Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Ганболд, Запаздывающий функционал действия для дираковского полярона,
ТМФ, 2000, том 122, номер 2, 231–238

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf565>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 18:06:31

ЗАПАЗДЫВАЮЩИЙ ФУНКЦИОНАЛ ДЕЙСТВИЯ ДЛЯ ДИРАКОВСКОГО ПОЛЯРОНА

Характеристики основного состояния одномерного (дираковского) полярона рассматриваются в качестве примера системы с запаздывающим функционалом взаимодействия. В подходе континуального интеграла получены оценки энергии основного состояния и эффективной массы полярона в рамках и вне рамок наиболее общего гауссова приближения. Показано, что ведущий гауссов вклад в собственную энергию немного улучшает фейнмановскую оценку, при этом он принадлежит самой нижней из возможных верхних границ. Негауссовы поправки следующего за ведущим порядка не нарушают значительно полученных результатов. Для сравнения была вычислена нижняя граница энергии основного состояния полярона в рамках метода Либ-Ямадзаки.

1. ВВЕДЕНИЕ

Электрон, движущийся в ионном кристалле, и сопровождающее это движение искажение поляризованной решетки называются *поляроном* [1–3]. В последнее время существенное внимание исследователей привлекали свойства поляронов, удерживаемых в одномерии ($d = 1$). Растущий интерес к низкоразмерным поляронам может быть обусловлен рядом причин, среди которых существенное место занимает то обстоятельство, что современная полупроводниковая технология [4–7] сделала возможным удержание электронов в квазинизкоразмерных структурах. Другая причина связана с неизбежным теоретическим улучшением стандартной ($d = 3$) модели полярона путем понижения пространственной размерности [8–11].

Результирующее взаимодействие с поляризованной решеткой изменяет как энергию, так и массу электрона. В силу этого основные характеристики полярона как квазичастицы, такие как энергия основного состояния (ЭОС) и эффективная масса (ЭМ), зависят от безразмерной константы связи α .

В настоящей работе мы сосредоточимся на получении точных и приближенных результатов для ЭОС и ЭМ одномерного аналога большого полярона Фрелиха при произвольном значении константы связи $0 \leq \alpha \leq \infty$.

*Institut für Theoretische Physik, Universität Erlangen–Nürnberg, Erlangen, Germany

2. ПОЛЯРОННЫЙ ИНТЕГРАЛ ПО ТРАЕКТОРИЯМ В ОДНОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Дираковский ($d = 1$) полярон описывается короткодействующим потенциалом типа δ -функции, тогда как полярон Фрёлеха ($d = 3$) участвует во взаимодействии кулоновского типа – дальнодействии. Результирующее взаимодействие электрона, удерживаемого в одномерной системе, с фононами продольных оптических (ЛО-моды) колебаний решетки моделируется с помощью следующего гамильтониана [12]:

$$H = \frac{p^2}{2} + \sum_k a_k^\dagger a_k + \sqrt{\frac{2\alpha}{L}} \sum_k g_k (a_k^\dagger e^{-ikr} - a_k e^{ikr}), \quad (1)$$

где p и r – импульс и положение электрона, L – длина кристалла решетки, а k , a_k и $a_k^\dagger$ – соответственно волновой вектор и операторы уничтожения и рождения фононов. Здесь мы использовали единицы, в которых $m_b = \omega_{LO} = \hbar = c = 1$, где m_b – масса затравочного электрона, ω_{LO} обозначает частоту ЛО-моды решеточных колебаний. Безразмерная константа взаимодействия α выбрана так, что $\lim_{\alpha \rightarrow 0} E(\alpha)/\alpha = 1$.

Линейный характер электрон-фононного взаимодействия в гамильтониане (1) позволяет проинтегрировать по фононам в рамках знаменитого фейнмановского формализма интегралов по траекториям (ИТ) [13]. Поляронная ЭОС определяется тогда как

$$E(\alpha) := - \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \ln Z_\beta(\alpha, x), \quad Z_\beta(\alpha, x) := \int \mathcal{D}r \delta(r(\beta) - x) e^{\alpha \Phi_\beta(r)}, \quad (2)$$

$$\Phi_\beta(r) := \frac{1}{\sqrt{8}} \int_0^\beta \int_0^\beta dt ds e^{-|t-s|} \delta(|r(t) - r(s)|), \quad (3)$$

где $\mathcal{D}r$ – нормированная функциональная мера винеровского типа, определенная на траекториях, начинающихся в начале координат, $r(0) = 0$, а $\delta(r)$ – δ -функция.

ЭМ полярона можно определить, используя разложение вещественной части собственной энергии по малому фиксированному импульсу p :

$$m^*(\alpha) := - \left\{ \frac{\partial^2}{\partial p^2} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \ln \left(\int dx e^{-ipx} Z_\beta(\alpha, x) \right) \Big|_{|p|=0} \right\}^{-1}. \quad (4)$$

Определения (2)–(4) подчиняются условиям нормировки $E(0) = 0$ и $m^*(0) = 1$.

ИТ Z_β является центральным объектом в нашем рассмотрении, обычно его удается вычислить явно лишь в предельных случаях слабого и сильного взаимодействий. Точные асимптотические выражения

$$\begin{aligned} E(\alpha) &= \begin{cases} -\alpha - \alpha^2 \left(\frac{3}{\sqrt{8}} - 1 \right) + O(\alpha^3), & \alpha \rightarrow 0, \\ -\frac{\alpha^2}{3} + O(1), & \alpha \rightarrow \infty, \end{cases} \\ m^*(\alpha) &= \begin{cases} 1 + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2(5\sqrt{2}-4)}{16} + O(\alpha^3), & \alpha \rightarrow 0, \\ \frac{32\alpha^4}{15} + O(\alpha^2), & \alpha \rightarrow \infty, \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

можно найти в работах [11, 14, 12, 10].

3. ГАУССОВЫ ВКЛАДЫ ВЕДУЩЕГО ПОРЯДКА

Как было отмечено выше, точные результаты обычно удается получить только в предельных случаях $\alpha \rightarrow 0$ и $\alpha \rightarrow \infty$. В случае других значений ($\alpha \sim 1$) для оценок ЭОС и ЭМ полярона были развиты различные приближенные методы [15–17].

Верхние границы в гауссовом приближении. Функционал поляронного взаимодействия $\Phi_\beta(r)$ (3) является вещественным. Экспонента в выражении (2) остается выпуклой функцией для любого вещественного пробного функционала $\Phi_\beta^{\text{tr}}(r)$, введенного вместо $\Phi_\beta(r)$. Тогда соответствующий пробный функционал $Z_\beta^{\text{tr}}(\alpha, 0)$ является интегрируемым, если выбрать $\Phi_\beta^{\text{tr}}(r)$ квадратичным. Эти обстоятельства дают возможность применить к $Z_\beta^{\text{tr}}(\alpha, 0)$ равенство Иенсена и получить верхнюю границу ЭОС. Детали и результаты такого приближения зависят, конечно, от специального выбора пробного функционала. Ниже мы кратко рассмотрим два подхода, основанные на принципе вариационной оптимизации, с целью получения приемлемой верхней границы ЭОС одномерного полярона. После этого мы применим к данной задаче невариационный метод (GER)¹⁾, дающий разумное значение верхней границы ЭОС.

1. В простейшем приближении следует рассмотреть функционал $Z_\beta^{\text{tr}}(\alpha, 0)$, подходящий для гармонического осциллятора с зависящей от α массой $\mu(\alpha)$. “Осцилляторные” приближения для ЭОС и ЭМ имеют вид

$$\begin{aligned} E_{\text{os}}(\alpha) &= \inf \left\{ \frac{\mu}{4} - \frac{\alpha\sqrt{\mu}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dt \frac{e^{-t}}{(1 - e^{-\mu t})^{\frac{1}{2}}} \right\}, \\ m_{\text{os}}^*(\alpha) &= 1 + \frac{\alpha\mu^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dt \frac{t^2 e^{-t}}{(1 - e^{-\mu t})^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned} \quad (6)$$

где параметр μ доставляет минимум выражению в фигурных скобках. Результаты оценок для $E_{\text{os}}(\alpha) \geq E(\alpha)$ приведены в табл. 1 и 2. Одним из недостатков данной модели является искусственная сингулярность, появляющаяся в высших производных $E_{\text{os}}(\alpha)$ в точке $\alpha \cong 1.93$.

2. При получении своей знаменитой оценки (в случае $d = 3$) Фейнман использовал двухпараметрическое квадратичное пробное действие, моделирующее запаздывающее взаимодействие осцилляторного типа между поляроном и массивной частицей. Применяя данный подход при $d = 1$ и оптимизируя пробную собственную энергию по параметрам $v > w > 1$, получаем следующие выражения для вариационной верхней границы ЭОС и ЭМ фейнмановского типа [9]:

$$\begin{aligned} E_{\text{F}}(\alpha) &= \inf \left\{ \frac{(v - w)^2}{4v} - \frac{\alpha v^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dt \frac{e^{-t}}{[w^2 vt + (v^2 - w^2)(1 - e^{-vt})]^{\frac{1}{2}}} \right\}, \\ m_{\text{F}}^*(\alpha) &= 1 + \frac{\alpha v^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dt \frac{t^2 e^{-t}}{[w^2 vt + (v^2 - w^2)(1 - e^{-vt})]^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \quad (7)$$

¹⁾Gauss Equivalent Representation.

Результаты, пересчитанные для промежуточных значений α , приведены в табл. 1 и 2 для сравнения с нашими оценками. Гладкая верхняя граница $E_F(\alpha) \geq E(\alpha)$ остается одной из лучших оценок при всех значениях констант связи.

ТАБЛИЦА 1

Верхняя и нижняя границы ЭОС одномерного полярона
в области промежуточных значений константы связи α

α	E_{os}	E_F	E_0	E_2	E_{LY}
0.5	-0.5000	-0.51006	-0.51027	-0.51589	-0.58263
1.0	-1.0000	-1.04444	-1.04532	-1.06710	-1.44082
1.5	-1.5000	-1.61314	-1.61522	-1.66119	-2.72255
2.0	-2.0086	-2.23696	-2.24044	-2.31150	-4.48444
2.5	-2.7043	-2.95968	-2.96352	-3.05052	-6.74002
4.0	-5.7934	-6.04779	-6.04964	-6.20592	-16.4961
6.0	-12.155	-12.4074	-12.4083	-12.7345	-36.4983
8.0	-21.067	-21.3178	-21.3183	-21.8871	-64.4990

ТАБЛИЦА 2

ЭМ одномерного полярона в области промежуточных
значений константы связи α

α	m_{os}^*	m_F^*	m_0^*	m_2^*	m_{LY}^*
0.5	1.25000	1.32084	1.32246	1.31091	2.69494
1.0	1.50000	1.88895	1.89862	1.83258	17.8088
1.5	1.75000	3.11732	3.15094	2.91361	82.5172
2.0	5.85933	6.83836	6.90814	6.13458	257.327
2.5	31.6793	21.4723	21.4372	19.4943	626.221
4.0	331.719	281.622	281.474	295.800	4097.09
6.0	1911.78	1784.90	1784.82	1973.85	20737.0
8.0	6302.70	6068.77	6068.73	6821.14	65537.0

3. Улучшение фейнмановской оценки верхней границы можно получить путем построения более общего гауссова приближения Z_β [15–17]. Ключевая идея метода GER [16] заключается в использовании представления, наиболее полно выделяющего гауссову

составляющую в ИТ. Это достигается с помощью канонических преобразований, которые подчинены следующим требованиям: новая часть поляронного действия, отвечающая за взаимодействие, во-первых, обращается в нуль при усреднении по новой мере и, во-вторых, не содержит линейных и квадратичных конфигураций путей. Эти требования определяют уравнения связи, которым подчиняется новая нормированная гауссова мера $d\sigma(r)$, введенная вместо исходной меры $\mathcal{D}r$.

Применение метода GER к соотношению (3) дает

$$Z_\beta(\alpha, x) = e^{-\beta \mathcal{F}_G(x, \alpha, \beta)} J_\beta(\alpha, x), \quad (8)$$

где экспоненциальный член $e^{-\beta \mathcal{F}_G(x, \alpha, \beta)}$ представляет собой *общее гауссово приближение*, а *негауссовы поправки* могут быть получены путем вычисления новых ИТ $J_\beta(\alpha, x)$ (подробнее о применении метода GER для оценки ЭОС и ЭМ полярона см. в работах [18, 16, 19]).

Опуская детали вычислений, запишем общие гауссовы вклады в ЭОС и ЭМ в виде

$$\begin{aligned} E_0(\alpha) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dk \left[\ln(k^2 \tilde{D}(k)) - k^2 \tilde{D}(k) + 1 \right] + \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty dt \frac{e^{-t}}{F^{\frac{1}{2}}(t)}, \\ m_0^*(\alpha) &= 1 + \frac{\alpha}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty dt \frac{t^2 e^{-t}}{F^{\frac{3}{2}}(t)}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\tilde{D}(k)$ – фурье-образ функции Грина $D(t)$. Подгоночная функция $F(t) := D(0) - D(t)$, играющая ключевую роль в новом представлении (8), должна определяться из уравнений связи

$$F(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dk \frac{1 - \cos(kt)}{k^2 + 3\alpha\tilde{\sigma}(k)}, \quad \tilde{\sigma}(k) := \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty dt e^{-t} \frac{1 - \cos(kt)}{F^{\frac{3}{2}}(t)}. \quad (10)$$

Варианты этих интегральных уравнений были также получены, например, в работах [15, 20, 21] для случая $d = 3$. Результаты численных расчетов для $E_0(\alpha)$ и $m_0^*(\alpha)$ представлены в табл. 1 и 2.

Сделаем несколько замечаний.

1. Имеет место неравенство $J_\beta(\alpha, 0) \geq 1$. Следовательно, гауссово приближение дает ограничение сверху для точного значения ЭОС полярона с небольшой поправкой, слегка улучшающей фейнмановскую оценку: $E_F(\alpha) \geq E_0(\alpha) \geq E(\alpha)$.

2. Значение $E_0(\alpha)$ становится более точным в случае высших размерностей, поскольку $\lim_{d \rightarrow \infty} E_0(\alpha) = E(\alpha)$ вследствие асимптотического поведения

$$\lim_{d \rightarrow \infty} J_\beta(\alpha, 0) = 1.$$

3. Уравнение связи (10) допускает аналитическое решение в предельных случаях $\alpha \rightarrow 0$ и $\alpha \rightarrow \infty$. При этом формулы (9) дают следующие асимптотические выражения:

$$\begin{aligned} E_0(\alpha) &= \begin{cases} -\alpha - \alpha^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3}\pi \right) - O(\alpha^3), & \alpha \rightarrow 0, \\ -\frac{\alpha^2}{\pi} - O(1), & \alpha \rightarrow \infty, \end{cases} \\ m_0^*(\alpha) &= \begin{cases} 1 + \frac{\alpha}{2} + \alpha^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} \right) + O(\alpha^3), & \alpha \rightarrow 0, \\ \frac{16\alpha^4}{\pi^2} + O(\alpha^2), & \alpha \rightarrow \infty. \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

Фейнмановская вариационная модель воспроизводится, если мы ограничимся вместо точного решения $F(t)$ выбором двухпараметрической (u, v) выпуклой комбинации асимптотических формул.

4. Для случая мгновенного взаимодействия мы решили эти уравнения численно.

4. НЕГАУССОВЫ ПОПРАВКИ

Для оценки негауссовых поправок к ЭОС и ЭМ полярона ограничимся рассмотрением полиномов второго порядка в разложении экспоненты в $J_\beta(\alpha, x)$. Учитывая только поправки второго порядка, для случаев слабого и сильного взаимодействий можно аналитически получить следующие выражения:

$$\begin{aligned} E_0(\alpha) + \Delta E_2(\alpha) &= \begin{cases} -\alpha - \alpha^2 \left(\frac{3}{\sqrt[3]{8}} - 1 \right) - O(\alpha^3), & \alpha \rightarrow 0, \\ -\alpha^2 \cdot 0.327014 - O(1), & \alpha \rightarrow \infty, \end{cases} \\ m_0^*(\alpha) + \Delta m_2^*(\alpha) &= \begin{cases} 1 + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2(5\sqrt{2}-4)}{16} + O(\alpha^3), & \alpha \rightarrow 0, \\ \alpha^4 \cdot 1.858065 + O(\alpha^2), & \alpha \rightarrow \infty. \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

Для промежуточных значений константы взаимодействия $\alpha \sim 1$ мы решили эти уравнения численно. Мы получили, что негауссовы поправки второго порядка к ЭОС и ЭМ достигают своих максимумов (примерно 4 и 12% по сравнению с соответствующими гауссовыми членами) в точке $\alpha = 1.93$. Таким образом, можно ожидать, что суммарное значение всех негауссовых поправок выше второго порядка не может существенно образом изменить полученные для ЭОС и ЭМ полярона результаты, представленные в табл. 1 и 2.

5. НИЗШИЕ СОСТОЯНИЯ ЛИБА–ЯМАДЗАКИ

Нижние границы ЭОС и ЭМ полярона Фрёлиха ($d = 3$) были впервые определены Либом и Ямадзаки [22] в рамках гамильтонова формализма. Проводя аналогичную оценку для специального случая $d = 1$, получаем

$$\begin{aligned} E_{LY}(\alpha) &= \frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 - \frac{2\alpha}{p}} - \alpha p \right), \\ m_{LY}^*(\alpha) &= 1 + \frac{p^2 - 1}{p^2 + 1} (p^4 + 2p^2 - 2), \end{aligned} \quad (13)$$

где p – положительный корень уравнения $p^3(p - 2\alpha) - 1 = 0$. Для случаев слабого и сильного взаимодействий уравнения (13) можно решить аналитически:

$$\begin{aligned} E_{LY}(\alpha) &= \begin{cases} -\alpha - O(\alpha^2), & \alpha \rightarrow 0, \\ -\alpha^2 + O(1), & \alpha \rightarrow \infty, \end{cases} \\ m_{LY}^*(\alpha) &= \begin{cases} 1 + \frac{\alpha}{2} + O(\alpha^2), & \alpha \rightarrow 0, \\ 16\alpha^4 + O(\alpha^2), & \alpha \rightarrow \infty. \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

Результаты численных расчетов для $E_{LY}(\alpha)$ и $m_{LY}^*(\alpha)$ в области промежуточных значений константы связи, представленные в табл. 1 и 2, можно сравнить с результатами, полученными в предыдущих разделах.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В эквивалентном гауссовому представлении (8) содержится стратегия получения нижней границы ЭОС дираковского полярона. Однако эта стратегия требует дополнительных усилий для строгого доказательства общего неравенства, и мы не будем обсуждать этот вопрос в настоящей статье. Вообще говоря, нахождение нижней границы ЭОС полярона требует методики, отличной от той, которой мы пользовались для оценок верхней границы. Мы хотели бы коснуться двух оценочных схем, которые позволяют сразу получать разумные (доказанные строго) значения нижних границ ЭОС полярона в размерности $d = 1$.

Другой способ получить нижнюю границу ЭОС одномерного полярона методом ИТ заключается в том, чтобы следовать идее, предложенной в работе [23] для случая $d = 3$. Можно заметить, что действие в уравнении (3) обладает запаздыванием (т.е. является нелокальным) и экспоненциально уменьшается при увеличении различия между двумя “временными” переменными t и s . Это делает модель неинтегрируемой, однако такое осложнение можно исправить ценой ухудшения точности. В частности, можно свести эту задачу к хорошо изученному локальному случаю. Таким образом, в случае дираковской поляронной модели необходимо выбирать евклидов пропагатор для близкодействующего потенциала типа δ -функции [24], а не пропагатор, полученный для описывающего атом водорода дальнедействующего взаимодействия кулоновского типа [23]. При этом нужно использовать набор нетривиальных функциональных неравенств, для того чтобы получить нижнюю границу ЭОС. Предварительная оценка показывает, что такой подход позволяет получить нижнюю границу, причем для случая слабого взаимодействия результат является разумным. К сожалению, оценки Либа–Ямадзаки для промежуточной и сильной связей будут, по-видимому, несколько хуже.

В заключение мы вычислили ЭОС и ЭМ дираковского полярона в размерностях $d > 1$ в рамках и вне рамок (до членов второго порядка) общего гауссова приближения, используя метод представлений, эквивалентных гауссовым. Мы показали, что ведущий гауссов вклад в энергию основного состояния немного уточняет фейнмановские оценки и принадлежит к самой нижней из возможных верхних границ. Негауссовы поправки следующего за ведущим порядка не нарушают значительно полученных результатов. Наш метод хорошо работает во всем диапазоне значений α , он не требует значительно объема численных расчетов на суперкомпьютерах [25], однако способен достаточно быстро дать надежные и состоятельные результаты. По сравнению с подходами, основанными на различных интерполяционных алгоритмах [26], наш подход также не имеет ни сингулярностей, ни сверхчувствительности, встречающихся в этих алгоритмах.

Благодарности. Я хотел бы поблагодарить Г. В. Ефимова, Х. Лешке и Р. Мюллера за ряд полезных обсуждений, а также фонд А. Гумбольдта за поддержку.

Список литературы

- [1] *L. D. Landau.* Phys. Z. Sowjetunion. 1933. V. 3. P. 664.
- [2] *Н. Н. Боголюбов, С. В. Тябликов.* ЖЭТФ. 1949. Т. 19. С. 256.
- [3] *H. Fröhlich.* Philos. Mag. Suppl. 1954. V. 3. P. 325.

- [4] *W. P. Su, J. R. Schrieffer, A. J. Heeger.* Phys. Rev. Lett. 1980. V. 42. P. 1648; Phys. Rev. B. 1980. V. 22. P. 209.
- [5] *Z. B. Su, L. Yu.* Phys. Rev. B. 1983. V. 27. P. 5199.
- [6] *K.-F. Berggren, T. J. Thornton, D. J. Newson, M. Pepper.* Phys. Rev. Lett. 1986. V. 57. P. 1769.
- [7] *B. E. Sernelius.* Phys. Rev. B. 1987. V. 36. P. 9509; 1988. V. 37. P. 7909.
- [8] *F. M. Peeters, X. Wu, J. T. Devreese.* Phys. Rev. B. 1986. V. 33. P. 3926.
- [9] *M. H. Degani, O. Hipólito, R. Lobo, G. A. Farias.* J. Phys. C. 1986. V. 19. P. 2919.
- [10] *H. Leschke, S. Wonneberger.* J. Phys. A. 1989. V. 22. P. L1009.
- [11] *C. Quinghu, W. Keli, W. Shaolong.* J. Phys.: Condens. Matter. 1994. V. 6. P. 6599.
- [12] *E. P. Gross.* Ann. Phys. 1976. V. 99. P. 1.
- [13] *R. P. Feynman.* Phys. Rev. 1955. V. 97. P. 660.
- [14] *F. M. Peeters, M. A. Smondyrev.* Phys. Rev. B. 1991. V. 43. P. 4920.
- [15] *J. Adamowski, B. Gerlach, H. Leschke.* Functional Integration. Theory and Application. New York: Plenum Press, 1980.
- [16] *G. V. Efimov, G. Ganbold.* Phys. Part. Nucl. 1995. V. 26. P. 198.
- [17] *M. Dineykhon, G. V. Efimov, G. Ganbold, S. N. Nedelko.* 1995 (unpublished).
- [18] *G. Ganbold, G. V. Efimov.* Phys. Rev. B. 1994. V. 50. P. 373; Oscillator Representation in Quantum Physics (Lecture Notes in Physics, series Monographs m26). Berlin: Springer, 1995.
- [19] *G. Ganbold, G. V. Efimov.* J. Phys.: Condens. Matter. 1998. V. 10. P. 4845.
- [20] *M. Saitoh.* J. Phys. Soc. Japan. 1980. V. 49. P. 878.
- [21] *M. A. Smondyrev.* Physica A. 1991. V. 171. P. 191.
- [22] *E. H. Lieb, K. Yamazaki.* Phys. Rev. 1958. V. 111. P. 728.
- [23] *W. Fischer, H. Leschke, P. Müller.* Path integration in quantum mechanics by changing drift and time of the underlying process. In: Path Integrals from meV to MeV. Proc. of the 4th Int. Conf. "Path Integrals from meV to MeV". Tutzing, May 18–21, 1992. Eds. H. Grabert, A. Inomata, L. S. Schulman, and U. Weiss. River Edge, New Jersey: World Scientific, 1993. P. 259–267.
- [24] *B. Gaveau, L. S. Schulman.* J. Phys. A. 1986. V. 19. P. 1833.
- [25] *C. Alexandrou, R. Rosenfelder.* Phys. Rep. 1992. V. 215. P. 1.
- [26] *H. Kleinert.* Phys. Lett. A. 1995. V. 207. P. 133.