Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Фальки, Ф. Магри, Г. Тондо, Редукция бигамильтоновых систем и разделение переменных: пример из иерархии Буссинеска, *ТМФ*, 2000, том 122, номер 2, 212–230

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf564>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 18:31:18

© 2000 г.

Г. Фальки*, Ф. Магри†, Г. Тондо‡

РЕДУКЦИЯ БИГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ И РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ: ПРИМЕР ИЗ ИЕРАРХИИ БУССИНЕСКА

В общих рамках стационарных потоков n -иерархий Гельфанда–Дикого обсуждается система Буссинеска со стационарным временем t_5 . Показано, каким образом аккуратное использование бигамильтоновой структуры позволяет получить множество разделенных координат для соответствующих уравнений Гамильтона–Якоби.

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что уравнение Буссинеска $u_{tt} = (1/3)(-u_{xxxx} + 4u_x^2 + 4uu_{xx})$, представленное как система уравнений первого порядка в переменных (u, v)

$$\begin{aligned} u_{t_2} &= -u_{xx} + 2v, \\ v_{t_2} &= v_x - \frac{2}{3}u_{xxx} + \frac{2}{3}uu_x, \end{aligned} \quad (1.1)$$

представляет собой член бесконечной иерархии эволюционных уравнений. Эти уравнения определяются следующим образом. На пространстве $\mathcal{M}_3$ дифференциальных операторов третьего порядка $L = \partial_x^3 + u(x)\partial_x + v(x)$ мы рассматриваем оператор $L^{1/3}$, т.е. псевдодифференциальный оператор вида

$$L^{\frac{1}{3}} = \partial + \sum_{i=1}^{\infty} q_i(u, v) \partial^{-i}, \quad (1.2)$$

удовлетворяющий условию $(L^{1/3})^3 = L$. Степени оператора $L^{1/3}$ определяют бесконечное семейство коммутативных потоков на $\mathcal{M}_3$ как

$$\frac{\partial}{\partial t_p} L = [L, (L^{\frac{p}{3}})_+], \quad (1.3)$$

*SISSA, Trieste, Italy. E-mail: falqui@sissa.it

†Dipartimento di Matematica, Università di Milano, Milano, Italy.
E-mail: magri@vmimat.mat.unimi.it

‡Dipartimento di Scienze Matematiche, Università di Trieste, Trieste, Italy.
E-mail: tondo@univ.trieste.it

где $(\cdot)_+$ – проекция на чисто дифференциальную часть псевдодифференциального оператора. *Стационарные потоки* для такой системы соответствуют подпространству операторов L , удовлетворяющих (нелинейному) соотношению $[L, L^{p/3}] = 0$ для некоторых p . В настоящей работе мы обсуждаем случай $p = 5$. Соответствующие уравнения для иерархии имеют вид

$$\begin{aligned} u_{t_5} = & -\frac{1}{9} u_{xxxxx} + \frac{5}{9} u_x u_{xx} + \frac{5}{9} u u_{xxx} + \frac{5}{3} u_{xx} v + \\ & + \frac{5}{3} u_x v_x - \frac{5}{9} u^2 u_x - \frac{10}{3} v v_x, \\ v_{t_5} = & -\frac{1}{9} v_{xxxxx} + \frac{10}{9} u_{xxx} v + \frac{20}{9} u_{xx} v_x + \frac{5}{3} u_x v_{xx} + \\ & + \frac{5}{9} u v_{xxx} - \frac{5}{3} v_x^2 - \frac{5}{3} v v_{xx} - \frac{10}{9} u v u_x - \frac{5}{9} u^2 v_x. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Легко видеть, что пространство $\mathcal{M}_3^{(5)}$ нулей поля $\partial/\partial t_5$ можно параметризовать данными Коши для двух обыкновенных дифференциальных уравнений пятого порядка от двух переменных. На таком 10-мерном многообразии рассмотрим ограничения первых *четырёх* нетривиальных потоков иерархии Буссинеска

$$\frac{\partial}{\partial t_p} L = [L, (L^{\frac{p}{3}})_+], \quad p = 1, 2, 4, 7. \quad (1.5)$$

Наша цель состоит в том, чтобы изучить бигамильтонову структуру этих уравнений и показать, как аккуратное использование таких структур позволяет явным образом получить координаты, в которых соответствующие уравнения Гамильтона–Якоби разделяются.

В разделах 2 и 3 мы показываем, что на $\mathcal{M}_3^{(5)}$ существует линейный пучок скобок Пуассона $\{F, G\}_\lambda = \{F, G\}_1 - \lambda \{F, G\}_0$, обладающий следующими свойствами.

1. Они имеют две функции Казимира $H(\lambda) = H_1 \lambda + H_2$ и $K(\lambda) = H_3 \lambda^3 + H_4 \lambda^2 + H_5 \lambda + H_6$; функции H_1 и H_3 представляют собой функции Казимира скобки $\{F, G\}_0$, а функции H_2 и H_6 – функции Казимира скобки $\{F, G\}_1$.

2. Функции H_2, H_4, H_5 и H_6 представляют собой гамильтоновы функции по отношению к скобкам Пуассона $\{F, G\}_0$ для четырех рассматриваемых векторных полей, а функции H_1, H_3, H_4, H_5 – их гамильтоновы функции относительно скобки Пуассона $\{F, G\}_1$.

3. Все эти функции находятся в инволюции по отношению ко всему пуассонову пучку.

Мы докажем, что бигамильтонова структура векторных полей (1.5) может быть использована для интегрирования уравнений движения в соответствии со следующей двухшаговой схемой.

Шаг 1. Рассмотрим поверхность уровня S_0 функций H_1 и H_3 . Это – 8-мерный симплектический лист скобки Пуассона $\{F, G\}_0$. Данные векторные поля являются касательными к S_0 , следовательно их можно ограничить на данное многообразие. Заметим, что обе скобки Пуассона $\{F, G\}_0$ и $\{F, G\}_1$ ограничиваются на S_0 с помощью редукции Марседена–Ратиу. Отсюда можно заключить, что S_0 наследует структуру Пуассона–Нийенхейса, т.е. S_0 представляет собой многообразие с симплектической формой ω

(индуцированной скобкой $\{F, G\}_0$) и с согласованным тензором Нийенхейса N (индуцированным скобкой $\{F, G\}_1$).

Шаг 2. Построим множество разделенных переменных, определенных на S_0 . Для этого мы используем координаты, введенные в работе [1] и названные координатами Дарбу–Нийенхейса. Они использовались авторами работы [2] как разделяющиеся переменные для систем типа систем Хенона–Хейлеса, полученных из стационарных потоков иерархии Кортевега–де Фриза (КдФ). В настоящей работе мы явным образом вычисляем такие координаты для стационарных потоков Буссинеска и показываем, что они являются разделяющимися переменными для уравнений Гамильтона–Якоби, ассоциированных с гамильтоновыми функциями H_2, H_4, H_5, H_6 .

На наш взгляд, эти потоки являются хорошим примером тесной связи между разделяющимися координатами и бигамильтоновой структурой солитонных уравнений. Мы выбрали для детального изучения именно эту задачу с целью показать, что такие методы могут эффективно применяться в более сложных, чем уравнение КдФ (см., например, [3–6]), случаях, относящихся к классу бигамильтоновых многообразий *максимального ранга*, обсуждавшихся в работе [7]. В соответствии с этим мы приведем вычисления вместо того, чтобы доказывать общие утверждения. Однако мы хотели бы заметить, что данные результаты не специфичны для уравнений Буссинеска. Действительно, как будет ясно из наших аргументов, они выполнены подобным же образом, *mutatis mutandis*, и для широкого класса стационарных потоков n -иерархий Гельфанда–Дикого. Подобная формализация будет рассмотрена в нашей последующей публикации.

2. ЦЕНТРАЛЬНАЯ СИСТЕМА И ЕЕ РЕДУКЦИЯ

Чтобы получить пары Лакса и гамильтоновы структуры для t_5 -стационарной системы Буссинеска ($\text{Bs}q_5$), напомним формализм Кадомцева–Петвиашвили (КП), обсуждавшийся в работах [8, 9].

Рассмотрим пространство $\mathcal{M}$ последовательностей рядов Лорана $\{H^{(k)}\}_{k=1, \dots, \infty}$ (*токов*), имеющих вид

$$H^{(0)} = 1, \quad H^{(k)} = z^k + \sum_{l \geq 1} H_l^k z^{-l}, \quad (2.1)$$

где H_l^k – скаляры. Определим на $\mathcal{M}$ семейство векторных полей следующим образом. Ассоциируем с точкой $\{H^{(k)}\}_{k=0, \dots, \infty}$ в $\mathcal{M}$ линейную оболочку $\mathcal{H}_+$ токов $H^{(k)}$

$$\mathcal{H}_+ = \langle 1, H^{(1)}, H^{(2)}, \dots \rangle, \quad (2.2)$$

являющуюся подпространством в векторном пространстве $\mathcal{H}$ рядов Лорана от формальной переменной z . Далее рассмотрим соотношения инвариантности

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_j} + H^{(j)} \right) \mathcal{H}_+ \subset \mathcal{H}_+, \quad (2.3)$$

как *определяющие уравнения* для j -го векторного поля семейства. В явном виде имеем уравнения

$$\frac{\partial H^{(k)}}{\partial t_j} = H^{(j+k)} - H^{(j)} H^{(k)} + \sum_{l=1}^k H_l^j H^{(k-l)} + \sum_{l=1}^j H_l^k H^{(j-l)}, \quad (2.4)$$

которые будем в дальнейшем называть *центральной системой* (ЦС). Она имеет следующие свойства:

коммутативность:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_j}, \frac{\partial}{\partial t_k} \right] = 0;$$

“точность”:

$$\frac{\partial}{\partial t_k} H^{(j)} = \frac{\partial}{\partial t_j} H^{(k)}.$$

Связь ЦС с обычной формулировкой КП-теории (см., например, [10, 11] и ссылки в этих работах) как системы эволюционных уравнений Лакса для псевдодифференциальных операторов Сато

$$\mathcal{Q} = \partial + \sum_{i=1}^{\infty} q_i \partial^{-i},$$

а также доказательство двух указанных выше свойств можно найти в работе [8]. Здесь мы просто напомним, что редукции КП-иерархии к n -иерархиям Гельфанда–Дикого получаются путем наложения условия

$$H^{(n)} \equiv z^n, \quad (2.5)$$

эквивалентного обычной связи $(\mathcal{Q}^n)_- = 0$. В частности, иерархия Буссинеска соответствует случаю $n = 3$.

Необходимо заметить, что на подмножестве $\mathcal{S}_n$ из множества $\mathcal{M}$, образованном точками, удовлетворяющими условию (2.5), n -е уравнение ЦС можно рассматривать как уравнение связи

$$H^{(j+n)} = z^n H^{(j)} - \sum_{l=1}^n H_l^j H^{(n-l)}, \quad (2.6)$$

из которого можно получить рекуррентные формулы для определения коэффициентов Лорана $H^{(k)}$, $k > n$, в терминах коэффициентов первых n токов. Более формально, имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Подмногообразие $\mathcal{S}_n$ является подмножеством в $\mathcal{H}_+$, определяемым уравнением*

$$z^n(\mathcal{H}_+) \subset \mathcal{H}_+, \quad (2.7)$$

т.е. множеством точек, в которых оператор умножения на $\lambda = z^n$ переводит пространство $\mathcal{H}_+$ в себя. Следовательно, $\mathcal{S}_n$ порождается первыми n токами

$$H^{(0)} \equiv 1, H^{(1)}, \dots, H^{(n-1)} \quad (2.8)$$

над пространством многочленов от λ с коэффициентами в множестве

$$\{H_{l_1}^1, H_{l_2}^2, \dots, H_{l_{n-1}}^{n-1}\}, \quad l_i \in \mathbb{N}. \quad (2.9)$$

Редуцированные уравнения движения CS_n представляют собой ограничение ЦС на $\mathcal{S}_n$.

Таблица 1

Векторное поле X_1

$$\begin{aligned}
\dot{h}_1 &= k_1 - 2h_2 \\
\dot{k}_1 &= -h_3 + h_1^2 - k_2 \\
\dot{h}_2 &= -2h_3 - h_1^2 + k_2 \\
\dot{k}_2 &= -k_3 + h_2h_1 - h_4 - h_1k_1 \\
\dot{h}_3 &= -2h_2h_1 + k_3 - 2h_4 \\
\dot{k}_3 &= -k_4 - h_1k_2 - h_5 - k_1h_2 + h_1h_3 \\
\dot{h}_4 &= -2h_5 - h_2^2 - 2h_1h_3 + k_4 \\
\dot{k}_4 &= -h_1k_3 + h_2h_1^2 - h_1h_4 + h_1^2k_1 - 2k_1h_3 - k_1k_2 - 2k_2h_2 \\
\dot{h}_5 &= 3k_5 - 2k_1k_2 - 2k_2h_2 - 2h_2h_3 - 2k_1h_3 + 2h_2h_1^2 + 2h_1^2k_1 - 6h_1h_4 \\
\dot{k}_5 &= -3k_2h_3 - k_1h_4 - h_1k_1^2 - h_2k_3 - h_2h_4 + h_2^2h_1 - k_1k_3
\end{aligned}$$

Таблица 2

Векторное поле X_2

$$\begin{aligned}
\dot{h}_1 &= -h_3 + h_1^2 - k_2 \\
\dot{k}_1 &= h_4 + h_1k_1 - h_2h_1 - 2k_3 \\
\dot{h}_2 &= -k_3 + h_2h_1 - h_4 - h_1k_1 \\
\dot{k}_2 &= -k_1^2 - h_2^2 + h_5 - h_1k_2 - 2k_4 + 2k_1h_2 \\
\dot{h}_3 &= -k_4 - h_1k_2 - h_5 - k_1h_2 + h_1h_3 \\
\dot{k}_3 &= -3k_5 - k_1k_2 + k_2h_2 - h_2h_1^2 - h_1k_3 + 2h_1h_4 - h_1^2k_1 + 3k_1h_3 - h_2h_3 \\
\dot{h}_4 &= -h_1k_3 + h_2h_1^2 - h_1h_4 + h_1^2k_1 - 2k_1h_3 - k_1k_2 - 2k_2h_2 \\
\dot{k}_4 &= h_1k_1^2 - h_2^2h_1 + h_1h_5 - 2h_1k_4 + 2k_1h_4 - 4k_1k_3 - k_2h_3 - k_2^2 \\
\dot{h}_5 &= -3k_2h_3 - k_1h_4 - h_1k_1^2 - h_2k_3 - h_2h_4 + h_2^2h_1 - k_1k_3 \\
\dot{k}_5 &= h_2k_1^2 - h_2^3 + h_2h_5 - h_2h_1k_2 - 2h_2k_4 + k_1h_2^2 - k_1^3 + k_1h_5 - \\
&\quad - h_1k_1k_2 - 2k_1k_4 - 3k_3k_2
\end{aligned}$$

Таким образом, в случае $n = 3$ в соответствии с предложением 1 степени свободы можно собрать в два набора:

$$H^{(1)} \equiv h = z + \sum_{i=1}^{\infty} h_i z^{-i}, \quad H^{(2)} \equiv k = z^2 + \sum_{i=1}^{\infty} k_i z^{-i}. \quad (2.10)$$

Мы пока все еще имеем динамическую систему с бесконечным числом степеней свободы. Чтобы получить конечномерные динамические системы, представляющие ограничение потоков на стационарные многообразия, можно заметить, что множество $\mathcal{Z}_p$ нулей p -го

векторного поля также является инвариантным подмногообразием для уравнений (2.4), так что можно ограничить потоки на *пересечения* инвариантных многообразий $\mathcal{S}_n \cap \mathcal{Z}_p$. В частности, для изучения Bs_q₅-системы мы рассмотрим пространство $\mathcal{M}_3^{(5)} = \mathcal{S}_3 \cap \mathcal{Z}_5$. Для построения ограниченных потоков заметим, что коэффициенты в разложении Лорана уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t_5} h = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t_5} k = 0 \quad (2.11)$$

дают полиномиальные уравнения для коэффициентов (h_i, k_j) , $i, j \geq 6$, которые можно решить рекуррентным способом относительно первых десяти переменных $\{h_i, k_i, i = 1, \dots, 5\}$. В соответствии с этим после такой подстановки получим систему полиномиальных векторных полей X_j , определенную на фазовом пространстве $\mathcal{M}_3^{(5)}$. Первые члены этой системы представлены в табл. 1 и 2.

3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЛАКСА И СТРУКТУРЫ ПУАССОНА

Другое следствие из предложения 1 в случае $n = 3$ заключается в том, что для каждого $j \neq 3l$ существует нетривиальная (3×3) -матрица $\mathcal{V}^{(j)}(\lambda)$, *полиномиальным образом* зависящая от λ и такая, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_j} + H^{(j)} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ h \\ k \end{bmatrix} = \mathcal{V}^{(j)}(\lambda) \begin{bmatrix} 1 \\ h \\ k \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Свойства коммутативности и “точности” ЦС приводят к представлению нулевой кривизны (или Захарова–Шабата) для ограничения ЦС на $\mathcal{S}_3$:

$$\frac{\partial}{\partial t_j} \mathcal{V}^{(k)}(\lambda) - \frac{\partial}{\partial t_k} \mathcal{V}^{(j)}(\lambda) + [\mathcal{V}^{(k)}(\lambda), \mathcal{V}^{(j)}(\lambda)] = 0. \quad (3.2)$$

Теперь легко получить задачу Лакса для Bs_q₅-системы на $\mathcal{M}_3^{(5)}$. Действительно, на стационарном многообразии поля $X_5 = \partial/\partial t_5$ мы немедленно получаем из уравнений (3.2), что *матрица Лакса* $\mathcal{V}^{(5)}(\lambda)$ удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial t_k} \mathcal{V}^{(5)}(\lambda) = [\mathcal{V}^{(k)}(\lambda), \mathcal{V}^{(5)}(\lambda)]. \quad (3.3)$$

Другими словами, на матрице $\mathcal{V}^{(5)}$ все потоки из $\mathcal{M}_3^{(5)}$ являются эволюционными уравнениями Лакса. Матрица Лакса $\mathcal{V}^{(5)}$ (вычисленная с использованием уравнения (2.6)) имеет следующий явный вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^{(5)}(\lambda) = & \lambda^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ h_2 & h_1 & 0 \\ -h_3 + k_2 & k_1 - h_2 & -h_1 \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} -k_3 & -k_2 & -k_1 \\ L_0^{2,1} & -h_2 h_1 + h_4 & -h_1^2 + h_3 \\ L_0^{3,1} & L_0^{3,2} & h_2 h_1 - h_4 + k_3 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где

$$\begin{aligned} L_0^{2,1} &= -h_1 k_2 + k_4 - k_1^2 - h_1 h_3 + h_5, \\ L_0^{3,2} &= -k_1 h_2 + h_2^2 - h_5 + 2k_4 - k_1^2, \\ L_0^{3,1} &= h_1 k_3 - 2h_1 h_4 + 3k_5 + h_2 h_1^2 - 2k_1 k_2 \\ &\quad - 2k_1 h_3 + h_1^2 k_1 - 2k_2 h_2 + h_2 h_3. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Можно заметить, что отображение $\{h_1, \dots, k_5\} \mapsto \mathcal{V}^{(5)}$ является обратимым, и, следовательно, уравнения Лакса (3.3) точно представляют Bs_q₅-систему.

Вторые члены пары Лакса для потоков X_1 и X_2 задаются уравнениями

$$\mathcal{V}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2h_1 & 0 & 1 \\ \lambda + h_2 + k_1 & h_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{V}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \lambda + h_2 + k_1 & h_1 & 0 \\ -h_3 + 2k_2 & \lambda - h_2 + 2k_1 & -h_1 \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

3.1. Гамильтоновы структуры. Важное свойство векторных полей Bs_q₅-системы состоит в том, что, кроме представления Лакса, они допускают бигамильтоново представление или формулировку Пуассона с *параметром*. Как мы видели, формулировка задачи Лакса происходит из ЦС. Пуассонову формулировку можно получить следующим образом.

Хорошо известно [12–14], что на пространстве $\mathfrak{g}[[\lambda]]$ лорановских полиномов со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ имеется семейство взаимно согласованных пуассоновых тензоров $\mathcal{P}_l$, связанных с семейством классических R -матриц

$$R_l(X(\lambda)) = (\lambda^l X(\lambda))_+ - (\lambda^l X(\lambda))_-. \quad (3.7)$$

Некоторые из них (включая соответствующие значениям $l = 0, 1$) ограничиваются на аффинное многообразие

$$\mathfrak{g}_n^A := \left\{ X \in \mathfrak{g}[[\lambda]] \mid X(\lambda) = \lambda^n A + \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i X_i \right\}, \quad (3.8)$$

где A — фиксированный элемент алгебры $\mathfrak{g}$.

Возможно, менее известным является факт, на который указывалось в работе [15], что $\mathcal{P}_0$ и $\mathcal{P}_1$ допускают дальнейшие редукции, ведущие к обобщенным мамфордовским системам. Мы хотим показать, что обсуждавшиеся в разделе 2 гамильтоновы структуры для Bs_q₅-системы, получаемые путем редукции ЦС, являются бигамильтоновой редукцией Марсдена–Ратиу (МР) пары $\mathcal{P}_0$ и $\mathcal{P}_1$. Такой выбор пуассоновой пары является отнюдь не случайным. Действительно, из бигамильтонова уравнения на $\mathfrak{g}_n^A$

$$\dot{X} = (\mathcal{P}_1 - \lambda \mathcal{P}_0) \nabla F \quad (3.9)$$

следует, что полином $X(\lambda)$ эволюционирует в соответствии с уравнением Лакса.

Напомним, что теорема о МР-редукции [16] рассматривает многообразие Пуассона $(\mathcal{M}, P)$, подмногообразие $\mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{M}$ и обобщенное пространство векторных полей (“распределение”) $D \subset T\mathcal{M}|_{\mathcal{S}}$, такие что $E = D \cap T\mathcal{S}$ представляет собой регулярное слоение с хорошим фактором $\mathcal{N} = \mathcal{S}/E$. Теорема утверждает, что пуассонов тензор P редуцируется к $\mathcal{N}$, если выполнены следующие условия:

1) функции на M , инвариантные вдоль “распределения” D , образуют пуассонову подалгебру в $C^\infty(M)$;

2) $P(D^0) \subset TS + D$, где D^0 – аннулятор D в T^*M .

Редуцированные пуассоновы тензоры можно вычислить согласно следующей схеме:

Выберем ковектор $v_n^{\mathcal{N}} \in T_n^*\mathcal{N}$.

Выберем точку $s \in \mathcal{S}$ в слое над n и поднимем $v_n^{\mathcal{N}}$ до ковектора $v_s^{\mathcal{M}} \in T_s^*\mathcal{M}$, т.е. в продолжение $\pi^*v_n^{\mathcal{N}}$, лежащее в аннуляторе D^0 “распределения” D .

Построим векторное поле $(P^{\mathcal{M}})_s v_s^{\mathcal{M}}$, ассоциированное с поднятым ковектором $v_s^{\mathcal{M}}$ посредством пуассонова тензора $\mathcal{M}$ в точке s . Теорема о МР-редукции утверждает, что вектор $(P^{\mathcal{M}})_s v_s^{\mathcal{M}}$ проецируется на $\mathcal{N}$. Проекция не зависит ни от специального выбора расширения $v_s^{\mathcal{M}}$, ни от точки s на кривой и определяет $(P^{\mathcal{N}})_n v_n^{\mathcal{N}}$.

Теорема о бигамильтоновой МР-редукции [17] рассматривает многообразие (M, P_0, P_1) , снабженное парой согласованных пуассоновых структур, т.е. *бигамильтоново многообразие*. Она является следствием теоремы о МР-редукции, вытекающим из того, что бигамильтоново многообразие допускает некоторый тип *двойного* слое-ния. Это подсказывает выбор $\mathcal{S}$ как симплектического листа пуассонова тензора P_0 и $D = P_1(\text{Ker } P_0)$. Если $\mathcal{S}$ выбирается так, что предположение регулярности теоремы о МР-редукции выполнено, то упомянутые выше условия 1 и 2 являются следствием совместности пуассоновых пар (P_0, P_1) . Более того, теорема утверждает факт приводимости всего пуассонова пучка $P_\lambda = P_1 - \lambda P_0$ и снабжает $\mathcal{N}$ бигамильтоновой структурой, которую можно вычислить в соответствии с очерченной выше процедурой.

Рассмотрим в нашей Bsq_5 -задаче редукцию пуассонова пучка $\mathcal{P}_\lambda = P_1 - \lambda P_0$, ассоциированного с R -матрицами (3.7), который определен на пространстве бесследовых (3×3) -матриц вида $X(\lambda) = \lambda^2 A + \lambda x_1 + x_0$, где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Используя форму Киллинга на $\mathfrak{sl}(3)$ и вычет по λ , можно параметризовать касательные и кокасательные векторы как матрично-значные (лорановские) полиномы:

$$\dot{X} = \lambda \dot{x}_1 + \dot{x}_0, \quad W = \frac{w_0}{\lambda} + \frac{w_1}{\lambda^2}.$$

Пуассоновы тензоры $\mathcal{P}_0$ и $\mathcal{P}_1$ имеют следующий явный вид [14]:

$$\dot{X} = \mathcal{P}_0(W) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{x}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [x_1, \cdot] & [A, \cdot] \\ [A, \cdot] & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [x_1, w_0] + [A, w_1] \\ [A, w_0] \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

$$\dot{X} = \mathcal{P}_1(W) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{x}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -[x_0, \cdot] & 0 \\ 0 & [A, \cdot] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [w_0, x_0] \\ [A, w_1] \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Прямые вычисления показывают, что матрица Лакса $\mathcal{V}^{(5)}$ вписывается в предложенную здесь схему, так что посредством бигамильтоновой МР-редукции пространство $\mathcal{M}_3^{(5)}$ снабжается пуассоновым пучком $P_\lambda = P_1 - \lambda P_0$; в координатах $(h_1, k_1, h_2, k_2, \dots, h_5, k_5)$ тензоры P_0 и P_1 имеют вид, представленный в табл. 3 и 4.

Таблица 3

Редуцированный тензор P_0

0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0
	0	0	0	0	1	0	0	0	0
		0	0	0	1	1	0	0	0
			0	1	0	0	0	0	0
				0	0	0	- h_1	- $2h_1$	- $k_1 - h_2$
					0	- h_1	- $2k_1$	- $k_1 - h_2$	- $2k_2$
						0	0	- $2h_2$	- k_2
0							0	- k_2	0
								0	0
									0

Таблица 4

Редуцированный тензор P_1 .

	0	0	-3	0	0	0	- $3h_1$	$2h_2 - k_1$	$k_1 - 2h_2$	$P^{1,10}$
		0	0	0	0	$3k_1$	0	$h_3 - h_1^2 + k_2$	$2h_3 - 2h_1^2 - k_2$	$P^{2,10}$
			0	0	$6h_1$	$3k_1$	$3h_2$	$2k_2 + 2h_3 + h_1^2$	$k_2 + 4h_3 + 2h_1^2$	$P^{3,10}$
				0	$3k_1$	$3k_2$	$3k_2$	$P^{4,8}$	$P^{4,9}$	$P^{4,10}$
					0	0	- $3h_1^2 - 3h_3$	$P^{5,8}$	$k_3 - 2h_2h_1 - 2h_4$	$P^{5,10}$
						0	- $3h_1k_1$	$P^{6,8}$	$P^{6,9}$	$P^{6,10}$
							0	$P^{7,8}$	$P^{7,9}$	$P^{7,10}$
								0	$P^{8,9}$	$P^{8,10}$
									0	$P^{9,10}$
										0

В табл. 4 элементы $P^{l,k}$ — многочлены в координатах $\{h_1, \dots, k_5\}$:

$$P^{1,10} = h_3 - 2k_2 - h_1^2,$$

$$P^{2,10} = -h_1k_1 + h_2h_1 - h_4 + 2k_3,$$

$$P^{3,10} = k_3 + h_4 - h_2h_1 + h_1k_1,$$

$$P^{4,8} = k_3 + h_4 - h_2h_1 + h_1k_1,$$

$$P^{4,9} = 2k_3 + 2h_4 - 2h_2h_1 + 2h_1k_1,$$

$$P^{4,10} = -2k_1h_2 + k_1^2 + h_1k_2 - h_5 + h_2^2 + 2k_4,$$

$$P^{5,8} = -3h_1k_1 + 2h_2h_1 + 2h_4 - k_3,$$

$$P^{5,10} = -h_1h_3 - 5h_1k_2 - 2k_1h_2 - 3k_1^2 + h_5 + k_4,$$

$$P^{6,8} = -6k_1^2 + k_1h_2 - 2h_1k_2 + k_4 - h_1h_3 + h_5,$$

$$P^{6,9} = -3k_1^2 - k_1h_2 - 4h_1k_2 + 2k_4 - 2h_1h_3 + 2h_5,$$

$$P^{6,10} = -3k_1h_3 - 8k_1k_2 - 4k_2h_2 + h_1k_3 + h_2h_3 - 2h_1h_4 + h_2h_1^2 + 3k_5 + h_1^2k_1,$$

$$\begin{aligned}
P^{7,8} &= h_2^2 + 2h_1h_3 - k_4 + 2h_5, \\
P^{7,9} &= -h_2^2 - 3h_1k_2 + 4h_1h_3 - 3k_1^2 + 4k_4 + h_5, \\
P^{7,10} &= h_1k_3 + h_1h_4 - h_2h_1^2 - h_1^2k_1 - 4k_2h_2 - 2k_1k_2 + 2k_1h_3, \\
P^{8,9} &= -4k_2h_2 - 4h_1h_4 + 2k_1h_3 - 3k_1k_2 + 3k_5 + 2h_1k_3 - 2h_2h_3, \\
P^{8,10} &= -2k_2^2 - h_1h_5 + 2h_1k_4 - 2k_2h_3 - 3k_1h_4 - 2h_1k_1^2 - h_2k_3 - \\
&\quad - h_2h_4 + 2h_2^2h_1 + 3k_1k_3, \\
P^{9,10} &= -3k_2h_3 - k_1h_4 - h_1k_1^2 - h_2k_3 - h_2h_4 + h_2^2h_1 - k_1k_3.
\end{aligned}$$

Отметим, что в случае t_4 -стационарной иерархии Буссинеска эта процедура дает пару пуассоновых структур, согласующихся с полученными в работе [18].

В соответствии с теоремой Гельфанда-Захаревича [7] гамильтоновы функции для потоков можно вычислить, если найти функции Казимира для пуассонова пучка $P_1 - \lambda P_0$. Однако, поскольку мы имеем дело с задачей Лакса со спектральным параметром, их можно также получить из коэффициентов спектральной кривой, ассоциированной с нашей задачей, т.е.

$$0 = \det(\mu - \mathcal{V}^{(5)}) = \mu^3 - \mu(H_1\lambda + H_2) - (\lambda^5 + H_3\lambda^3 + H_4\lambda^2 + H_5\lambda + H_6). \quad (3.12)$$

Явные выражения для гамильтоновых функций имеют вид

$$\begin{aligned}
H_1 &= 3k_5 - 3k_1k_2 - 3k_2h_2, \quad H_3 = -3h_1k_2 + 3k_4 - 3k_1^2, \\
H_2 &= -3k_5k_1 - h_5k_2 + h_3k_1^2 - 2h_2h_1h_4 - h_4k_3 + h_3h_2^2 - h_3h_5 - \\
&\quad - h_1k_3k_1 + h_2h_1k_3 + h_1h_3k_2 + h_1k_2^2 + 3k_1^2k_2 - k_4k_2 + 2k_2h_2k_1 + \\
&\quad + k_3^2 + h_4^2 - 2h_1^2k_4 + 2h_3k_4 - 2h_3k_1h_2 + 2h_1h_4k_1 + h_1^2h_5, \\
H_4 &= -2k_1k_4 - 2k_2h_4 + k_3h_3 - 3h_1k_5 - 2h_2h_5 + 3h_1k_1k_2 + \\
&\quad + 4h_2h_1k_2 + h_2^3 + k_1^3 - h_1h_2h_3 + h_2k_4 + h_4h_3 - h_1^2k_3 + \\
&\quad + k_1h_5 + h_1h_3k_1 - k_1h_2^2 + k_3k_2 - h_2h_1^3 - h_1^3k_1 + 2h_1^2h_4, \\
H_5 &= h_1k_1^2k_2 + h_4h_3k_1 + 3k_1k_2h_4 + 2h_2h_1^3k_1 + h_1h_5h_3 - 3h_1k_2k_4 + 3h_1k_1k_5 + \\
&\quad + h_1h_4k_3 - 2h_2k_1k_4 + k_3k_2h_2 - 3h_2h_1^2h_4 + k_2h_2h_4 - 2h_1k_4h_3 - 2h_2^2h_1k_2 - \\
&\quad - 3k_1h_1^2h_4 + 3h_2h_1k_5 + h_3k_1k_3 + h_2^2h_5 + h_5k_4 - h_5k_1^2 + h_3^2k_2 + h_2^2h_1^3 - \\
&\quad - h_1k_3^2 - k_2^2h_3 + h_1^3k_1^2 + h_2k_1^3 + h_2^2k_4 - k_1h_2^3 - 3h_4k_5 - 4k_1^2k_4 + \\
&\quad + 2h_1^2k_2^2 + 2h_1h_4^2 + k_1h_2h_5 - h_2h_3k_3 - h_2h_4h_3 + 2k_4^2 + 2k_1^4 - \\
&\quad - h_5^2 - 5h_2h_1k_1k_2, \\
H_6 &= -k_1^2k_2h_4 - h_1k_1^3k_2 - 3h_2h_1^2k_2^2 - 3k_5k_2h_3 - k_1^2h_2h_1^3 + 2k_1k_2^2h_3 + \\
&\quad + h_1^2k_1^2k_3 - k_2h_4k_4 + h_1k_2^2h_4 - h_5k_1k_4 + 2k_2^2h_2h_3 - 2k_4h_1^2k_3 + \\
&\quad + k_1^2h_2h_5 + h_1^4k_2h_2 - k_1^2k_2k_3 - 2h_1k_1h_4^2 + 2k_1h_3^2k_2 + k_1^2h_1^2h_4 - \\
&\quad - k_1^2h_3k_3 + k_4k_3k_2 + 3h_4k_1k_5 + 2k_4h_3k_3 - 2h_4h_3k_1^2 - \\
&\quad - 3h_2h_1k_1k_5 - h_1k_1k_2h_5 + h_2h_1k_2h_5 + 2h_1k_1k_2k_4 - \\
&\quad - 2k_1k_2h_2h_4 + 3h_2^2h_1k_1k_2 + h_2h_1h_3k_1^2 - 2h_2h_1h_4k_3 - h_2h_1^2k_2h_3 + \\
&\quad + 3h_2h_1^2k_1h_4 - 2h_1k_2h_3k_3 + 2h_1h_3k_1k_4 + 3h_1k_2h_4h_3 - 3h_1^2k_2h_3k_1 - \\
&\quad - k_1h_2^2k_4 + 3h_1^2k_2k_5 - k_2h_4h_5 + k_3k_2h_5 + h_2h_1k_3^2 + h_5h_1^2k_3 -
\end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned}
& -h_5h_3k_3 + h_2^2h_3k_3 - h_2h_3^2k_2 - k_1h_2^2h_5 - k_1h_2^2h_1^3 - h_1k_2^2k_3 + h_1^4k_2k_1 - \\
& -2h_1^3k_2h_4 + k_1^2h_2k_4 - h_1h_3k_1^3 + h_1^3k_2k_3 - \\
& -2h_1^2k_2^2k_1 + 3k_1^3k_4 + h_4^2k_3 - h_4k_3^2 + k_1h_5^2 - \\
& -2k_1k_4^2 + k_1^3h_2^2 - k_1^4h_2 + h_2h_1k_2k_4 - k_1h_2h_3k_3 - \\
& -h_1k_1h_5h_3 + h_1h_4k_1k_3 + k_1h_2h_4h_3 - k_1^5.
\end{aligned}$$

Прямые вычисления показывают, что имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Коэффициенты H_j характеристического многочлена матрицы Лакса $\mathcal{V}^{(5)}(\lambda)$, векторных полей (X_1, X_2, X_4, X_7) и пуассоновых тензоров P_0 и P_1 из табл. 3 и 4 удовлетворяют бигамильтоновым последовательностям, показанным на рисунке. В частности, гамильтоновы функции H_j находятся во взаимной инволюции по отношению ко всему пуассонову пучку.

Бигамильтоновы последовательности

4. МНОГООБРАЗИЯ ПУАССОНА–НИЙЕНХЕЙСА И ПРОЦЕДУРА СКЛЯНИНА

В этом разделе мы покажем, как бигамильтонову структуру Bsq₅-иерархии можно использовать, для того чтобы получить множество переменных, удовлетворяющих уравнениям Склянина для разделения переменных. Такой тип переменных возникает в действительности как множество координат, которые придают “канонический” вид структуре Пуассона–Нийенхейса (ПН), получающейся дальнейшей МР-редукцией пуассонова пучка P_λ .

4.1. Редукция пуассонова пучка. Пусть M – бигамильтоново многообразие с вырожденными пуассоновыми тензорами (P_0, P_1) , и пусть X_j – векторное поле бигамильтоновой последовательности на M . Возможный способ проанализировать интегрируемость поля X_j состоит в том, чтобы исключить функции Казимира одного из пуассоновых тензоров, например P_0 , путем фиксирования значений его функций Казимира. Конечно, P_0 можно ограничить на любом из его симплектических листов S_0 , а поля X_j , являющиеся касательными к S_0 , также можно ограничить до векторных полей $\hat{X}_j$. Эти поля все еще гамильтоновы на S_0 , при этом гамильтонианы $\hat{H}_j$ получаются путем

ограничений исходных гамильтонианов на S_0 . Однако, вообще говоря, бигамильтонова формулировка теряется при ограничении на S_0 .

Тем не менее в нашей ситуации специфические особенности пучка позволяют редуцировать бигамильтоновы структуры на любой лист S_0 пуассонова тензора P_0 общего положения. Действительно, пуассонов пучок P_λ индуцирует на S_0 ПН-структуру [12, 19]. По отношению к такой ПН-структуре поле $\hat{X}_j$ допускает формулировку, которая будет введена в разделе 5, достаточную, чтобы позволить найти множество разделяющихся переменных.

ЛЕММА. Пусть $\hat{D}$ – “распределение”, порожденное векторными полями

$$Z_1 = \frac{\partial}{\partial k_5}, \quad Z_2 = \frac{\partial}{\partial k_4} + 2 \frac{\partial}{\partial h_5}. \quad (4.1)$$

Тогда

$$L_{\phi_1 Z_1 + \phi_2 Z_2}(P_1 - \lambda P_0) = Z_1 \wedge W_1 + Z_2 \wedge W_2, \quad (4.2)$$

где $L_X P$ – производная Ли тензора P вдоль X , ϕ_1 и ϕ_2 – гладкие функции общего положения, а W_i – подходящие векторные поля (зависящие от ϕ_1 и ϕ_2).

Такое условие гарантирует, что пространство функций, аннулируемых “распределением” $\hat{D}$, в действительности является пуассоновой подалгеброй в $C^\infty(\mathcal{M}_3^{(5)})$. Более того, “распределение” $\hat{D}$ является, вообще говоря, трансверсальным к образу тензора P_0 . Следовательно, мы можем применить теорему о МР-редукции и получить следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пучок P_λ является редуцируемым к пучку $\hat{P}_\lambda$ на S_0 . Поскольку $\hat{P}_0$ обратим на S_0 , т.е. $\omega = \hat{P}_0^{-1}$ является симплектической 2-формой, S_0 допускает структуру ПН-многообразия относительно пары $(\hat{P}_0, N = \hat{P}_1 \hat{P}_0^{-1})$.

Удобный выбор координат на $\mathcal{M}$, соответствующий “распределению” $\hat{D}$, имеет вид $\{h_1, \dots, h_4, g_1 = 2k_4 - h_5, v_1 = H_1, v_2 = H_3\}$. Таким образом, можно получить редуцированные пуассоновы тензоры из тензоров P_0 и P_1 (записанных в новой координатной системе), просто удаляя по два последних ряда и столбца. Их можно представить в виде

$$\hat{P}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & h_1 & 3k_1 - h_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -h_1 & 0 & -2h_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3k_1 + h_2 & 2h_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

$$\hat{P}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & h_1 & k_1 - 2h_2 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_1 & 0 & -k_2 \\ & & 0 & 0 & -2h_1 & -k_1 & -h_2 & -k_2 \\ & & & 0 & -k_1 & -k_2 & -k_2 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & h_3 + h_1^2 & -2h_4 + k_3 + 2h_1k_1 - 2h_2h_1 \\ & & & & & 0 & h_1k_1 & 3k_1^2 - h_2k_1 \\ 0 & & & & & & 0 & g_1 - h_1k_2 - k_1^2 - h_2^2 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Тензор Нийенхейса в присоединенном представлении имеет вид

$$N^* = \begin{bmatrix} -k_1 & k_2 & k_2 & 0 & N^{1,5} & 0 & N^{1,7} & 3k_1k_2 - k_2h_2 \\ 0 & k_1 & 4k_1 & 0 & -h_1^2 + h_3 & 0 & N^{2,7} & N^{2,8} \\ -h_1 & 0 & -h_2 & k_2 & -h_3 - h_1^2 & 0 & N^{3,7} & N^{3,8} \\ 0 & 0 & 2h_1 & k_1 & 0 & 0 & h_3 + h_1^2 & N^{4,8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_1 & k_2 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_1 & 0 & k_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2h_1 & 0 & h_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -h_1 & 2h_2 - k_1 \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

где

$$\begin{aligned} N^{1,5} &= -2h_2h_1 + 2h_4 - k_3 - 2h_1k_1, & N^{1,7} &= -h_2^2 - g_1 + h_1k_2 + k_1^2, \\ N^{2,7} &= 4h_1k_1, & N^{2,8} &= -6h_2k_1 - h_2^2 + 7k_1^2 - g_1, \\ N^{3,7} &= -2h_2h_1, & N^{3,8} &= 3h_2^2 - 2h_2k_1 + g_1 - k_1^2, \\ N^{4,8} &= -2h_4 + k_3 + 2h_1k_1 - 2h_2h_1. \end{aligned}$$

Разделение переменных является результатом спектрального анализа матрицы N^* и связано с введением некоторых специальных множеств координат, которые мы рассмотрим в следующем пункте.

4.2. Координаты Дарбу–Нийенхейса и Ганкеля–Фробениуса. Пусть $(M, P_0, N = P_1 P_0^{-1})$ – ПН-многообразие размерности $2n$. В работе [1] было доказано, что если N имеет n функционально независимых собственных значений $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (иначе говоря, N *максимально*), можно ввести множество координат $(\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_n); \mu := (\mu_1, \dots, \mu_n))$, таких что P_0 и N принимают вид

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & 0 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda} & 0 \\ 0 & \mathbf{\Lambda} \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

где $\mathbf{I}$ – единичная $(n \times n)$ -матрица, а $\mathbf{\Lambda} := \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. В работе [1] было также отмечено, что когда первые n координат являются собственными значениями N , оставшиеся координаты можно построить в квадратурах. Поскольку эти координаты являются каноническими по отношению к P_0 и диагонализуют тензор Нийенхейса, о них можно говорить как о *координатах Дарбу–Нийенхейса* (ДН).

Полезно ввести другое множество координат, которое мы обозначим как $(\mathbf{f} := (f_1, \dots, f_n); \mathbf{c} := (c_1, \dots, c_n))$. Идея заключается в следующем: коэффициенты c_j минимального многочлена тензора Нийенхейса

$$(\det(\lambda - N))^{\frac{1}{2}} = \lambda^n - \sum_{i=1}^n c_i \lambda^{n-i} \quad (4.7)$$

удовлетворяют следующему замечательному свойству:

$$\begin{aligned} N^* dc_1 &= dc_2 + c_1 dc_1, \\ N^* dc_2 &= dc_3 + c_2 dc_1, \\ &\dots\dots\dots \\ N^* dc_n &= c_n dc_1. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Аналогичным образом будем искать множество дополнительных переменных $\{f_1, \dots, f_n\}$, таких что:

- 1) их дифференциалы порождают n -мерное распределение в T^*S_0 , *дополнительное* к распределению, порождаемому дифференциалами dc_i ;
- 2) они удовлетворяют тем же рекуррентным соотношениям

$$\begin{aligned} N^* df_1 &= df_2 + c_1 df_1, \\ N^* df_2 &= df_3 + c_2 df_1, \\ &\dots\dots\dots \\ N^* df_n &= c_n df_1. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Характерной особенностью координат $(\mathbf{f}; \mathbf{c})$ является то, что P_0 и N^* принимают матричный вид

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{H} \\ -\mathbf{H}^T & 0 \end{bmatrix}, \quad N^* = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & 0 \\ 0 & \mathbf{F} \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

где

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 1 & -c_1 \\ 1 & -c_1 & \dots & -c_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

откуда следует определение *координат Ганкеля–Фробениуса* (ГФ).

Нетрудно показать, что соотношение между ГФ-координатами $(\mathbf{f}; \mathbf{c})$ и ЛН-координатами $(\lambda; \mu)$ дается системой

$$\begin{aligned} \lambda^n - \sum_{i=1}^n c_i \lambda^{n-i} &= \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i), \\ \mu_k &= \sum_{i=1}^n f_i \lambda_k^{n-i} \quad (k = 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Преимущество использования системы ГФ-координат состоит в том, что в нашем случае их можно вычислить *алгебраическим способом* из рекуррентных соотношений (4.9).

В заключение заметим, что благодаря последним уравнениям из (4.8) и (4.9), гамильтоновы поля $X = P_0 dc_1$ и $Y = P_0 df_1$ являются пфаффиановыми квазигамильтоновыми векторными полями в терминологии работ [20, 2]. Таким образом, эти аргументы доказывают существование таких полей на любом максимальном ПН-многообразии.

4.3. Назад к $\mathbf{Bsq}_5$. Вычисляя минимальный многочлен матрицы N^* (4.5), получаем координаты $\mathbf{c}$:

$$\begin{aligned} c_1 &= k_1 + h_2, & c_2 &= 2k_1^2 - h_2^2 - g_1 + 2h_1k_2 - h_2k_1, \\ c_3 &= -3k_1^3 + 2k_1h_2^2 + 2k_1g_1 - 2h_1k_1k_2 - 2h_1h_2k_2 + 2k_2h_4 - k_3k_2 - h_2k_1^2, \\ c_4 &= k_2^2h_3 - g_1k_1^2 + h_2k_1^3 - h_1^2k_2^2 + k_1^4 + 2h_2h_1k_1k_2 - 2k_1h_2h_4 + k_1k_2k_3 - h_2^2k_1^2. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Координаты $\mathbf{f}$ можно найти следующим образом. Учитывая свойства однородности теории с весами $[\lambda] = 3$, $[h_i] = 1 + i$, $[k_i] = 2 + i$, мы видим, что $[P_0] = -8$ и $[c_i] = 3i$. Из уравнения (4.11) получаем, что вес f_1 должен быть равен -4 . Взяв анзац $f_1 = 1/k_2$ и используя рекуррентные соотношения (4.9), находим координаты $\mathbf{f}$:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{k_2}, & f_2 &= \frac{-h_2}{k_2}, & f_3 &= -h_1 + \frac{g_1 + h_2^2 - 2k_1^2}{k_2}, \\ f_4 &= k_3 - h_4 + h_1h_2 + \frac{k_1^3 + h_2k_1^2 - k_1h_2^2 - g_1k_1}{k_2}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

ГФ-координаты, ассоциированные с ПН-структурой, позволяют реконструировать спектральную кривую (3.12) и уравнения Складина для разделения переменных [21]. Аналогично тому, как это сделано в случае уравнения КдФ [3, 6], рассмотрим уравнения (4.12) как определяющие уравнения для двух фундаментальных полиномов, ассоциированных с задачей,

$$\mathcal{Q}_1 = \lambda^4 - \sum_{i=1}^4 c_i \lambda^{(4-i)}, \quad \mathcal{Q}_2 = \sum_{i=1}^4 f_i \lambda^{(4-i)}. \quad (4.15)$$

Теперь прямыми вычислениями можно показать, что в нулях λ_j полинома $\mathcal{Q}_1$ и при соответствующих значениях $\mu_j = \mathcal{Q}_2(\lambda_j)$ выполняется уравнение спектральной кривой (3.12):

$$\mu_j^3 = \mu_j(H_1\lambda_j + H_2) + (\lambda_j^5 + H_3\lambda_j^3 + H_4\lambda_j^2 + H_5\lambda_j + H_6). \quad (4.16)$$

При ограничении задачи на лист S_0 рассмотрим $H_1 = v_1$ и $H_3 = v_2$ как фиксированные параметры. Отсюда получим уравнения Складина для разделения переменных [21], т.е. четыре соотношения в канонических координатах $(\lambda; \mu)$, зависящие от четырех коммутирующих гамильтонианов $\hat{H}_2, \hat{H}_4, \hat{H}_5, \hat{H}_6$. Как хорошо известно, по аналогии с классической теорией Штэкеля разделения переменных для гамильтонианов, квадратично зависящих от импульсов, из этих соотношений следует, что полный интеграл $W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4$ уравнений Гамильтона–Якоби

$$\hat{H}_i \left(\lambda, \frac{\partial W}{\partial \lambda} \right) = \alpha_i, \quad i = 2, 4, 5, 6,$$

получается путем решения четырех расцепленных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\left(\frac{dW_j}{d\lambda_j} \right)^3 = \frac{dW_j}{d\lambda_j} (v_1\lambda_j + \alpha_2) + (\lambda_j^5 + v_2\lambda_j^3 + \alpha_4\lambda_j^2 + \alpha_5\lambda_j + \alpha_6), \quad j = 1, \dots, 4, \quad (4.17)$$

что представляет собой задачу, которую можно исследовать алгебро-геометрическими методами.

5. ЦЕПОЧКИ НИЙЕНХЕЙСА И РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ ЛЕВИ-ЧИВИТА

В этом разделе мы вводим концепцию цепочек Нийенхейса как естественного расширения последовательностей Ленарда и приводим альтернативное и несколько более классическое доказательство того факта, что ДН-координаты являются разделяющимися переменными для уравнения Гамильтона–Якоби, соответствующего каждому гамильтонову векторному полю $\hat{X}_j$ нашей задачи. Отметим, что когда мы имели дело с алгебро-геометрическим разделением переменных в разделе 4, исходные гамильтонианы (3.13) 10-мерной задачи Гельфанда–Захаревича (см. предложение 2) не использовались при построении ДН- и ГФ-координат, а входили в доказательство делимости переменных только на завершающей стадии. Причина этого в том, что будучи инвариантными относительно “распределения” $\hat{D}$, они не определяют рекуррентное соотношение Ленарда на S_0 , по крайней мере при классическом рассмотрении, как, например, в работах [12, 22]. Мы рассмотрим их ограничение $\hat{H}_j$ на симплектический лист S_0 в соответствии со следующим критерием делимости, предложенным Бененти [23]:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $X = P_0 dK$ – гамильтоново векторное поле на симплектическом многообразии $(M, \omega = P_0^{-1})$, а $(q; p)$ ($q := (q_1, \dots, q_n)$; $p := (p_1, \dots, p_n)$) – набор координат Дарбу. Эти координаты являются разделяющимися переменными для соответствующего уравнения Гамильтона–Якоби тогда и только тогда, когда X допускает n интегралов движения $\{K_i\}_{1 \leq i \leq n}$, таких что

$$\det \left(\frac{\partial K_i}{\partial p_j} \right) \neq 0, \quad (5.1)$$

и которые находятся в разделяющейся инволюции по отношению к $(q; p)$, т.е. удовлетворяют n соотношениям

$$\{K_i, K_j\}|_k := \frac{\partial K_i}{\partial q_k} \frac{\partial K_j}{\partial p_k} - \frac{\partial K_i}{\partial p_k} \frac{\partial K_j}{\partial q_k} = 0, \quad (5.2)$$

где не производится суммирование по k .

Для того чтобы использовать этот критерий, введем понятие *цепочки Нийенхейса*, обобщающее классическое рекуррентное соотношение Ленарда, которому удовлетворяют (нормированные) следы степеней тензора Нийенхейса $I_k = (1/2k) \operatorname{Tr} N^k$,

$$N^* dI_k = dI_{k+1} \Rightarrow (N^*)^{k-1} dI_1 = dI_k,$$

и соотношения, которым удовлетворяют ГФ-координаты $(f; c)$ вследствие уравнений (4.8), (4.9).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть (M, P, N) – ПН-многообразие, а $\{K_j\}_{1 \leq j \leq n}$ – n независимых функций, обладающих следующим свойством по отношению к N^* :

$$dK_j = \sum_{k=1}^n a_{jk} (N^*)^{k-1} dK_1, \quad j = 1, \dots, n, \quad (5.3)$$

где a_{jk} — элементы обратимой матрично-значной функции $\mathbf{a}$. Об этом рекуррентном соотношении (и о соответствующем соотношении $X_j = P dK_j$ для векторных полей) мы будем говорить как о *цепочке Нийенхейса с генератором K_1* ($X_1 = P dK_1$).

Цепочки Нийенхейса были неявным образом рассмотрены в работе [24], где было доказано, что функции K_j , допускающие представление (5.3), находятся в инволюции по отношению к пуассонову тензору P . В настоящей работе мы хотим констатировать более сильное свойство таких функций, а именно то, что они находятся в *разделяющейся* инволюции по отношению к ДН-координатам. Это легко доказать, если вычислить $\{K_i, K_j\}|_k$ в ДН-координатах и вспомнить, что λ_j являются собственными значениями тензора N^* . Таким образом, в силу предложения 4 мы можем сделать следующее утверждение:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *ДН-координаты являются разделяющимися переменными для каждой функции K_j из цепочки Нийенхейса.*

Таким образом, для доказательства того, что $\text{Bs}q_5$ -система удовлетворяет теореме Бененти, достаточно проверить, что ограничения $\hat{H}_j$ гамильтонианов H_j на симплектический лист S_0 общего положения принадлежат цепочке Нийенхейса. Можно непосредственно проверить, что это имеет место: действительно, выбирая в качестве генератора K_1 гамильтониан

$$\begin{aligned} \hat{H}_2 = & k_3^2 - h_4 k_3 + h_3 k_1^2 + h_2^2 h_3 - 2h_1 k_2^2 - 3k_1^2 k_2 + h_4^2 - \\ & - h_1 k_1 k_3 + h_2 h_1 k_3 + h_1 k_2 h_3 - 2h_1 h_2 h_4 - k_1 k_2 h_2 - 2k_1 h_2 h_3 + \\ & + 2k_1 h_1 h_4 - k_1 v_2 + k_2 g_1 - k_2 v_1 + h_3 g_1 - h_1^2 g_1, \end{aligned}$$

где отождествлено $K_2 = \hat{H}_4$, $K_3 = \hat{H}_5$, $K_4 = \hat{H}_6$, получаем для матрицы $\mathbf{a}$ в рекуррентном соотношении Нийенхейса (в координатах $(\mathbf{f}; \mathbf{c})$) выражение

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -f_1 c_1 - f_2 & f_1 & 0 & 0 \\ -f_1 c_2 - f_3 & -f_1 c_1 & f_1 & 0 \\ -f_1 c_3 - f_4 & -c_2 f_1 & -f_1 c_1 & f_1 \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На конкретном примере стационарной $\text{Bs}q_5$ -системы мы обсудили два связанных между собой вопроса. Сначала мы обрисовали систематический путь получения стационарных редукций и их гамильтоновых структур для n -теорий Гельфанда–Дикиго. Ключевые моменты состоят в изучении ПС (2.4) и ее стационарных многообразий, а также представления нулевой кривизны и представления Лакса (3.2), естественным образом получающихся из потоков. Гамильтоновы структуры индуцируются на стационарном многообразии при помощи специальной процедуры бигамильтоновой редукции для па-

ры пуассоновых структур, определенных на пространстве полиномов от спектрального параметра λ со значениями в алгебре Ли. Такая процедура, обоснование которой базируется на связи между формулировками Лакса и Пуассона для гамильтоновых потоков, позволяет нам отнести такие теории к классу теорий Гельфанда–Захаревича вырожденных пучков пуассоновых структур, вообще говоря (т.е. при $n > 2$), *не максимального ранга* (см. раздел 3).

В разделах 4 и 5 мы исследовали способы решения этих интегрируемых динамических систем с помощью метода разделения переменных. Нашим основным сюжетом было изучение некоторых соотношений между классической теорией Гамильтона–Якоби (а также ее более современных аспектов, связанных с понятием полной *алгебраической интегрируемости*) и гамильтоновой структурой, полученной в разделе 3. С этой целью мы отказались от теории Гельфанда–Захаревича и при помощи дальнейшей (но уже *не бигамильтоновой*) редукции установили связь с теорией ПН-многообразий. Мы исследовали свойства двух примечательных классов систем координат, ассоциированных с ПН-структурами – ДН- и ГФ-координаты. Используя эти координаты, мы доказали разделяемость Bsq_5 -потоков двумя способами. В первом способе мы явно установили связь с “методом полюсов функции Бейкера–Ахиезера”, разработанным российской школой (см., например, [6, 21]). Во втором способе мы ввели понятие цепочек Нийенхейса и доказали разделяемость, используя условие, эквивалентное классическому критерию разделяемости Леви-Чивита [25].

В заключение заметим, что особенность второй редукции, которая все еще попадает в класс МР-редукций, заключается в том, что два различных геометрических процесса используются одновременно: ограничение для векторных полей и проекция для бигамильтоновых структур. Из-за этого мы сохранили бигамильтонову структуру (в виде ПН-структуры), но потеряли бигамильтонову формулировку для векторных полей. Эта ситуация не является новой в гамильтоновой теории интегрируемых систем – такое происходит, например, в случае интегрируемой системы Хенона–Хейлеса и ее многомерных обобщений, получающихся путем редукции из *стационарных* потоков КдФ-иерархии [24, 26], и для широкого класса потенциалов, восстановленных из *ограниченных* потоков связанных КдФ-систем, наиболее представительные члены которых – это системы Гарнье [27].

Такие классы динамических систем определены на бигамильтоновом многообразии M максимального ранга, и их формулировку Нийенхейса, а именно специальный случай, называемый квазибигамильтоновой формулировкой [20, 28], можно получить после аналогичной редукции. Стационарные потоки иерархии Буссинеска (и теорий Гельфанда–Дикого с более высокими n) представляют собой примеры бигамильтоновых структур не максимального ранга, для которых анализ, аналогичный проведенному в работе [7] для пуассоновых пучков максимального ранга, насколько нам известно, в настоящее время отсутствует.

Благодарности. Мы благодарим М. Педрони и П. Сазати за полезные дискуссии. Г.Ф. и Г.Т. хотели бы поблагодарить организаторов конференции NEEDS в Лидсе в 1998 г. за предложение представить полученные результаты. Большинство вычислений было проделано с помощью программы Maple V[®]. Работа выполнена при поддержке G.N.F.M. итальянского C.N.R.

Список литературы

- [1] *F. Magri, T. Marsico.* Some developments of the concepts of Poisson manifolds in the sense of A. Lichnerowicz. In: *Gravitation, Electromagnetism, and Geometric Structures*. Ed. G. Ferrarese. Bologna: Pitagora Editrice, 1996. P. 207–222; *T. Marsico.* Una caratterizzazione geometrica dei sistemi che ammettono rappresentazione alla Lax estesa. Tesi di Dottorato. Università di Milano, 1996.
- [2] *C. Morosi, G. Tondo.* J. Phys. A. 1997. V. 30. P. 2799–2806.
- [3] *S. I. Alber.* Commun. Pure Appl. Math. 1981. V. 34. P. 259–272.
- [4] *M. Antonowicz, A. P. Fordy, S. Wojciechowski.* Phys. Lett. A. 1987. V. 124. P. 455–462.
- [5] *О. И. Богоявленский, С. П. Новиков.* Функци. анализ и его прилож. 1976. Т. 10. № 1. С. 9–13.
- [6] *Б. А. Дубровин, И. М. Кривчер, С. П. Новиков.* Интегрируемые системы. I. В сб.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 4. Динамические системы – 4. Ред. Р. В. Гамкрелидзе. М.: ВИНТИ, 1985. С. 179–285.
- [7] *I. M. Gel'fand, I. Zakharevich.* On the local geometry of a bi-Hamiltonian structure. In: *The Gelfand Mathematical Seminars 1990–1992*. Eds. L. Corwin et al. Boston: Birkhäuser, 1993. P. 51–112.
- [8] *P. Casati, G. Falqui, F. Magri, M. Pedroni.* J. Math. Phys. 1997. V. 38. P. 4605–4628.
- [9] *G. Falqui, F. Magri, M. Pedroni.* Commun. Math. Phys. 1998. V. 197. P. 303–324.
- [10] *M. Sato, Y. Sato.* Soliton equations as dynamical systems on infinite-dimensional Grassmann manifold. In: *Nonlinear PDEs in Applied Sciences (US-Japan Seminar, Tokyo)*. Eds. P. Lax, H. Fujita. Amsterdam: North-Holland Publ. Company, 1982. P. 259–271.
- [11] *L. A. Dickey.* Soliton Equations and Hamiltonian Systems. Adv. Ser. in Math. Phys. V. 12. Singapore: World Scientific, 1991.
- [12] *F. Magri, C. Morosi.* A geometric characterization of integrable Hamiltonian systems through the theory of Poisson–Nijenhuis manifolds. Quaderno **S/19**, Università di Milano, 1984.
- [13] *А. Г. Рейман, М. А. Семенов-Тянь-Шанский.* Теоретико-групповые методы в теории интегрируемых систем. В сб.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 16. Динамические системы – 7. Ред. Р. В. Гамкрелидзе. М.: ВИНТИ, 1987. С. 119–194.
- [14] *G. Magnano, F. Magri.* Rev. Math. Phys. 1991. V. 3. P. 403–466.
- [15] *M. Pedroni, P. Vanhaecke.* Reg. Chaotic Dyn. 1998. V. 3. P. 132–160.
- [16] *J. E. Marsden, T. Ratiu.* Lett. Math. Phys. 1986. V. 11. P. 161–169.
- [17] *P. Casati, F. Magri, M. Pedroni.* Bihamiltonian manifolds and τ -function. In: *Mathematical Aspects of Classical Field Theory*. Contemp. Math. V. 132. Eds. M. J. Gotay et al. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1991. P. 213–234.
- [18] *A. P. Fordy, S. D. Harris.* Hamiltonian structures in stationary manifold coordinates. In: *Algebraic Aspects of Integrable Systems*. Progr. Nonlinear Differ. Equ. Appl. V. 26. Eds. A. S. Fokas, I. M. Gelfand. Boston, MA: Birkhauser, 1996. P. 103–130.
- [19] *A. Fokas, B. Fuchssteiner.* Physica D. 1981. V. 4. P. 47–66.
- [20] *R. Brouzet, R. Caboz, J. Rabenivo, V. Ravoson.* J. Phys. A. 1996. V. 29. P. 2069–2076.
- [21] *E. Sklyanin.* Progr. Theor. Phys. Suppl. 1995. V. 118. P. 35–60.
- [22] *S. De Filippo, G. Marmo, M. Salerno, G. Vilasi.* Nuovo Cimento B. 1984. V. 83. P. 97–112.
- [23] *S. Benenti.* Separability structures on Riemannian manifolds. In: *Lect. Notes Math.* V. 836. Differential Geometrical Methods in Mathematical Physics. Eds. P. L. García, A. Pérez-Rendón, and J. M. Sourian. Berlin: Springer, 1980. P. 512–538.
- [24] *G. Tondo.* J. Phys. A. 1995. V. 28. P. 5097–5115.
- [25] *T. Levi-Civita.* Math. Annal. 1904. V. 59. P. 383–397.
- [26] *G. Tondo.* On the integrability of Hénon–Heiles type systems. In: *Non Linear Physics, Theory and Experiment*. Eds. E. Alfinito et al. Singapore: World Scientific, 1996. P. 313–320.
- [27] *M. Błaszak.* Multi-Hamiltonian Theory of Dynamical Systems. Berlin: Springer, 1998.
- [28] *C. Morosi, G. Tondo.* To be published in Rep. Math. Phys.