]. Это подчеркивает тот факт, что система представляет собой два связанных *линейных* кван-

³⁾ По поводу гигантского квантового осциллятора см. ссылки в работах [12], в частности работу С. Ароша и др.

товых осциллятора при $N \rightarrow \infty$. Такая ситуация, очевидно, связана с динамикой при $N = 2$ и $N = 3$ (и, таким образом, произвольных N). Этот вопрос мы рассмотрим в разделе 6 в терминах линейных ОДУ.

Замкнутое ОДУ (14) для S^Z имеет второй порядок и является *нелинейным*. По крайней мере формально оно должно иметь решения для оператора $S^Z(t)$, выраженные через эллиптические функции Якоби. Действительно, при $t_i < t < t_i + t_{\text{int}}$ решение будет иметь вид [19]

$$S^Z(t) = \hat{A} \operatorname{cn}^2(\hat{\nu}(t - t_i), k) + \hat{B}, \quad (15)$$

где $\operatorname{cn}(\nu(t - t_i), k)$ – эллиптическая функция Якоби, k – ее модуль, $\hat{A}$, $\hat{B}$ и $\hat{\nu}$ – попарно коммутирующие операторы, коммутирующие также с $\hat{H}$ при $S = (1/2)N \geq 1/2$ и $\hat{A} + \hat{B} = S^Z(t_i)$. Мы вернемся к этому операторному решению в разделе 7 при окончательном обсуждении квантового хаоса в N -атомном микромазере. Но сначала в разделах 4 и 6 мы получим операторные решения, сильно отличающиеся от решения (15).

4. МАЗЕРНЫЕ РЕШЕНИЯ ПРИ $N = 1$

При $N = 1$ ($S = 1/2$) мы имеем $S(S + 1)\hat{I} = (3/4)\hat{I}$, откуда с учетом уравнения (6) следует, что в двумерном представлении нелинейный член в (14) исчезает, в результате получаем

$$\ddot{S}^Z = -4g^2 \left(\hat{M} + \frac{1}{2} \right) S^Z. \quad (16)$$

Это *линейное* операторное ОДУ второго порядка, однако нелинейное условие (6) действует по-прежнему. Оператор $\hat{M} = \hat{M}(t) \equiv S^Z(t) + \hat{N}(t)$ коммутирует с $S^Z(t)$ при равных временах и также коммутирует с $\hat{H}$ при всех t в интервале $t_i < t < t_i + t_{\text{int}}$. Поэтому $\hat{M} = S^Z(t_i) + \hat{N}(t_i)$ коммутирует с $S^Z(t)$.

Можно ожидать, что “очевидное” решение операторного уравнения (16) будет иметь вид

$$S^Z(t) = S^Z(t_i) \cos \hat{D}\tau + \dot{S}^Z(t_i) \hat{D}^{-1} \sin \hat{D}\tau, \quad (17)$$

где $\tau \equiv t - t_i$, $0 < \tau < t_{\text{int}}$ и

$$\hat{D} \equiv 2g \left[\hat{N}(t_i) + S^Z(t_i) + \frac{1}{2} \right]^{\frac{1}{2}} \equiv 2g \left[\hat{I} \otimes \hat{N}(t_i) + S^Z(t_i) \otimes 1 + \frac{1}{2} \hat{I} \otimes 1 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (18)$$

Из гейзенберговских уравнений следует уравнение

$$\dot{S}^Z(t_i) = ig(a^\dagger(t_i)S^-(t_i) - a(t_i)S^+(t_i)), \quad (19)$$

которое является самосопряженным. Более того, $S^Z(t_i)$ является самосопряженным, а $S^Z(t_i)$ и $\dot{S}^Z(t_i)$ коммутируют с $\hat{M}$ и $\hat{D}$ (для $\dot{S}^Z(t_i)$ из (19) это можно проверить, используя двумерное представление $su(2)$ в виде (5)). Следовательно, выражение (17) для $S^Z(t)$ является самосопряженным, как и требовалось. Однако $S^Z(t_i)$ и $\dot{S}^Z(t_i)$ *антикоммутируют*:

$$S^Z(t_i)\dot{S}^Z(t_i) + \dot{S}^Z(t_i)S^Z(t_i) = 0, \quad (20)$$

и этого свойства достаточно для удовлетворения условия (6). В разделе 6 мы покажем, что свойства такого типа можно распространить и на $N > 1$, однако пока еще не вполне

ясно, почему (хотя условие (6), разумеется, используется в (14) для получения уравнения (16)).

На основании (17)⁴) можно ожидать, что решения будут осциллирующими. Пока решение (17) является формально периодичным относительно операторного аргумента $\hat{D}\tau$. Однако это утверждение имеет смысл только в терминах физических величин, подобных среднему значению $\langle |S^Z(t)| \rangle$ оператора $S^Z(t)$, где $| \rangle$ – начальное состояние (при $t = t_i$), или в терминах наблюдаемых операторов $S^Z(t)$, например его собственных значений. Поскольку $S^Z(t)$ – самосопряженный оператор, он является наблюдаемой динамической переменной в смысле Дирака. Его наблюдаемые являются его собственными значениями, и поэтому мы исследуем собственные состояния оператора $S^Z(t)$.

Для отдельных атомов, входящих в резонатор в состоянии $|e\rangle$ (спин вверх), имеем

$$S^Z(t_i)|e\rangle = \frac{1}{2}|e\rangle. \quad (21)$$

Но $S^Z(t_i)$ зависит от $\hat{M}$, который действует на пространстве $\mathcal{H} = \mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_{ph}$. Нам, таким образом, требуется равенство

$$(S^Z(t_i) \otimes 1)|e\rangle|n\rangle = \frac{1}{2}|e\rangle|n\rangle, \quad (22)$$

и состояние $|e\rangle|n\rangle$ является, следовательно, собственным состоянием при $t = t_i$. Тогда для периодичности с предполагаемым периодом t_{int} нам нужно, чтобы $|e\rangle|n\rangle$ было также собственным состоянием при $t = t_i + t_{int}$. Однако

$$S^Z(t_i + t_{int}) = S^Z(t_i) \cos(\hat{D}t_{int}) + \dot{S}^Z(t_i) \hat{D}^{-1} \sin(\hat{D}t_{int}), \quad (23)$$

при этом из (22) следует, что второе слагаемое в правой части индуцирует опрокидывания спина, если только само не обращается в нуль. Последнее имеет место, когда

$$t_{int} \hat{D}|e\rangle|n\rangle = 2r\pi|e\rangle|n\rangle, \quad (24)$$

где r – целое. Это означает, что n – целый корень n_0 уравнения (условия захвата)

$$gt_{int} \sqrt{n_0 + 1} = r\pi, \quad (25)$$

(см. работы [7, 9, 10, 19 и ссылки в них]⁵). Поскольку рациональные числа образуют плотное множество, существует счетное бесконечное множество пар целых чисел (n_0, r) таких, что $r\pi \sqrt{n_0 + 1}$ находится в наперед заданной произвольно малой окрестности любой данной величины gt_{int} . Поэтому, допуская вольность речи, мы говорим, что состояния захвата плотны около gt_{int} [20].

Теперь мы видим, что если $|n\rangle$ является состоянием захвата, то система находится в состоянии $|e\rangle|n_0\rangle$ в моменты t_i и $t_i + t_{int}$, а в течение времени $t_i < t < t_i + t_{int}$ движение подчиняется условиям (6) и $S^Z|e\rangle|n_0\rangle = +(1/2)|e\rangle|n_0\rangle$ $r - 1$ раз. При $t = t_i + t_{int}$ мы

⁴) Решения для операторов $S^\pm(t)$ приведены в работе [19].

⁵) Состояния захвата $|n_0\rangle$ получаются, например, при $n_0 = 1$, $gt_{int} = \pi/\sqrt{2}$ ($|n_0\rangle$ – однофотонное состояние); $n_0 = 2$, $gt_{int} = \pi/\sqrt{3}$ ($|n_0\rangle$ – двухфотонное состояние); $n_0 = 3$, $gt_{int} = \frac{1}{2}\pi$ и т. д. Кроме того, если $|n_0\rangle$ является состоянием захвата, то $|n\rangle$ – также состояние захвата, если $n = h^2(n_0 + 1) - 1$, h – целое > 0 , так что $|3\rangle, |15\rangle, |35\rangle, |63\rangle, \dots$ являются состояниями захвата.

снова имеем $S^Z|e\rangle|n_0\rangle = +(1/2)|e\rangle|n_0\rangle$, и атом, входящий в резонатор в состоянии $|e\rangle$, выходит из него тоже в состоянии $|e\rangle$ (т. е. он был бы детектирован в состоянии $|e\rangle$, если он вообще детектируется [7]). Тогда в течение времени $t_i + t_{\text{int}} < t < t_{i+1}$ пустому резонатору соответствует гамильтониан $\hat{H} = \omega_0 \hat{N}$ и состояние $|n_0\rangle$ переходит в состояние, отличающееся от $|n_0\rangle$ фазой. Таким образом, имеется стационарное состояние, когда атомы входят в резонатор в состоянии $|e\rangle$ в момент времени t_i , это состояние есть $|e\rangle|n_0\rangle$. Состояние $|e\rangle|n_0\rangle$, соответствующее моменту времени $t_i + t_{\text{int}}$, когда атомы покидают резонатор, есть $|n_0\rangle$ (с точностью до фазы) в течение времени $t_i + t_{\text{int}} < t < t_{i+1}$, и оно снова есть $|e\rangle|n_0\rangle$ (с точностью до фазы), когда следующий атом входит в резонатор в момент времени t_{i+1} . Такое состояние, таким образом, является *стационарным* для всех t_i , $i = 1, 2, \dots, N_a$.

Более того, можно показать, что при накачке атомами, входящими в резонатор в состоянии $|e\rangle$, n устремляется (снизу) к n_0 [9, 10, 19]. Интересно также рассмотреть атомы, входящие в резонатор в состоянии $|g\rangle$, а не в состоянии $|e\rangle$. В этом случае $|n\rangle \rightarrow |n_0 + 1\rangle$ (случай отрицательной накачки, когда фотоны поглощаются в резонаторе лазера, пока не достигается состояние $|n_0 + 1\rangle$). “Нисходящее” состояние захвата $|n_0 + 1\rangle$ удовлетворяет уравнению (25), и поэтому n является корнем уравнения $gt_{\text{int}}\sqrt{n} = r\pi$ для “нисходящих” состояний захвата $|n\rangle$ [19]. Более того, n теперь стремится к $n_0 + 1$ сверху [10, 19].

Теперь мы видим, что при $N = 1$ и положительной накачке движение является стационарным (см. (6)), при $t_i < t < t_i + t_{\text{int}}$ собственные состояния $S^Z(t)$ осциллируют r раз, при этом $|n\rangle$ стремится к $|n_0\rangle$ при $t = t_i$: если $|e\rangle$ переходит в $|g\rangle$ r раз, то $|n_0\rangle \rightarrow |n_0 + 1\rangle$ тоже r раз; тогда в течение времени $t_i + t_{\text{int}} < t < t_{i+1}$ имеем $|n_0\rangle \rightarrow |n_0\rangle$ с точностью до фазы, и это является стационарным ($N = 1$)-атомным мазерным решением (то же самое происходит в случае отрицательной накачки, когда каждый атом входит в резонатор в состоянии $|g\rangle$). Возникает вопрос, имеется ли подобное мазерное решение для ($N > 1$)-атомного микромазера, когда атомы входят в резонатор, находясь в возбужденных состояниях $|e_1\rangle|e_2\rangle \dots |e_N\rangle$.

Этот вопрос частично является предметом рассмотрения в разделе 6, где мы приводим новые явные операторные решения для $N = 2$ и $N = 3$ и показываем, что при $N = 2$ система ведет себя как мазер при выполнении условия захвата, полностью аналогичного условию (25). Кроме того, если условие захвата (25) не выполнено, динамические системы при таких значениях N , по всей видимости, ведут себя так же, как и при $N = 1$. В частности, при $N = 1$, а в действительности для любых N состояния захвата счетно плотны около gt_{int} , при этом имеется множество значений gt_{int} довольно большой меры, для которого условие захвата не выполнено. Для атомов, входящих в резонатор в состоянии $|e\rangle$ (положительная накачка, $N = 1$), система должна продолжать эволюционировать: никакого стационарного предельного цикла не достигается, и резонатор лазера должен продолжать принимать фотоны. Отметим, что даже плотные около gt_{int} состояния захвата могут включать очень большое число фотонов n_0 ; тогда предельный цикл достигается очень медленно. В случае отрицательной накачки, если условие захвата (25) не удовлетворяется ни для каких $n_0 > 0$, система атомов продолжает поглощать фотоны, пока в резонаторе не будет достигнуто вакуумное состояние. Это состояние $|0\rangle$ является нисходящим состоянием захвата. В реальном микромазере из-за затухания в резонаторе и излучения черного тела не возникает подобной эволюции.

онной динамики, альтернативной стационарной динамике состояний захвата: система движется к равновесию, которое, однако, не является осциллирующим (атомы, входящие в резонатор в состоянии $|e\rangle$, покидают его не в состоянии $|e\rangle$ [7]).

В следующем разделе мы построим *операторную* пару Лакса для уравнения (14). Этот новый результат указывает способ отыскания операторных решений для любых N , но в момент написания статьи эти решения еще не были получены.

5. N -АТОМНЫЕ МОДЕЛИ ТЕВИСА–КАММИНГСА

Рассмотрим общую нерезонансную ТК-модель (7), где $\Delta \equiv \omega_0 - \omega$ – расстройка, а S^Z и $S^\pm$ – коллективные операторы (11). Мы измеряем ω и ω_0 в единицах g , так что при $g = 1$ гамильтониан равен $\omega \hat{M} + \Delta S^Z + a^\dagger S^- + S^+ a$, где $\hat{M} = a^\dagger a + S^Z$. Определим

$$\hat{H} \equiv \Delta S^Z + a^\dagger S^- + S^+ a. \quad (26)$$

Тогда гамильтониан ТК-модели (при $g = 1$) равен $\omega \hat{M} + \hat{H}$.

Для того чтобы изучать ТК-модель в рамках алгебраического подхода, определим операторы [21]

$$X^Z(\lambda) = \frac{S^Z}{\epsilon - \lambda}, \quad X^\pm(\lambda) = \frac{S^\pm}{\epsilon - \lambda}, \quad t, \lambda \in C. \quad (27)$$

Из того что операторы S^Z , $S^\pm$ образуют алгебру $su(2)$, следует, что операторы (27) удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры петель

$$\begin{aligned} [X^+(\lambda), X^-(\mu)] &= \frac{2}{\lambda - \mu} (X^Z(\lambda) - X^Z(\mu)), \\ [X^Z(\lambda), X^\pm(\mu)] &= \pm \frac{1}{\lambda - \mu} (X^\pm(\lambda) - X^\pm(\mu)), \\ [X^+(\lambda), X^+(\mu)] &= [X^-(\lambda), X^-(\mu)] = [X^Z(\lambda), X^Z(\mu)] = 0, \end{aligned} \quad (28)$$

где $\mu, \lambda \in C$. В самом деле, используя соотношение

$$\frac{1}{(\epsilon - \lambda)(\epsilon - \mu)} = \frac{1}{(\lambda - \mu)} \left(\frac{1}{\epsilon - \lambda} - \frac{1}{\epsilon - \mu} \right), \quad (29)$$

получаем

$$\begin{aligned} [X^+(\lambda), X^-(\mu)] &= \frac{1}{(\epsilon - \lambda)(\epsilon - \mu)} [S^+, S^-] = \\ &= \frac{2}{(\lambda - \mu)} \left(\frac{S^Z}{\epsilon - \lambda} - \frac{S^Z}{\epsilon - \mu} \right). \end{aligned} \quad (30)$$

Одно представление алгебры (28) имеет вид

$$X^Z(\lambda) = \frac{1}{2}(\Delta - \lambda), \quad X^+(\lambda) = a^\dagger, \quad X_-(\lambda) = a, \quad [a, a^\dagger] = 1.$$

Другое представление имеет вид

$$\begin{aligned} X^Z(\lambda) &= \frac{1}{2} \left(\Delta - \lambda + \frac{S^Z}{\epsilon - \lambda} \right), \\ X^+(\lambda) &= a^\dagger + \frac{S^+}{\epsilon - \lambda}, \quad X^-(\lambda) = a + \frac{S^-}{\epsilon - \lambda}. \end{aligned} \quad (31)$$

По виду оператора Казимира алгебры $su(2)$ определим производящую функцию (генератор интегралов движения)

$$t(\lambda) = (X^Z(\lambda))^2 + \frac{1}{2}(X^+(\lambda)X^-(\lambda) + X^-(\lambda)X^+(\lambda)). \quad (32)$$

Тогда

$$\begin{aligned} [t(\lambda), X^Z(\mu)] &= \frac{1}{\lambda - \mu} \{X^-(\lambda)X^+(\mu) - X^-(\mu)X^+(\lambda)\}, \\ [t(\lambda), X^\pm(\mu)] &= \frac{2}{\lambda - \mu} \{X^\pm(\lambda)X^Z(\mu) - X^\pm(\mu)X^Z(\lambda)\}. \end{aligned} \quad (33)$$

При этом

$$[t(\lambda), t(\mu)] = 0, \quad \lambda, \mu \in C. \quad (34)$$

Очевидно, что $t(\lambda)$ позволяет определить гамильтонианы. Действительно, подставляя представление (31) в (32) при $\epsilon = 0$, получаем

$$t(\lambda) = \lambda^{-2}\widehat{S}^2 + \lambda^{-1}\widehat{H} + \left(\frac{1}{4}\Delta^2 + \frac{1}{2} + \widehat{M}\right) - \frac{1}{2}\Delta\lambda + \frac{1}{4}\lambda^2. \quad (35)$$

Уравнение (34) означает, что $\widehat{H}$, $\widehat{M}$ и $\widehat{S}^2$ попарно коммутируют, при этом

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left[t(\lambda), \frac{t(\nu + \delta) - t(\nu)}{\delta} \right] = 0 \quad (36)$$

и, следовательно, $[t(\lambda), t'(\mu)] = 0$.

Как объяснялось в разделе 2, наличие трех коммутирующих операторов $\widehat{H}$, $\widehat{M}$ и $\widehat{S}^2$ означает, что ТК-модель полностью интегрируема. Действительно, $\widehat{S}^2 = S(S+1)\hat{I}$ сводит алгебру $su(2)$ к одной квантовой степени свободы, а $a, a^\dagger$ определяют вторую. Тогда $[\widehat{H} + \widehat{M}, \widehat{M}] = 0$ и имеются два коммутирующих постоянных оператора $\widehat{H} + \widehat{M}$ и $\widehat{M}$. Из (35) имеем

$$\begin{aligned} \widehat{H} &= -\frac{d}{d\lambda}\lambda^2 t(\lambda) \Big|_{\lambda=0}, \\ \widehat{M} &= \frac{1}{2}\frac{d^2}{d\lambda^2}\lambda^2 t(\lambda) \Big|_{\lambda=0} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\Delta^2, \end{aligned} \quad (37)$$

что позволяет предположить существование только этих *двух* независимых коммутирующих постоянных операторов $\widehat{M}$ и $\widehat{H}$ [18].

Эти результаты дают алгебраическое описание ТК-моделей. В работах [12] уравнения (37) получены иначе, а также с помощью анзаца Бете. Теперь в том же алгебраическом духе мы рассмотрим L -оператор для пары Лакса. Положим в представлении (31) $\epsilon = 0$ и примем, что

$$L = \begin{bmatrix} -X^Z(\lambda) & X^+(\lambda) \\ X^-(\lambda) & X^Z(\lambda) \end{bmatrix}, \quad L_1 = L \otimes \hat{I}_2, \quad L_2 = I_1 \otimes L, \quad (38)$$

где $I_{1,2}$ — единичные операторы. Тогда L_1 нетривиально действует в первом пространстве, а L_2 — во втором. Найдем *классическое* сплетающее соотношение [12, 22, 23] для *операторнозначных* объектов L_1 и L_2 :

$$[L_1(\lambda), L_2(\mu)] = [r(\lambda, \mu), L_1(\lambda) + L_2(\mu)], \quad r(\lambda, \mu) = \frac{1}{\lambda - \mu} \Pi, \quad (39)$$

где Π – четырехмерная “матрица перестановки”

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left(I_1 \otimes I_2 + \sum_{i=x,y,z} \sigma^i \otimes \sigma^i \right). \quad (40)$$

Таким образом, $r(\lambda, \mu)$ – обычная рациональная s -числовая “малая r -матрица” [22, 23]. Она действует в тензорном произведении $C^2 \otimes C^2$ двух двумерных векторных пространств. *Классические* соотношения Янга–Бакстера (ЯБ) в $C^2 \otimes C^2 \otimes C^2$

$$[r_{13}(\lambda, \nu), r_{23}(\mu, \nu)] + [r_{12}(\lambda, \mu), r_{13}(\lambda, \nu) + r_{23}(\mu, \nu)] = 0 \quad (41)$$

являются переформулировкой тождества Якоби для L_i .

Для гамильтониана (26) гейзенберговские уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} i\partial_t S^Z &= S^+ a - a^\dagger S^-, \\ i\partial_t S^- &= \Delta S^- - 2S^Z a, \\ i\partial_t a^\dagger &= -S^+. \end{aligned} \quad (42)$$

Имеются еще два эрмитово-сопряженных выражения. Эти пять уравнений эквивалентны уравнению

$$\partial_t L(\lambda) = i[\hat{H}, L(\lambda)], \quad (43)$$

поскольку (42) получаются путем сравнения степеней λ в (43). Теперь можно привести (43) к лаксову виду

$$\partial_t L(\lambda) = i[A(\lambda), L(\lambda)], \quad (44)$$

где $A(\lambda)$ – операторнозначная (2×2) -матрица. Мы получили искомое операторное описание уравнения (14) в терминах пар Лакса.

Воспользуемся соотношением

$$[t(\mu), L(\lambda)] = \frac{1}{\mu - \lambda} [L(\mu), L(\lambda)]. \quad (45)$$

Заметим, что $\text{Tr } L(\lambda) = 0$ и $(1/2) \text{Tr } L^2(\lambda) = t(\lambda)$. Тогда

$$2[t(\mu), L(\lambda)] = \text{Tr}_1 [L_1^2(\mu), L_2(\lambda)], \quad (46)$$

где $\text{Tr}_1 A \otimes B \equiv (\text{Tr } A)B$. Из классического сплетающего соотношения (39) имеем

$$\begin{aligned} \text{Tr}_1 [L_1^2(\mu), L_2(\lambda)] &= \text{Tr}_1 \{ L_1(\mu) [L_1(\mu), L_2(\lambda)] + [L_1(\mu), L_2(\lambda)] L_1(\mu) \} = \\ &= \text{Tr}_1 [(L_1(\lambda) r(\mu, \lambda) + r(\mu, \lambda) L_1(\lambda)), L_2(\mu)], \end{aligned} \quad (47)$$

поскольку $\text{Tr } L = 0$, $r \propto \Pi$, и, следовательно, $r^2 \propto E \equiv I_1 \otimes I_2$. Однако

$$\begin{aligned} \text{Tr}_1 L_1(\lambda) r(\mu, \lambda) &= \frac{1}{2(\mu - \lambda)} \sum_{i=1}^4 (\text{Tr } L(\lambda) \sigma^i) \sigma^i = \frac{1}{2(\mu - \lambda)} \sum_{i=1}^4 \sigma^i (\text{Tr } \sigma^i L(\lambda)) = \\ &= \text{Tr}_1 r(\mu, \lambda) L_1(\lambda) = \frac{1}{\mu - \lambda} L(\lambda). \end{aligned} \quad (48)$$

Следовательно,

$$[t(\mu), L(\lambda)] = \frac{1}{\mu - \lambda} [L(\mu), L(\lambda)], \quad (49)$$

откуда

$$A(\lambda) = -\operatorname{Res}_{\mu=0} \frac{1}{\mu - \lambda} L(\mu) = -\frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} -S^Z & S^+ \\ S^- & S^Z \end{pmatrix}. \quad (50)$$

Из выражения (35) имеем $\hat{H} = -\operatorname{Res}_{\mu=0} t(\mu)$ и

$$[\hat{H}, L(\lambda)] = -\operatorname{Res}_{\mu=0} \frac{1}{(\mu - \lambda)} [L(\mu), L(\lambda)]. \quad (51)$$

С учетом (43) из уравнения (51) следует

$$\partial_t L(\lambda) = -i \operatorname{Res}_{\mu=0} \frac{1}{(\mu - \lambda)} [L(\mu), L(\lambda)] = i[A(\lambda), L(\lambda)], \quad (52)$$

что представляет собой искомую пару Лакса (44), а $A(\lambda)$ определяется соотношением (50).

Система (42) из пяти дифференциальных уравнений первого порядка сводится к ОДУ второго порядка (14) для S^Z , и аналогично получаются уравнения для S^+ и $a^\dagger$. Например, при $N = 1$ имеем

$$\ddot{S}^+ = 2i(\omega_0 + 2\hat{C})\dot{S}^+ - [\omega_0(\omega_0 + 2\hat{C}) - g^2]S^+, \quad (53)$$

где

$$\hat{C} \equiv g(S^+ a + a^\dagger S^-), \quad (54)$$

а также формально идентичное уравнение для $a^\dagger$ [19]. Вместе с сопряженными, таким образом, имеются пять замкнутых ОДУ второго порядка для S^Z , $S^\pm$, $a^\dagger$ и a , что соответствует пяти связанным операторным ОДУ первого порядка в виде пары Лакса (44) с (50). При $N = 1$ имеем $\hat{C}^2 = g^2(\hat{M} + \frac{1}{2}\hat{I})$. Вообще говоря, $\hat{C}$ представляет собой интеграл движения, функционально зависящий от $\hat{M}$; он появится снова в разделе 6 для случаев $N = 2$ и $N = 3$.

В принципе лаксова формулировка (44), (50), по-видимому, указывает путь к получению полного набора операторных решений для всех пяти операторов $S^\pm(t)$, $S^Z(t)$, $a^\dagger(t)$ и $a(t)$, для всех t в интервале $t_i < t < t_i + t_{\text{int}}$ и для данных начальных условий при t_i . Мы не следовали (и не пытались следовать) по этому пути, вместо этого в следующем разделе мы избрали способ действий, очевидно подходящий для всех N , который обобщает способ решения для $N = 1$, полученный в разделе 2. Из дальнейшего будет ясно, что конкретные решения, полученные в разделе 6 для $N = 2$ и $N = 3$, сами по себе поднимают вопросы о реальном приложении предложенного здесь метода для нахождения любых решений в лаксовой формулировке для любых N .

Заметим, что теперь имеется простой вывод s -числовой пары Лакса для s -числовых уравнений движения, получаемых в квазиклассическом пределе для любого N из пяти гейзенберговских операторных уравнений движения. Согласно уравнениям (44), (50) эта квазиклассическая s -числовая система имеет вид

$$\begin{aligned} \partial_t L(\lambda) &= [A(\lambda), L(\lambda)], \\ A(\lambda) &= \frac{-i}{\lambda} \begin{bmatrix} -S^Z & S^+ \\ S^- & S^Z \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (55)$$

где c -числовые динамические переменные $S^\pm, S^Z, a^*$ и a в $A(\lambda)$ и $L(\lambda)$ теперь удовлетворяют алгебрам Пуассона–Ли, соответствующим алгебре Ли $su(2)$ и алгебре Гейзенберга–Вейля (см. раздел 7).

6. НЕПОСРЕДСТВЕННЫЕ ЛИНЕАРИЗАЦИИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Лаксовы формулировки являются линеаризациями, которые в c -числовых случаях лежат в основе, например, классического метода обратной задачи для нахождения решений. Другая линеаризация для $N = 1$ была получена в разделе 4. Там нелинейное операторное ОДУ для $S^Z(t)$ (14), очевидно являющееся ОДУ второго порядка, сводилось к линейному ОДУ второго порядка (16), однако с нелинейным условием (6). В редуцированном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_a$ это условие полностью описывает движение атома, хотя состояние $|n\rangle$ переходит в состояние захвата $|n_0\rangle$ и движение в $\mathcal{H} = \mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_{\text{ph}}$ переходит в предельный цикл, *проекция* которого на $\mathcal{H}_a$ определяется условием (6). Нет очевидной причины, по которой подобную линеаризацию для $N = 1$ нельзя распространить на случаи $N = 2, N = 3$ и т.д. Мы покажем, что это действительно можно сделать для $N = 2$ и $N = 3$ и, по-видимому, для всех N . Однако для каждого следующего N анализ становится все более сложным, и хотя оказывается, что существует линейное операторное ОДУ порядка $N + 1$ для каждого значения N , общего анализа для произвольного N мы не провели.

При $N = 2$ мы используем соотношение

$$[S^Z, S^+a - a^\dagger S^-] = a^\dagger S^- + S^+a \equiv \widehat{C}. \quad (56)$$

С точностью до множителя g это оператор $\widehat{C}$, определяемый уравнением (54). Более того, поскольку мы, как и в случае $N = 1$ в разделе 4, исследуем систему в резонансе, то $\Delta = 0$, а $\widehat{C}$ – это оператор, который в предыдущем разделе мы называли $\widehat{H}$ (при $g = 1$). Полный гамильтониан, таким образом, дается гамильтонианом ТК-модели при резонансе, он равен $\omega_0 \widehat{M} + g\widehat{C}$ при $g \neq 1$.

Из гамильтониана ТК и условия резонанса $\Delta \equiv \omega_0 - \omega \equiv 0$ мы нашли соотношение (19) для уравнения (14). При $N = 1$ имеем $S = (1/2)N = 1/2$, и (14) является уравнением “линейного осциллятора” (16) с условием (6). При $N = 2$ имеем $S = 1$, тогда (14) принимает вид

$$\ddot{S}^Z(t) = -4g^2 \left(\widehat{M} + \frac{1}{2} \right) S^Z + 2g^2 [3(S^Z)^2 - 2\hat{I}]. \quad (57)$$

Следовательно,

$$\ddot{S}^Z(t) = -4g^2 \left(\widehat{M} + \frac{1}{2} \right) \dot{S}^Z + 6g^2 (\dot{S}^Z S^Z + S^Z \dot{S}^Z). \quad (58)$$

Из уравнения (19) вытекает

$$\dot{S}^Z S^Z + S^Z \dot{S}^Z = ig[(a^\dagger S^- - S^+ a)S^Z + S^Z(a^\dagger S^- - aS^+)]. \quad (59)$$

Используя уравнение (56), получим

$$\dot{S}^Z S^Z + S^Z \dot{S}^Z = 2ig(a^\dagger S^- - S^+ a)S^Z - ig\widehat{C}. \quad (60)$$

Однако при $N = 2$ мы имеем $S = 1$, и в трехмерном представлении $su(2)$ из уравнений (11) и (12) получим

$$S^+(S^Z)^2 = -S^+S^Z, \quad S^-(S^Z)^2 = S^-S^Z. \quad (61)$$

Таким образом, уравнение (60) можно переписать в виде

$$\dot{S}^Z S^Z + S^Z \dot{S}^Z = 2ig\hat{C}(S^Z)^2 - ig\hat{C}. \quad (62)$$

Очевидно, что оператор $\hat{C}$, определенный формулой (56), является интегралом движения. Однако он коммутирует с $\hat{M}$ и не является функционально независимым от него. Действительно, при $N = 1$ имеем $\hat{C}^2 = \hat{M} + 1/2$ [19], тогда как при $N = 2$ находим⁶⁾ $\hat{C}(\hat{C}^2 - 4(\hat{M} + 1/2)) = 0$. Уравнение (62) является, таким образом, замкнутым нелинейным соотношением между $\dot{S}^Z(t)$ и $S^Z(t)$ и при $N = 2$ представляет собой нелинейное условие, аналогичное условию (6) для случая $N = 1$.

Из уравнений (58) и (57) мы получаем *линейное* операторное ОДУ *третьего порядка*

$$\ddot{S}^Z(t) - 2ig\hat{C}\ddot{S}^Z + 4g^2\left(\hat{M} + \frac{1}{2}\right)\dot{S}^Z - 8ig^3\left(\hat{M} + \frac{1}{2}\right)\hat{C}S^Z - 2ig^3\hat{C} = 0. \quad (63)$$

Это линейное операторное ОДУ для $N = 2$ аналогично уравнению (16) для $N = 1$ и подчинено нелинейному условию (62), аналогичному условию (6) для $N = 1$. Поскольку левая часть (62) является самосопряженной, правая часть этого равенства тоже должна быть самосопряженной. Это возможно, поскольку $\hat{C}$ является самосопряженным, а $[\hat{C}, S^Z] \neq 0$. Используя эту сопряженную форму уравнения (62), легко найти, что оператор $S^Z(t)$, являющийся самосопряженным, также удовлетворяет сопряженной форме уравнения (63).

Таким образом, мы получили коммутационные соотношения

$$[\hat{M}, \hat{C}] = [\hat{M}, S^Z] = [\hat{M}, \dot{S}^Z] = [\hat{M}, \ddot{S}^Z] = 0, \quad (64)$$

однако при этом

$$[\hat{C}, S^Z] \neq 0, \quad [\hat{C}, \ddot{S}^Z] \neq 0, \quad [\hat{C}, \ddot{S}]. \quad (65)$$

Для простоты мы используем обозначение $\hat{N} \equiv \hat{M} + 1/2$ (мы раньше писали $\hat{N} \equiv a^\dagger a$). Тогда можно ожидать, что решение линейного уравнения (63) будет иметь вид

$$S^Z(t) = (4\hat{N})^{-1} \left[\{\exp(2igt\sqrt{\hat{N}})\} \alpha_1 + \{\exp(-2igt\sqrt{\hat{N}})\} \alpha_2 + \{\exp(2ig\hat{C}t)\} \alpha_3 \right]. \quad (66)$$

Для простоты мы используем здесь временную переменную t вместо $t - t_i$, а начальные условия берутся при $t = 0$. Чтобы (66) действительно было решением, необходимо положить, что $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – операторы в фиксированный момент времени, т.е.

$$\alpha_1 = \hat{C} [4\hat{N}(\sqrt{\hat{N}} - \hat{C})]^{-1} \cdot \frac{1}{2} \left[S^Z(0) + (2ig\sqrt{\hat{N}})^{-1} \dot{S}^Z(0) - (2\sqrt{\hat{N}}(\hat{N} - \hat{C}))^{-1} \{3(S^Z(0))^2 - 2\} \right], \quad (67)$$

$$\alpha_2 = -\hat{C} [4\sqrt{\hat{N}}(\hat{N} - \hat{C})^2]^{-1} \cdot \frac{1}{2} \left[S^Z(0) - (2ig\sqrt{\hat{N}})^{-1} \dot{S}^Z(0) - (2\sqrt{\hat{N}}(\sqrt{\hat{N}} + \hat{C}))^{-1} \{3(S^Z(0))^2 - 2\} \right], \quad (68)$$

$$\alpha_3 = -[4(\hat{N} - \hat{C}^2)]^{-1} \{3(S^Z(0))^2 - 2\}, \quad (69)$$

⁶⁾ Операторный анализ для любого N будет представлен в другой публикации.

где $\cdot$ означает операторное умножение. Можно проверить, что решение (66) с операторными коэффициентами в виде (67), (68) и (69) замечательным образом удовлетворяет нелинейному условию (62)⁷⁾! Таким образом, мы имеем операторное решение уравнения (63) для $N = 2$ при условии (62).

Мы еще не полностью исследовали двухатомный микромазер в терминах всех разветвлений решения (66)–(69). Однако мы можем быстро прикинуть, как $S^Z(t)$ снова может стать периодическим решением с периодом t_{int} . Для удобства мы будем иметь дело с левым собственным состоянием $\langle e_1 | \langle e_2 | \langle n |$ оператора $S^Z(0)$, которое соответствует собственному значению $+1$. Периодические решения, переводящие это левое собственное состояние при $t = 0$ в такое же собственное состояние при $t = t_{\text{int}}$, приводят к требованию $n = n_0$, где n_0 – корень уравнения

$$gt_{\text{int}} \sqrt{n_0 + \frac{3}{2}} = r\pi \quad (70)$$

при целом r . (Заметим, что левое собственное состояние оператора $S^Z(0)$ также является левым собственным состоянием операторного множителя $(4\hat{N})^{-1}$ в решении (66): мы имеем дело с левыми собственными состояниями, только чтобы избежать действия на коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.) Не сразу очевидно, что условия захвата (70) при $N = 2$ достаточно, для того чтобы обеспечить периодичность члена $\{\exp 2igt\hat{C}\}$ в решении (66)⁸⁾. Однако, поскольку $[\hat{C}, \hat{N}] = 0$, общие собственные состояния этих двух операторов порождают пространство. Собственное значение оператора $\hat{N}$ равно $n_0 + 3/2$, и имеются три собственных состояния оператора $\hat{C}$, которые, как мы выяснили, соответствуют собственным значениям $\pm 2\sqrt{n_0 + 3/2}$, а также нулевому собственному значению. Эти результаты согласуются с указанным выше функциональным соотношением между $\hat{C}$ и $\hat{N}$, а именно $\hat{C}(\hat{C}^2 - 4\hat{N}) = 0$. Теперь мы можем выразить $\langle e_1 | \langle e_2 | \langle n_0 |$ через линейную комбинацию общих собственных состояний операторов $\hat{C}$ и $\hat{N}$, чтобы убедиться, что условие захвата (70) действительно обеспечивает периодичность с периодом t_{int} члена с оператором $\hat{C}$ в (66) и $\langle e_1 | \langle e_2 | \langle n_0 |$ при $t = 0$ действительно переходит в $\langle e_1 | \langle e_2 | \langle n_0 | \exp(2igt_{\text{int}}\hat{C}) = \langle e_1 | \langle e_2 | \langle n_0 |$ при $t = t_{\text{int}}$. Движение $S^Z(t)$ при $N = 2$ в течение времени $t_i < t < t_i + t_{\text{int}}$ в том смысле, в котором мы рассматривали его ранее при $N = 1$, управляется нелинейным условием (62). Это и есть решение (66) (записанное для времен $t - t_i$, а не для t). При $N = 2$ оно представляет собой устойчивое мазерное решение; если же условие (70) не удовлетворяется, то, как мы показали, фотоны должны просто скапливаться в резонаторе мазера точно так же, как это происходит при $N = 1$. Мы полагаем, что аналогичный анализ применим при $N = 3$ и что его также можно использовать для всех N -атомных микромазеров, в которые атомы влетают в возбужденных состояниях. Кроме того, существуют и другие системы, например такие, в которые все атомы могут влетать в основных состояниях и, вообще говоря, поглощать фотоны (как это происходит при $N = 1$) или (при $N = 2$) атомы могут влетать один в возбужденном и один в основном состоянии, и так далее.

⁷⁾Условие (62), конечно, используется для того, чтобы свести нелинейное уравнение (14) к линейному уравнению (63), как это было отмечено ранее для случая $N = 1$.

⁸⁾В работе [9] показано, что для двухатомного микромазера таких решений, видимо, не существует.

При $N = 3$ мы имеем $S = 3/2$, следовательно, уравнение (14) приобретает вид

$$\ddot{S}^Z(t) = -4g^2 \left(\widehat{M} + \frac{1}{2} \right) S^Z + 2g^2 \left[3(S^Z)^2 - \frac{15}{4} \hat{I} \right]. \quad (71)$$

Это нелинейное операторное ОДУ второго порядка линеаризуется к виду

$$\left[D^4 - \frac{10i}{3} \widehat{C} D^2 + 10 \left(\widehat{N} - \frac{1}{3} \widehat{C}^2 \right) D^2 - \frac{40i}{3} \widehat{N} \widehat{C} D + \right. \\ \left. + \left(24 \widehat{N}^2 - \frac{40}{3} \widehat{N} \widehat{C} - 24 \right) \right] S^Z - 8 \widehat{C}^2 = 0, \quad (72)$$

где $D \equiv d/d(gt)$. Ясно, что имеется очевидное решение этого ОДУ четвертого порядка, и мы вправе рассчитывать, что оно будет удовлетворять нелинейным условиям, возникающим в этом случае. Заметим, что порядок этого линейного ОДУ равен $4 = 2(3/2) + 1 = 2S + 1$, что согласуется с порядком 3 при $S = 1$ (см. уравнение (63)) и порядком 2 при $S = 1/2$ (см. уравнение (16)). Отсюда можно сделать вывод, что для каждого $N \geq 1$ имеется соответствующее линейное операторное ОДУ порядка $2S + 1 = N + 1$. Для каждого случая имеется и соответствующее нелинейное условие. Возможно, эти очевидные выводы могут быть строго доказаны с помощью пар Лакса, построенных в разделе 5.

Остается неясным, в каком смысле общее нелинейное операторное ОДУ второго порядка для $S^Z(t)$ (уравнение (14)) эквивалентно последовательности линейных ОДУ порядка $N + 1$ с соответствующими им нелинейными условиями (или в каком смысле последовательность линейных ОДУ порядка $N + 1$ эквивалентна множеству из пяти гейзенберговских операторных уравнений движения (42)). Например, сможем ли мы при $N \rightarrow \infty$ получить некоторое уравнение типа уравнения (14)?

7. КВАНТОВЫЙ ХАОС В N -АТОМНОМ МИКРОМАЗЕРЕ

Мы определяем квантовый хаос как квантовую динамику, квазиклассический предел которой является в классическом смысле хаотическим. Это поднимает дальнейшие вопросы в дополнение к уже поставленным в конце раздела 6. Каков квазиклассический предел квантовых интегрируемых систем, исследованных нами в предыдущих разделах? Каков квазиклассический предел уравнения (16) при $S = 1/2$, который должен включать квазиклассический предел условия (6)? Каков квазиклассический предел уравнения (63) с условием (62) при $S = 1$? И каков этот предел для уравнения (72), где $S = 3/2$? И так далее (по-видимому) для каждого N .

Мы должны принять, что квазиклассический предел для любой системы со спином S может быть достигнут только при $S \rightarrow \infty$. Однако тогда в каком смысле этот предел достигается последовательностью линейных ОДУ, описываемых в разделе 6?

Эти вопросы остаются открытыми. Вместо ответа на них мы примем здесь очевидную точку зрения, заключающуюся в том, что квазиклассический предел пяти гейзенберговских уравнений (42) или (43) — это пять s -числовых уравнений, описываемых парами Лакса (55). Они получаются из гамильтониана (7), взятого в квазиклассическом пределе:

$$H = \omega a^* a + \omega_0 S^Z + g(a^* S^- + S^+ a), \quad (73)$$

здесь операторы a и a^* удовлетворяют соотношениям алгебры Пуассона–Ли

$$\{N, a\} = -ia, \quad \{N, a^*\} = ia^*, \quad \{a, a^*\} = i, \quad (74)$$

где $N \equiv a^*a = aa^*$ и $\{\dots, \dots\}$ – скобки Пуассона. Аналогично $S^\pm, S^Z$ являются теперь c -числовыми величинами, удовлетворяющими соотношениям алгебры Пуассона–Ли

$$\{S^Z, S^\pm\} = \pm iS^Z, \quad \{S^+, S^-\} = 2iS^Z. \quad (75)$$

Из (74) и (75) с помощью гамильтоновых уравнений получаем точный аналог уравнений (42) при $g = 1$:

$$\begin{aligned} i\partial_t S^Z &= S^+a - a^*S^-; \\ i\partial_t S^- &= \Delta S^- - 2S^Z a; \\ i\partial_t a^* &= -S^+ \end{aligned} \quad (76)$$

(где мы выполнили такое же масштабное преобразование, как и в разделе 5), а также два сопряженных выражения, при этом $M \equiv S^Z(t) + N(t)$ коммутирует с H относительно скобок: $\{H, M\} = 0$. С учетом масштабного преобразования при $g \neq 1$ мы, таким образом, получаем аналог уравнения (14):

$$\ddot{S}^Z = -g^2(4\mu)S^Z + 2g^2[3(S^Z)^2 - S^2], \quad (77)$$

где μ является значением M . По сравнению с уравнением (14) мы заменили $4(\widehat{M} + 1/2)$ на 4μ , а $S(S+1)\hat{I}$ – на S^2 в c -числовом операторе Казимира. Хотя в предполагаемом квазиклассическом пределе $S \rightarrow \infty$, мы рассматриваем произвольные S в уравнении (77) и в операторе Казимира алгебры (75).

Вместо того чтобы следовать лаксову подходу (55) для уравнений (76) и, следовательно, уравнения (77), заметим, что нули правой части уравнения (77) являются корнями уравнения

$$-4\mu y + 2(3y^2 - S^2) = 0, \quad (78)$$

которые равны

$$y = +\frac{1}{3}\mu \pm \sqrt{\frac{1}{9}\mu^2 + \frac{1}{3}S^2}. \quad (79)$$

Устойчивый корень $y_0 < 0$ соответствует отрицательному знаку перед квадратным корнем. Имеется второй, *нестабильный* корень $y_1 > 0$, соответствующий положительному знаку перед квадратным корнем.

Очевидно (см. (15)), что c -числовое выражение

$$S^Z(t) = \alpha \operatorname{cn}^2(\nu(t - t_i), k) + \beta \quad (80)$$

представляет собой решение c -числового нелинейного ОДУ (77), если $\alpha + \beta = S^Z(t_i)$ (мы теперь используем последовательность времен t_i , $i = 1, 2, \dots, N_a$, причем $t_i < t < t_i + t_{\text{int}}$ для (формально) *квазиклассического* N -атомного микромазера). Нам также потребуются соотношения $\nu^2 = g^2\alpha k^{-2}$, $\alpha - 2k^2\alpha - 3k^2\beta = \mu k^2$ и

$$\frac{1}{2}(k^2 - 1)\alpha^2 - \alpha\beta(1 - 2k^2) + \frac{3}{2}k^2\beta^2 = -\frac{1}{2}S^2. \quad (81)$$

Из-за неустойчивой особой точки, в которой $S^Z(t)$ имеет значение y_1 (и $\dot{S}^Z(t) = 0$), решение, представляющее наибольший интерес, — это решение, для которого $k \rightarrow 1$. Это условие может быть выполнено квазиклассически, поскольку как μ , так и S^2 являются свободными положительными вещественными параметрами. Мы нашли, что c -числовое выражение

$$S^Z(t) = \alpha \operatorname{sech}^2 \nu(t - t_i) + \beta$$

является решением при $k = 1$, когда

$$\nu = 2g\mu^{\frac{1}{2}}, \quad \alpha = -\nu^2 g^{-2} = -4\mu, \quad \beta = \frac{5}{3}\mu, \quad S^2 = 5\mu^2. \quad (82)$$

Очевидно, что $S^Z(t_i) = -(7/3)\mu$. Последнее из соотношений (82) означает, что S^2 принимает большие значения, если и только если μ^2 велико, т.е. велико полное число фотонов (в квазиклассическом пределе). Решение (82) формально является периодическим, однако с бесконечным периодом. Требуется бесконечное время, для того чтобы покинуть неустойчивую точку, где неустойчивый корень y_1 уравнения (79) принимает значение $\beta = (5/3)\mu$, а затем снова вернуться в нее после обхода устойчивой точки $y_0 = -\mu$.

Заметим, что решение (80) является осциллирующим при $0 \leq k < 1$ и что эти c -числовые решения, по-видимому, соответствуют мазерным решениям операторной динамики (результат согласуется с выводами из решения (66) при $N = 2$): условие c -числовой периодичности с периодом t_{int} имеет вид

$$\nu t_{\text{int}} = 2rK(k), \quad (83)$$

где r целое (ср. с условием захвата (25)), $K(k)$ — полный эллиптический интеграл:

$$K(k) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (1 - k^2 \sin^2 \xi)^{-\frac{1}{2}} d\xi, \quad (84)$$

и (см. [24]) $\operatorname{sn}(x + 2K, k) = -\operatorname{sn}(x, k)$. При $k \rightarrow 0$ имеем $K(k) \rightarrow \pi/2$, $\operatorname{sn}(x, k) \rightarrow \cos x$ и условие (83) принимает вид $\nu t_{\text{int}} = r\pi$. Из уравнений (82) и (83) следует, что $\alpha = \mu k^2$ при $k \rightarrow 0$, так что $\nu^2 \rightarrow g^2 \mu$. Однако $\alpha \rightarrow 0$, и если $S \rightarrow 0$, то решение согласованным образом стремится к неподвижной устойчивой точке $S^Z(t) = 0$ при $k \rightarrow 0$ как $O(k^4)$, и при этом $\beta \rightarrow 0$ как $O(k^2)$.

Итак, можно сделать два вывода относительно квантового хаоса в микромазере. Во-первых, не совсем ясно, насколько c -числовые решения (80) соответствуют любым возможным операторным решениям квантовой системы, за исключением, возможно, очень больших S (т.е. очень больших N). Во-вторых, эти c -числовые решения вообще никогда не являются хаотическими!

Из раздела 4 при $N = 1$ и из раздела 6 при $N = 2$ и $N = 3$ (и предположительно для больших N , за возможным исключением некоторых очень больших N) следует, что эти линейные операторные уравнения, рассматриваемые как c -числовые уравнения в некотором квазиклассическом пределе, не способны проявить c -числовой хаос. Кроме того, хотя соответствие между этими линейными операторными уравнениями и нелинейным операторным уравнением (14) остается неясным, общий вывод должен заключаться в том, что при любых сколь угодно больших N невозможно возникновение квантового хаоса в N -атомном микромазере (а быть может, и в одноатомном микромазере, в настоящее время разрабатываемом в Гархинге).

Однако теперь нам видны дальнейшие перспективы, поскольку s -числовое уравнение (77) имеет неустойчивую особую точку. Из этой особой точки система может переходить на близкие гетероклинные орбиты. Поэтому можно ожидать, что указанное s -числовое уравнение может описывать возникновение динамического хаоса при взаимодействии с s -числовым осцилляторным управляющим полем достаточно большой амплитуды.

Заметим, что s -числовое ОДУ второго порядка – это уравнение для “интенсивности”, аналогичное уравнению для “амплитуды”, содержащему линейный член наряду с *кубическим* нелинейным членом. Решение этого нелинейного ОДУ имеет вид $A \cos(\nu(t - t_i), k) + B$ (где A, B, ν – s -числовые постоянные). Это уравнение является по существу уравнением нелинейного маятника, имеющим *две* гиперболические неустойчивые особые точки и гетероклинную орбиту между ними. Таким образом, можно ожидать, что каждое из этих s -числовых нелинейных уравнений приводится к хаосу под действием силы $F \sin(\omega t + \delta)$ при достаточно больших значениях F и подходящих резонансных ω (см., например, [25]).

Сделанные замечания позволяют предположить, что *операторное* ОДУ (14) может быть приведено к хаосу (в том смысле, что его s -числовой эквивалент приводится к классическому хаосу) через (физическое) взаимодействие “внешнего” микроволнового поля с резонатором мазера. Тогда, по-видимому, для любого числа атомов N к гамильтониану $\hat{H}$ в уравнении (7) следует добавить выражение, учитывающее взаимодействие с внешним микроволновым полем,

$$\gamma a \epsilon^*(t) e^{i\omega_0 t} + \gamma^* a^\dagger \epsilon(t) e^{-i\omega_0 t}. \quad (85)$$

Этот так называемый вынуждающий член связывает s -числовое внешнее поле $\epsilon(t) e^{i\omega_0 t}$ и его комплексно сопряженное непосредственно с квантованной резонаторной модой. Он нарушает интеграл движения $\hat{M}$, а операторное уравнение (14) приобретает операторный вынуждающий член

$$ig [\gamma \epsilon^*(t) e^{i\omega_0 t} S^-(t) - \gamma^* \epsilon(t) e^{-i\omega_0 t} S^+(t)] \quad (86)$$

($S^\pm(t)$ – операторы). Операторное уравнение (14) с вынуждающим членом (86) пока не исследовано. Но здесь снова возникает вопрос о том, как операторные уравнения типа (14) и их линеаризации (как в разделе 6) связаны с соответствующими им s -числовыми квазиклассическими пределами. Все эти вопросы остаются открытыми на данном этапе. Из-за этого остается открытым и вопрос, может ли квантовый хаос быть создан в любом микромазере, например в N -атомном микромазере при $N > 1$ или/и при возможном использовании внешнего микроволнового поля, взаимодействующего непосредственно с резонатором мазера.

Список литературы

- [1] D. Meschede, H. Walther, and G. Müller. Phys. Rev. Lett. 1985. V. 54. P. 551.
- [2] G. Rempe, H. Walther, and N. Klein. Phys. Rev. Lett. 1987. V. 58. P. 353.
- [3] G. Rempe, F. Schmidt-Kaler, and H. Walther. Phys. Rev. Lett. 1990. V. 64. P. 2783.
- [4] R. K. Bullough, N. Nayak, and B. V. Thompson. In: Recent Developments in Quantum Optics. Ed. R. Inguva. New York: Plenum Press, 1993.

- [5] *L. A. Lugiato, M. O. Scully, and H. Walther.* Phys. Rev. A. 1986. V. 36. P. 740.
- [6] *M. O. Scully and W. E. Lamb Jr.* Phys. Rev. 1967. V. 159. P. 203; *M. O. Scully, D. M. Kim, and W. E. Lamb Jr.* Phys. Rev. A. 1970. V. 2. P. 2529.
- [7] *R. R. Puri, S. A. Kumar, and R. K. Bullough.* Stroboscopic theory of atom statistics in the micromaser. Phys. Rev. A. (to be published).
- [8] *G. Rempe and H. Walther.* Phys. Rev. A. 1990. V. 42. P. 1650.
- [9] *R. R. Puri, F. Haake, and D. Forster.* J. Opt. Soc. Am. B. 1996. V. 13. P. 2689.
- [10] *R. K. Bullough et al.* In: Notions and Perspectives of Nonlinear Optics (Series in Nonlinear Optics. V. 3). Ed. O. Keller. Singapore: World Scientific, 1996. P. 10–92.
- [11] *E. T. Jaynes and F. W. Cummings.* Proc. IEEE. 1963. V. 51. P. 89.
- [12] *N. M. Bogoliubov, R. K. Bullough, and J. Timonen.* J. Phys. A. 1996. V. 29. P. 6305; *G. P. Hildred, R. R. Puri, S. S. Hassan, and R. K. Bullough.* J. Phys. B. 1984. V. 17. P. L535.
- [13] *F. Haake.* Quantum Signatures of Chaos (Springer Series in Synergetics. V. 54). Berlin: Springer, 1991.
- [14] *M. Tavis and F. W. Cummings.* Phys. Rev. 1968. V. 170. P. 379.
- [15] *R. H. Dicke.* Phys. Rev. 1954. V. 93. P. 99.
- [16] *E. Wehner, R. Seno, N. Sterpi, B. G. Engelert, and H. Walther.* Opt. Commun. 1994. V. 110. P. 653.
- [17] *K. Hepp and E. H. Lieb.* Ann. Phys. 1973. V. 76. P. 360.
- [18] *R. K. Bullough.* The one-atom micromaser: a quantum integrable nonlinear dynamical system in a far-from-equilibrium state. In: Symmetries and Integrability of Difference Equations (Proc. SIDE-II meeting, Canterbury, July 1–5, 1996). Eds. P. A. Clarkson, A. S. Fokas, and F. W. Nijhoff. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998.
- [19] *R. K. Bullough and R. R. Puri.* Quantum integrability and quantum chaos in the micromaser. In: Proc. Intl. Meeting Nonlinear Dynamics: Integrability and Chaos. Ed. M. Daniel. Singapore: World Scientific, 1999.
- [20] *A. Joshi, A. Krenid, N. Nayak, B. V. Thompson, and R. K. Bullough.* In: ICONO '95: Atomic and Quantum Optics: High Precision Measurements (Proc. SPIE 2799). Eds. S. N. Bagayev and A. S. Chirkin. Washington, 1996. P. 35–44.
- [21] *N. M. Bogolyubov.* Exactly solvable models of quantum nonlinear optics. Preprint HU-TFT-IR-96-3. Helsinki: Res. Inst. for Theor. Phys., U. of Helsinki, 1996.
- [22] *V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov, and A. G. Izergin.* Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993.
- [23] *R. K. Bullough and J. Timonen.* Quantum and classical integrable models and statistical mechanics. In: Statistical Mechanics and Field Theory. Eds. V. V. Bazhanov and C. J. Burden. Singapore: World Scientific, 1995. P. 336–414.
- [24] *Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон.* Курс современного анализа. М.: Физматгиз, 1962.
- [25] *T. Mullin.* The Nature of Chaos. Oxford: Clarendon, 1993.