Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Лезнов, Градуированные алгебры Ли, теория представлений, интегрируемые отображения и интегрируемые системы, *ТМФ*, 2000, том 122, номер 2, 251–271

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf567>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 12:03:59

© 2000 г.

А. Н. Лезнов*

ГРАДУИРОВАННЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ, ТЕОРИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ, ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ

Введен новый класс интегрируемых отображений и цепочек. В явном виде представлены соответствующие интегрируемые $(1 + 2)$ -мерные системы, инвариантные относительно данных дискретных преобразований. Решения солитонного типа этих систем построены в терминах матричных элементов фундаментальных представлений полупростых алгебр A_n для данного группового элемента. Обсуждается возможность обобщения построения на многомерный случай.

1. ВВЕДЕНИЕ

В старой работе автора [1] на основе двумерного условия нулевой кривизны был предложен эффективный метод построения точно интегрируемых систем в размерности два, а также их общих решений. В течение последних пятнадцати лет ситуация стала более ясной и понятной.

Оказалось, что предложенный в работе [1] метод позволяет строить интегрируемые отображения [2, 3], ответственные за существование различных иерархий интегрируемых систем. Каждое уравнение из данной иерархии является инвариантным относительно преобразования соответствующего отображения (или подстановки).

Более того, стало ясно, что формализм L - A -пар не является центральным аспектом всего построения. Существует более прямой способ получить интегрируемые отображения, и метод L - A -пар — это лишь одно из его следствий. Ситуация, возникающая при явном решении уравнений квантовой двумерной решетки Тоды [4] для гейзенберговских операторов, является наиболее важным аргументом в пользу необходимости развития нового подхода, не связанного с представлением нулевой кривизны. В этом случае L - A -представление полностью отсутствует, и тем не менее предложенный в настоящей статье метод хорошо работает. В этой связи можно вспомнить общее решение уравнений периодических решеток Тоды, которое может быть получено в виде абсолютно сходящихся бесконечных рядов без использования формализма L - A -пар, а с помощью построения, предложенного в работе [5].

---

*Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas, Universidad Nacional Autónoma de México, Morelos, México; Институт физики высоких энергий, Протвино, Московская обл., Россия. E-mail: leznov@ce.fis.unam.mx

В настоящей работе предлагается следующая схема.

В качестве первого шага мы вводим два интегрируемых в квадратурах уравнения S -матричного типа для двух функций, значения которых принадлежат группе и которые зависят от двух различных аргументов. Функции, являющиеся коэффициентами этих уравнений, определяются структурой соответствующей алгебры Ли и выбором в ней определенной градуировки. Мы не делаем различия между случаями алгебры и супералгебры и напомним только, что четные (нечетные) элементы супералгебр всегда умножаются на четные (нечетные) элементы грассмана пространства. С помощью этих двух групповых элементов строится новый составной элемент. Соотношения эквивалентности между его матричными элементами приводят к интегрируемой подстановке.

На втором шаге мы предполагаем дополнительную зависимость произвольных функций, которые определяют общее решение интегрируемой подстановки (с фиксированными концами), от некоторых “временеподобных” параметров. Это достигается с помощью двух дополнительных уравнений для упомянутых выше групповых элементов $M^\pm$, так что условие их согласованности определяет явную зависимость произвольных функций как от пространственных, так и от временных параметров. С помощью этих временных параметров мы представляем иерархию полностью интегрируемых систем, каждая из которых инвариантна относительно преобразования интегрируемого отображения (построенного на первом шаге).

В заключение (в качестве третьего шага, который на самом деле не имеет тесной связи с двумя предыдущими) заметим, что в рамках метода [1] существует некоторая скрытая, ранее не использованная нетривиальная возможность для обобщения всей конструкции на многомерный случай¹⁾.

В этом подходе наиболее замечательным является то, что размерность возможного “многомерного обобщения” единственным образом определяется свойствами алгебры и выбором градуировки в ней. Иногда “многомерное обобщение” эквивалентно тривиальной замене переменных, а иногда ведет к новым нетривиальным возможностям. Тем не менее во всех случаях удается получить только частные (но не общие) решения систем и уравнений, возникающих в этом методе.

Настоящая работа построена следующим образом. В разделе 2 мы кратко повторяем содержание первого раздела работы [1], однако в “противоположном направлении” по сравнению с оригиналом. В разделе 3 для удобства читателей мы представляем наиболее важные результаты из теории представлений полупростых (супер)алгебр и групп, необходимые для дальнейших приложений. В разделе 4 мы показываем, как избежать относительно громоздких процедур для построения разложения Гаусса (в случае, когда оно эквивалентно решению полной задачи). Мы представляем интегрируемые системы и их общие решения в терминах матричных элементов различных фундаментальных представлений полупростых алгебр и таким способом строим интегрируемые отображения или подстановки $UT(m_1, m_2)$. В разделе 5 мы демонстрируем способ введения эволюционных параметров для получения иерархий интегрируемых систем, инвариант-

---

¹⁾По поводу других возможностей расширения класса интегрируемых систем, которые не обсуждались в работе [1], см. [6].

ных относительно преобразований построенных интегрируемых отображений. В разделе 6 мы обсуждаем возможности обобщения данного построения на многомерный случай (с заранее определенными размерностями!). Заключительные замечания собраны в разделе 7.

2. ДВИЖЕНИЕ В ПРОТИВОПОЛОЖНОМ НАПРАВЛЕНИИ

Предположим, что имеется некоторая произвольная градуированная конечномерная алгебра $\mathcal{G}$. Это означает, что $\mathcal{G}$ представляется в виде прямой суммы подпространств с различными градуировочными индексами

$$\mathcal{G} = \left(\bigoplus_{k=1}^{N_-} \mathcal{G}_{-\frac{k}{2}} \right) \oplus \mathcal{G}_0 \oplus \left(\bigoplus_{k=1}^{N_+} \mathcal{G}_{\frac{k}{2}} \right). \quad (1)$$

Генераторы с целыми градуировочными индексами называются бозонными, а с полуцелыми индексами – фермионными. Положительная (отрицательная) градуировка соответствует верхне(нижне)треугольным матрицам.

Пусть $M_+(y)$, $M_-(x)$ – элементы группы (если она существует), соответствующей алгебре (1) и только некоторым из решений уравнений S -матричного типа в некотором выбранном конечномерном представлении исходной алгебры $\mathcal{G}$,

$$\frac{\partial M_-}{\partial x} = L_-^{m_1}(x) M_- = \sum_{s=0}^{m_1} A^{-s}(x) M_-, \quad \frac{\partial M_+}{\partial y} = L_+^{m_2}(y) M_+ = \sum_{s=0}^{m_2} B^{+s}(y) M_+, \quad (2)$$

где A^{-s} , B^{+s} – произвольные функции своих аргументов, принимающие значения в соответствующих градуированных подпространствах, а s – целое или полуцелое число.

Введем групповой элемент

$$K = M_+ M_-^{-1} \quad (3)$$

(все рассмотрения, приведенные ниже, имеют смысл только в том случае, когда группа существует). В соответствии с работой [1] K может быть представлен в виде гауссова разложения

$$K = M_+ M_-^{-1} = N_-^{-1} g_0 N_+,$$

где $N_{\pm}$ – элементы положительных (отрицательных) нильпотентных подгрупп и g_0 – элемент группы, алгебра которой представляет собой нулевое подпространство. Рассмотрим групповой элемент

$$G = N_- M_+ = g_0 N_+ M_-. \quad (4)$$

Прямым следствием приведенных выше определений и уравнений для $M_{\pm}$ являются соотношения

$$\begin{aligned} G_x G^{-1} &= (N_-)_x N_-^{-1} = \sum_s^{m_2} R^{(-s)}(x, y), \quad s = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots, \\ G_y G^{-1} &= (g_0)_y g_0^{-1} + g_0 (N_+)_y N_+^{-1} (g_0)^{-1} = (g_0)_y g_0^{-1} + \sum_s^{m_1} R^{(+s)}(x, y). \end{aligned} \quad (5)$$

Применение тождества Маурера–Картана к уравнениям (5) дает уравнения для точно интегрируемых систем с общим решением, определяемым уравнением (4) и приведенными выше формулами.

Все сказанное до сих пор представляет собой всего лишь дословное повторение работы [1], но “в направлении, противоположном оригиналу”. Главная техническая сложность данного подхода заключается в необходимости явно находить гауссово разложение, т.е. находить из уравнения (4) групповые элементы $N_{\pm}$ и g_0 , если известны $M_{\pm}$. Если решать эту задачу прямо, она получается достаточно громоздкой.

Здесь мы хотели бы подчеркнуть, что соотношение между уравнениями (2) и последующей цепочкой тождеств, связанных с элементом K и приводящих к представлению нулевой кривизны, содержащемуся в уравнении (5), верно только в случае, когда алгебру $\mathcal{G}$ можно проинтегрировать до соответствующей группы. Хорошо известно, что для случая алгебр Ли это всегда возможно [7]. Однако здесь существует много других интересных задач (и среди них именно случаи квантовой цепочки Тоды и общего решения периодического варианта задачи, упомянутой во введении [4, 5]), когда решение уравнений (2) можно представить в квадратурах, однако невозможно перейти к представлению нулевой кривизны из-за отсутствия соответствующего группового элемента.

К счастью, существует более прямой способ, приводящий нас при использовании определения элемента K (не обязательно в групповом смысле) к реконструированию формы уравнений интегрируемой системы, а также к ее общему решению. Мы продемонстрируем этот метод, применив его к случаю полупростых алгебр, когда его можно сформулировать посредством интегрируемых отображений и их общих решений (в “обрезанной версии”) в терминах матричных элементов различных фундаментальных представлений.

В точности те же методы применимы к квантовому случаю двумерной решетки Тоды и общему решению периодического случая, когда соответствующий групповой элемент отсутствует (строго говоря, вместе с представлением нулевой кривизны).

3. НЕКОТОРЫЕ ФАКТЫ ИЗ ТЕОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ПОЛУПРОСТЫХ АЛГЕБР

В этом разделе мы ограничимся случаем полупростых алгебр. В общем случае градуировочный оператор H может быть представлен как линейная комбинация элементов подалгебры Картана (со значениями 1 или 0 для генераторов простых корней)

$$H = \sum_{i=1}^r (k^{-1}c)_i h_i. \quad (6)$$

Здесь k^{-1} – обратная матрица Картана, $k^{-1}k = kk^{-1} = I$, а c – столбец, состоящий из нулей и единиц в произвольном порядке.

Как обычно, генераторы простых корней $X_i^{\pm}$ (повышающие и понижающие операторы) и картановские элементы h_i удовлетворяют системе коммутационных соотношений

$$[h_i, h_j] = 0, \quad [h_i, X_j^{\pm}] = \pm k_{ij} X_j^{\pm}, \quad [X_i^{+}, X_j^{-}] = \delta_{i,j} h_j \quad (1 \leq i, j \leq r), \quad (7)$$

где k_{ij} – элементы матрицы Картана и скобки $[,]$ обозначают градуированный коммутатор, а r – ранг алгебры.

Старший вектор $|j\rangle$ ($\langle j| \equiv |j\rangle^\dagger$) j -го фундаментального представления обладает свойством

$$X_i^+ |j\rangle = 0, \quad h_i |j\rangle = \delta_{i,j} |j\rangle, \quad \langle j | j \rangle = 1. \quad (8)$$

Представление порождается повторным применением понижающих операторов X_i^- к вектору $|j\rangle$ и извлечением всех линейно независимых векторов с ненулевыми нормами. Его несколько первых базисных векторов имеют вид

$$|j\rangle, \quad X_j^- |j\rangle, \quad X_i^- X_j^- |j\rangle, \quad k_{ij} \neq 0, \quad i \neq j. \quad (9)$$

Матричные элементы фундаментальных представлений произвольного группового элемента G удовлетворяют важному тождеству²⁾ [8]

$$\text{sdet} \begin{pmatrix} \langle j | X_j^+ G X_j^- | j \rangle & \langle j | X_j^+ G | j \rangle \\ \langle j | G X_j^- | j \rangle & \langle j | G | j \rangle \end{pmatrix} = \prod_{i=1, i \neq j}^r \langle i | G | i \rangle^{-k_{ji}}, \quad (10)$$

где k_{ji} – элементы матрицы Картана. Тождество (10) представляет собой обобщение известного тождества Якоби, связывающего определители порядков $(n-1)$, n и $(n+1)$ некоторых специальных матриц для произвольной полупростой супергруппы Ли. Как мы увидим в следующем разделе, это тождество настолько важно для построения интегрируемых отображений, что даже можно сказать, что оно ответственно за их существование. Мы сохраняем для уравнения (10) название первого тождества Якоби. Кроме уравнения (10) существует не менее важное независимое тождество [3]

$$\begin{aligned} & k_{ij} (-1)^P X_i^+ \left(\frac{\langle j | X_j^+ G | j \rangle}{\langle j | G | j \rangle} \right) + k_{ji} X_j^+ \left(\frac{\langle i | X_i^+ G | i \rangle}{\langle i | G | i \rangle} \right) + \\ & + k_{ij} k_{ji} (-1)^{jP} \frac{\langle j | X_j^+ G | j \rangle}{\langle j | G | j \rangle} \frac{\langle i | X_i^+ G | i \rangle}{\langle i | G | i \rangle} = 0, \quad k_{ij} \neq 0, \end{aligned} \quad (11)$$

которое будет называться вторым тождеством Якоби. Это тождество ответственно (в указанном выше смысле) за факт существования иерархии интегрируемых систем, каждая из которых инвариантна относительно преобразования построенных интегрируемых отображений.

Как видно из уравнения (10) или из (11), можно построить множество полезных рекуррентных соотношений, которые мы будем использовать в наших последующих рассуждениях.

²⁾ Напомним определение супердетерминанта:

$$\text{sdet} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \equiv \det(A - BD^{-1}C) (\det D)^{-1}.$$

4. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И ЦЕПОЧКИ

Используя аппарат предыдущего раздела, покажем, что матричные элементы группового элемента K удовлетворяют замкнутой системе уравнений эквивалентности, которую можно интерпретировать как отображение или систему типа цепочки с известным общим решением. Ограничимся рассмотрением случая полупростой алгебры A_n с главным вложением в нее³⁾. Во всех остальных случаях требуются более громоздкие вычисления⁴⁾.

При главном вложении градуировочный оператор (6) принимает единичные значения для всех генераторов простых корней. Генераторы $\pm m$ -градуированных подпространств имеют вид

$$Y_i^{\pm m} = [X_{i+m-1}^{\pm} [\dots [X_{i+1}^{\pm}, X_i^{\pm}] \dots]].$$

Действие правого “лагранжиана” $\tilde{L}_-^{m_1}$ (2) (где знак тильда означает, что члены с нулевым индексом градуировки исключаются из $L_-^{m_1}$) на вектор состояния $|i\rangle$ можно записать в виде

$$\tilde{L}_-^{m_1} |i\rangle = \sum_{n=1}^{m_1} \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \phi_{s-i}^n T_s^-(X_{i-1}^-) T_{n-s-1}^+(X_{i+1}^-) X_i^- |i\rangle, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} T_m^+(X_i^-) &= T_{m-1}^+(X_{i+1}^-) X_i^-, & T_0^+(X_i^-) &= 1, \\ T_m^-(X_i^-) &= T_{m-1}^-(X_{i-1}^-) X_i^-, & T_0^-(X_i^-) &= 1. \end{aligned}$$

Смысл уравнения (12) легко понять. В m -градуированном подпространстве имеются в точности $m - 1$ генераторов, содержащих генератор данного простого корня i . В силу уравнения (9) ненулевой вклад получается только в случае, когда этот генератор оказывается на последнем месте. Это утверждение вытекает и из формулы (12) (см. также сноску 3).

По той же причине действие “лагранжиана” $\tilde{L}_+^{m_2}$ на левый вектор состояния $\langle i|$ принимает вид

$$\langle i | \tilde{L}_+^{m_2} = \langle i | X_i^+ \sum_{n=1}^{m_2} \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \bar{\phi}_{s-i}^n R_s^-(X_{i-1}^+) R_{n-s-1}^+(X_{i+1}^+), \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} R_m^+(X_i^+) &= X_i^+ R_{m-1}^+(X_{i+1}^+), & R_0^+(X_i^+) &= 1, \\ R_m^-(X_i^+) &= X_i^+ R_{m-1}^-(X_{i-1}^+), & R_0^-(X_i^+) &= 1. \end{aligned}$$

³⁾ Два факта из теории представлений A_n являются для нас важными: каждый сложный корень представляет собой сумму последовательных простых корней, индексы которых увеличиваются на единицу; отличны от нуля только состояния i -го фундаментального представления с двумя ветвями понижающих генераторов начиная с общего генератора X_i^- и далее с увеличивающимися или уменьшающимися на единицу индексами отрицательных генераторов простых корней.

⁴⁾ Простейший пример таких вычислений для произвольной полупростой алгебры можно найти в приложении.

Введем определения

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}_i^{\pm m} &= \frac{\langle i | R_m^{\pm}(X_i^{\pm}) K | i \rangle}{\langle i | K | i \rangle}, & \alpha_i^{\pm m} &= \frac{\langle i | K T_m^{\pm}(X_i^{\mp}) | i \rangle}{\langle i | K | i \rangle}, \\ \langle i \rangle &\equiv \langle i | K | i \rangle, & \theta_i &\equiv \frac{\langle i-1 \rangle \langle i+1 \rangle}{\langle i \rangle^2}.\end{aligned}\quad (14)$$

В дальнейших вычислениях мы многократно будем использовать следующий прием. Матричный элемент $\langle a | X_l^+ G X_k^- | b \rangle$, где $\langle a |$, $| b \rangle$ – произвольные векторы состояний некоторых представлений группы, можно переписать как

$$\langle a | X_l^+ G X_k^- | b \rangle \equiv (\hat{X}_l^+)_{\text{left}} (\hat{X}_k^-)_{\text{right}} \langle a | G | b \rangle, \quad (15)$$

где теперь $(\hat{X}_l^+)_{\text{left}}$, $(\hat{X}_k^-)_{\text{right}}$ – соответствующие генераторы левого (правого) регулярного представления, действующие на групповой элемент G . Такой подход позволяет проводить большую часть приведенных ниже вычислений путем многократного использования первого (10) и второго (11) тождеств Якоби.

В качестве первого примера рассмотрим доказательство следующих рекуррентных соотношений для функции $Q_{a,b;i\pm 1}^{\pm} \equiv (R_a^{\pm}(X_{i\pm 1}^{\pm}))_l \langle i \pm 1 | K | i \pm 1 \rangle (T_b^{\pm}(X_{i\pm 1}^{\mp}))_r$:

$$\begin{aligned}Q_{a,b;i\pm 1}^{\pm} &= (R_{a-1}^{\pm}(X_{i\pm 2}^{\pm}))_r \langle i \pm 1 | X_{i\pm 1}^+ K X_{i\pm 1}^- | i \pm 1 \rangle (T_{b-1}^{\pm}(X_{i\pm 2}^{\mp}))_r = \\ &= \frac{\langle i | K | i \rangle}{\langle i \pm 1 | K | i \pm 1 \rangle} Q_{a-1,b-1;i\pm 2}^{\pm} + \langle i \pm 1 | K | i \pm 1 \rangle \bar{\alpha}_{i\pm 1}^{\pm a} \alpha_{i\pm 1}^{\pm b}.\end{aligned}\quad (16)$$

Выполняя последнее преобразование, мы выразили матричный элемент $\langle i \pm 1 | X_{i\pm 1}^+ \times K X_{i\pm 1}^- | i \pm 1 \rangle$ с помощью первого тождества Якоби (10) и использовали определение (14) функций α и $\bar{\alpha}$.

Теперь мы готовы перейти к вычислениям соотношений эквивалентности между введенными выше величинами. Приведем наиболее типичные шаги при вычислениях производных функций $\bar{\alpha}$ из (14) по координате x . Мы имеем последовательные равенства

$$\begin{aligned}(\bar{\alpha}_j^{+m})_x &= (\langle j | K | j \rangle)^{-2} \det \begin{pmatrix} \langle j | R_m^+(X_j^+) K \tilde{L}_-^{m_1} | j \rangle & \langle j | R_m^+(X_j^+) K | j \rangle \\ \langle j | K \tilde{L}_-^{m_1} | j \rangle & \langle j | K | j \rangle \end{pmatrix} = \\ &= (\langle j | K | j \rangle)^{-2} (\hat{R}_{m-1}^+(X_{j+1}^+))_l \times \\ &\quad \times \sum_{n=1}^{m_1} \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \phi_{s-i}^n (\hat{T}_s^-(X_{i-1}^-))_r (\hat{T}_{n-s-1}^+(X_{i+1}^-))_r \times \\ &\quad \times (\langle j-1 | K | j-1 \rangle \langle j+1 | K | j+1 \rangle).\end{aligned}$$

При выполнении последнего преобразования мы многократно использовали описанный выше прием (см. (15)) и первое тождество Якоби (10). Дальнейшие вычисления состоят в последовательном применении рекуррентного соотношения (16) к выражению

$$(\hat{R}_{m-1}^+(X_{j+1}^+))_l (\hat{T}_{n-s-1}^+(X_{i+1}^-))_r (\langle j+1 | K | j+1 \rangle)$$

и равенству

$$(\hat{T}_s^-(X_{i-1}^-))_r(\langle j-1|K|j-1\rangle) = (\langle j-1|K|j-1\rangle)\alpha_{j-1}^{-s},$$

которое следует из определения (14). Выполнив чисто алгебраические вычисления, окончательно для производной получим

$$(\bar{\alpha}_j^{+m})_x = \sum_{q=0}^{m-1} \Theta_i^{+q} p_i^{(q+1)} \bar{\alpha}_{i+q+1}^{m-1-q}, \quad (17)$$

где

$$p_i^{(r)} = \sum_{n=1}^{m_1} \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \phi_{i-s}^n \alpha_{i-1}^{-s} \alpha_{i+r}^{n-s-r}, \quad \Theta^{\pm p} = \prod_{r=0}^p \theta_{i\pm r},$$

$$p_i^{(m_1)} \equiv 1, \quad p_i^{(r)} = 0, \quad m_1 + 1 \leq r.$$

Используя тот же прием, получаем

$$(\bar{\alpha}_i^{-m})_x = \sum_{q=0}^{m-1} (-1)^q \Theta_i^{-q} p_{i-q}^{(q+1)} \bar{\alpha}_{i-q-1}^{-(m-1-q)}$$

и соответствующие выражения для производных функции α по переменной y :

$$(\alpha_j^{+m})_y = \sum_{q=0}^{m-1} \Theta_i^{+q} \bar{p}_i^{(q+1)} \alpha_{i+q+1}^{m-1-q}, \quad (\alpha_i^{-m})_y = \sum_{q=0}^{m-1} (-1)^q \Theta_i^{-q} \bar{p}_{i-q}^{(q+1)} \bar{\alpha}_{i-q-1}^{-(m-1-q)}, \quad (18)$$

где

$$\bar{p}_i^{(r)} = \sum_{n=1}^{m_2} \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \bar{\phi}_{s-i}^n \bar{\alpha}_{i-1}^{-s} \bar{\alpha}_{i+r}^{n-s-r}, \quad \bar{p}_i^{(m_2)} \equiv 1, \quad \bar{p}_i^{(r)} = 0, \quad m_2 + 1 \leq r.$$

Опишем теперь основные этапы вычисления смешанной частной производной

$$\frac{\partial^2 \ln(\langle i|K|i\rangle)}{\partial x \partial y}.$$

Используя основные уравнения (2), можно (аналогично проведенным выше вычислениям) представить эту производную в виде определителя второго порядка и применить к нему первое тождество Якоби (10). Таким образом получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln(\langle i|K|i\rangle)}{\partial x \partial y} &= \langle i \rangle^{-2} \sum_{n=1}^{m_1} \sum_{s=0}^{n-1} \sum_{m=1}^{m_2} \sum_{t=0}^{m-1} (-1)^{s+t} \phi_{i-s}^{(n)} \bar{\phi}_{i-t}^{(m)} \times \\ &\quad \times (\hat{R}_{m-t-1}^+(X_{i+1}^+))_l (\hat{T}_{n-s-1}^+(X_{i+1}^-))_r \langle j+1|K|j+1\rangle \times \\ &\quad \times (\hat{R}_t^-(X_{i-1}^-))_l (\hat{T}_s^-(X_{i-1}^-))_r \langle j-1|K|j-1\rangle. \end{aligned}$$

Применение к обоим множителям в последней сумме рекуррентных соотношений (16) позволяет преобразовать ее к виду

$$\sum_{n=1}^{m_1} \sum_{s=0}^{n-1} \sum_{m=1}^{m_2} \sum_{t=0}^{m-1} (-1)^{s+t} \phi_{i-s}^{(n)} \bar{\phi}_{i-t}^{(m)} (\theta_i)^{-1} \sum_{p=0} \Theta_{i-1}^{-p} \bar{\alpha}^{-(t-p)} \alpha^{-(s-p)} \times \\ \times \sum_{q=0} \Theta_{i+1}^{+q} \bar{\alpha}^{(m-t-q-1)} \alpha^{(n-s-q-1)},$$

а изменяя порядок суммирования, мы приходим к окончательному выражению

$$\frac{\partial^2 \ln(\langle i | K | i \rangle)}{\partial x \partial y} = (\theta_i)^{-1} \sum_{p=0, q=0}^{p+q \leq \text{Min}\{m_1-1, m_2-1\}} \Theta_i^{-p} \Theta_i^{+q} p_{i-p}^{(p+q+1)} \bar{p}_{i-p}^{(p+q+1)},$$

где все используемые функции определены выше.

Знание явных выражений для производных функций α и $\bar{\alpha}$ по координатам y, x позволяет вычислить производные функций $p_i^{(r)}$ и $\bar{p}_i^{(r)}$ и получить замкнутую систему уравнений (или тождеств) для неизвестных функций $p_i^{(r)}, \bar{p}_i^{(r)}$ и $\langle i \rangle$ (с соответствующими граничными условиями):

$$\frac{\partial \bar{p}_i^{(r)}}{\partial x} = \sum_{q=1}^{m_2-r} (\Theta_{i+r}^{+(q-1)} p_{i+r}^{(q)} \bar{p}_i^{(q+r)} - \Theta_{i-1}^{-(q-1)} p_{i-q}^{(q)} \bar{p}_{i-q}^{(q+r)}), \\ \frac{\partial^2 \ln(\langle i | K | i \rangle)}{\partial x \partial y} = \theta_i^{-1} \sum_{p=0, q=0}^{p+q \leq \text{Min}\{m_1-1, m_2-1\}} \Theta_i^{-p} \Theta_i^{+q} p_{i-p}^{(p+q+1)} \bar{p}_{i-p}^{(p+q+1)}, \quad (19) \\ \frac{\partial p_i^{(r)}}{\partial y} = \sum_{q=1}^{m_1-r} (\Theta_{i+r}^{+(q-1)} \bar{p}_{i+r}^{(q)} p_i^{(q+r)} - \Theta_{i-1}^{-(q-1)} \bar{p}_{i-q}^{(q)} p_{i-q}^{(q+r)}).$$

В работе [3] система (19) была названа системой УТ(m_1, m_2), и мы сохраним это название, не забывая о необходимых изменениях, выполненных нами в работе [6].

Можно забыть о граничных условиях и рассматривать решеточную систему (19) как бесконечную, где индекс i принимает все натуральные значения (как положительные, так и отрицательные). В этом случае систему (19) можно рассматривать как некоторое отображение, т.е. как закон, по которому устанавливается связь между некоторым числом начальных функций и таким же числом конечных. Нам хотелось бы прояснить ситуацию на конкретном примере решеток УТ(m_1, m_2) с младшими значениями чисел m_1, m_2 .

4.1. УТ(1, 1). В этом случае уравнение (19) эквивалентно цепочке уравнений для одной неизвестной функции $\langle i \rangle$ или θ_i

$$\frac{\partial^2 \ln \langle i \rangle}{\partial x \partial y} = \frac{\langle i-1 \rangle \langle i+1 \rangle}{\langle i \rangle^2}, \quad \frac{\partial^2 \ln \theta_i}{\partial x \partial y} = \theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}$$

(имеется много других эквивалентных форм обычной решетки Тоды). Начальными функциями в данном случае являются две функции $\phi_1 = \theta_i$ и $\phi_2 = \theta_{i-1}$. Конечные условия записываются как $\tilde{\phi}_1 = \theta_{i+1}$ и $\tilde{\phi}_2 = \theta_i$, а соответствующие отображения принимают вид

$$\tilde{\phi}_1 = \frac{\partial^2 \ln \phi_1}{\partial x \partial y} + 2\phi_1 - \phi_2, \quad \tilde{\phi}_2 = \phi_1.$$

4.2. УТ(1, 2). В этом случае уравнение (19) принимает вид двух цепочек уравнений для двух неизвестных функций θ_i и $p_i^{(1)}$ в каждой точке решетки:

$$\frac{\partial^2 \ln \theta_i}{\partial x \partial y} = \theta_{i+1} p_{i+1}^{(1)} - 2\theta_i p_i^{(1)} + \theta_{i-1} p_{i-1}^{(1)}, \quad \frac{\partial p_i^{(1)}}{\partial y} = \theta_{i+1} - \theta_{i-1}.$$

Последнюю систему можно переписать как отображение. Четыре начальных функции $\phi_1 = \theta_i$, $\phi_2 = \theta_{i-1}$, $\phi_3 = p_i^{(1)}$, $\phi_4 = p_{i-1}^{(1)}$ связаны с четырьмя конечными $\tilde{\phi}_1 = \theta_{i+1}$, $\tilde{\phi}_2 = \theta_i$, $\tilde{\phi}_3 = p_{i+1}^{(1)}$, $\tilde{\phi}_4 = p_i^{(1)}$ следующим правилом:

$$\tilde{\phi}_4 = \phi_3, \quad \tilde{\phi}_3 \tilde{\phi}_1 = \frac{\partial^2 \ln \phi_1}{\partial x \partial y} - \phi_2 \phi_4 + 2\phi_1 \phi_3, \quad \tilde{\phi}_2 = \phi_1, \quad \tilde{\phi}_1 = \phi_2 + \frac{\partial \phi_3}{\partial y}.$$

В общем случае УТ(m_1, m_2)-подстановка связывает $2^{m_1+m_2-1}$ начальных функций с таким же числом конечных функций.

Замечательное свойство УТ(m_1, m_2)-отображений состоит в их интегрируемости. Это означает, что соответствующее им уравнение симметрии обладает бесконечным числом нетривиальных решений. Каждое решение уравнения симметрии порождает полностью интегрируемую систему, инвариантную относительно преобразования подстановки УТ(m_1, m_2) [4]. Все обладающие такими свойствами системы объединяются в соответствующую интегрируемую иерархию.

5. ЭВОЛЮЦИОННЫЕ ПАРАМЕТРЫ И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ИЕРАРХИИ

В этом разделе мы вводим параметры эволюции и объясняем принцип построения систем уравнений эволюционного типа и их явных солитоноподобных решений. Все построенные таким образом системы инвариантны относительно подстановок УТ(m_1, m_2) и принадлежат к интегрируемой иерархии с тем же названием.

Примем, что произвольные функции, входящие в уравнения (2) для элементов $M_{\pm}$, в свою очередь, зависят от некоторых дополнительных параметров t_{n_2} и $\bar{t}_{n_1}$ (левое и правое время) таким образом, что элементы $M_{\pm}$ удовлетворяют дополнительным уравнениям

$$\frac{\partial M_+}{\partial \bar{t}_{n_1}} = \sum_{s=0}^{n_1} P^{+s} M_+, \quad \frac{\partial M_-}{\partial t_{n_2}} = \sum_{s=0}^{n_2} R^{-s} M_- \quad (20)$$

(которые согласованы с уравнениями (2)), где функции $P^{+s}(y, \bar{t}_{n_1})$ и $R^{-s}(x, t_{n_2})$ принимают значения в подпространствах с градуировочными индексами $\pm s$. Конечно, теперь в уравнениях (2) зависимость от функций A^{+s} и B^{-s} включена с учетом того, что $A^{+s}(y, \bar{t}_{n_1})$, $B^{-s}(x, t_{n_2})$.

Разобьем данный раздел на четыре пункта. В первых двух мы покажем, как уравнения (2) и (20) связаны с системами интегрируемых иерархий. В третьем пункте мы представим явное решение задачи, следующей из согласованности уравнений (2) и (20). В четвертом пункте мы кратко опишем построение решений систем иерархии Дарбу–Тоды (ДТ) многосолитонного типа.

Чтобы сделать материал более понятным, начнем с двумерной ДТ-иерархии, все системы которой являются инвариантными относительно преобразования обычной цепочки Тоды (УТ(1, 1)), для которой задача была решена ранее [9] путем прямого решения соответствующих уравнений симметрии.

5.1. Интегрируемые системы ДТ-иерархии. Сравнивая уравнения (2) и (20) (где $m_1 = m_2 = 1$, $n_1 = n_2 = k$), можно заключить, что по отношению к паре пространственных координат (x, y) соответствующие матричные элементы группового элемента K удовлетворяют уравнениям обычной решетки Тоды:

$$\frac{\partial^2 \ln \langle i \rangle}{\partial x \partial y} = \theta_i. \quad (21)$$

По отношению к паре аргументов $(\bar{t}_k, x)$ (соответственно временному и пространственному) мы имеем цепочку УТ($k, 1$), описываемую системой

$$\frac{\partial \bar{p}_i^{(s)}}{\partial x} = \theta_{i+s} \bar{p}_i^{(s+1)} - \theta_{i-1} \bar{p}_{i-1}^{(s+1)}, \quad \frac{\partial^2 \ln \langle i \rangle}{\partial x \partial \bar{t}_k} = \theta_i \bar{p}_i^{(1)}, \quad 1 \leq s \leq (k-1), \quad \bar{p}_i^{(k)} = 1. \quad (22)$$

По отношению к паре (y, t_k) мы имеем цепочку УТ(1, k) с соответствующими уравнениями

$$\frac{\partial p_i^{(s)}}{\partial x} = \theta_{i+s} p_i^{(s+1)} - \theta_{i-1} p_{i-1}^{(s+1)}, \quad \frac{\partial^2 \ln \langle i \rangle}{\partial y \partial t_k} = \theta_i p_i^{(1)}, \quad 1 \leq s \leq (k-1), \quad p_i^{(k)} = 1.$$

И наконец, по отношению к паре двух временных координат $(t_k, \bar{t}_k)$ мы имеем цепочку УТ(k, k) с общими уравнениями (19). Явные решения уравнений относительно оставшихся пар (x, t_{n_2}) и $(y, \bar{t}_{n_1})$ будут получены в третьем пункте.

Здесь мы хотели бы подчеркнуть, что во всех трех приведенных выше примерах явные зависимости функций $p_i^{(s)}$ и $\bar{p}_i^{(s)}$ от матричных элементов одного группового элемента K не являются одинаковыми и определяются в соответствии с формулой (19).

Вместо общего случая мы рассмотрим несколько простых примеров, из которых становится совершенно понятной ситуация, имеющая место в общем случае (мы также ограничимся выбором левого временного параметра).

5.1.1. $k = 2$. Интегрируя по аргументу x первое и второе из уравнений (22), получим

$$\frac{\partial \ln \langle i \rangle}{\partial \bar{t}_k} = \int^x dx' \theta_i \bar{p}_i^{(1)} = \int^x dx' \theta_i \int^{x'} dx'' (\theta_{i+1} - \theta_{i-1}).$$

Вводя функции

$$v_i = \frac{\langle i+1 \rangle}{\langle i \rangle}, \quad u_i = \frac{\langle i-1 \rangle}{\langle i \rangle},$$

получим для них систему тождеств ($\theta_i = u_i v_i$)

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u_i}{\partial \bar{t}_2} &= \int^x dx' \theta_i \int^{x'} dx'' (\theta_{i+1} - \theta_{i-1}) - \int^x dx' \theta_{i-1} \int^{x'} dx'' (\theta_i - \theta_{i-2}), \\ \frac{\partial v_i}{\partial \bar{t}_2} &= \int^x dx' \theta_{i+1} \int^{x'} dx'' (\theta_{i+2} - \theta_i) - \int^x dx' \theta_i \int^{x'} dx'' (\theta_{i+1} - \theta_{i-1}). \end{aligned} \quad (23)$$

Эта система представляет собой в точности систему Дэви–Стьюартсона [10], переписанную в терминах дискретных преобразований, т.е. сдвигов. Действительно, переписанное в терминах функций (u, v) интегрируемое отображение УТ(1, 1) (21) принимает вид

$$\tilde{u} = v^{-1}, \quad \tilde{v} = v(uv - (\ln v)_{xy}) \quad (24)$$

и называется интегрируемым отображением ДТ [9].

Проводя все необходимые преобразования переменных в уравнении (23) с помощью уравнений (24), окончательно получаем ($u_i \rightarrow u$, $v_i \rightarrow v$)

$$-\dot{u} + u_{yy} + 2u \int dx (uv)_y = 0, \quad \dot{v} + v_{yy} + 2v \int dx (uv)_y = 0. \quad (25)$$

Это в точности система Дэви–Стьюартсона в своем оригинальном виде [10]. В одномерном пределе она принимает вид обычного нелинейного уравнения Шредингера.

В работе [9] была получена последовательность решений уравнения симметрии, соответствующего интегрируемой подстановке ДТ, при этом уравнения (23) являются простейшими из этих уравнений.

5.1.2. $k = 3$. Буквально повторяя вычисления для $k = 2$, получим

$$\frac{\partial \ln \langle i \rangle}{\partial \bar{t}_3} = \int^x dx' \theta_i \bar{p}_i^{(1)} = \int^x dx' \theta_i \int^{x'} dx'' (\theta_{i+2} \bar{p}_i^{(2)} - \theta_{i-1} \bar{p}_{i-1}^{(2)}).$$

Подставляя в последнее выражение $\bar{p}_i^{(2)}$ в терминах $\bar{p}_i^{(3)}$ и учитывая, что в данном случае необходимо взять $\bar{p}_i^{(3)} = 1$, окончательно получим для производной $\partial \ln \langle i \rangle / \partial \bar{t}_3$ выражение, состоящее из четырех членов. Уравнения (тождества) для u_i и v_i , в свою очередь, содержат восемь членов с тремя повторяющимися интегралами и точно соответствуют результатам, полученным в работе [9].

Стратегия вычислений в случае произвольного k теперь совершенно понятна, и окончательный результат совпадает с результатом работы [9].

Мы хотим обратить внимание читателя на тот факт, что построенные системы удовлетворяются при произвольном выборе индекса i . Это означает, что все построенные системы эволюционного типа инвариантны относительно преобразований подстановок ДТ (24).

5.2. Интегрируемые системы иерархии $UT(m_2, m_1)$. В общем случае обычная подстановка $UT(m_2, m_1)$ (19) возникает как следствие условия согласованности уравнений (2) и (20) (выберем для определенности “левое” время) относительно пары “пространственных” координат (y, x) , а относительно пространственно-временной пары $(\bar{t}_k, x)$ остается подстановка $UT(k, m_1)$ (требуется только сделать замену $m_2 \rightarrow k$ в уравнении (19)).

Явные решения обеих этих систем (с фиксированными концами) строятся из матричных элементов одного группового элемента K в соответствии с тем, как это было сделано в предыдущем разделе. Из соответствующей формулы читатель может видеть, что функции $\langle i \rangle$ и $p_i^{(s)}$ одинаковы в том, что касается их зависимостей от матричных элементов группового элемента K , однако эта зависимость совершенно иная для функции $\bar{p}_i^{(s)}$. Чтобы подчеркнуть этот факт, обозначим функцию $\bar{p}_i^{(s)}$ из пространственно-временной системы заглавной буквой.

Перепишем систему $UT(k, m_1)$ в удобных для нас обозначениях (с первыми двумя уравнениями, проинтегрированными по пространственной координате x):

$$\begin{aligned} \bar{P}_i^{(r)} &= \int^x dx' \sum_{q=1}^{m_2-r} (\Theta_{i+r}^{+(q-1)} p_{i+r}^{(q)} \bar{P}_i^{(q+r)} - \Theta_{i-1}^{-(q-1)} p_{i-q}^{(q)} \bar{P}_{i-q}^{(q+r)}), \\ \frac{\partial \ln(\langle i | K | i \rangle)}{\partial \bar{t}_k} &= \int^x dx' \theta_i^{-1} \sum_{p=0, q=0}^{p+q \leq \min\{k-1, m_1-1\}} \Theta_i^{-p} \Theta_i^{+q} p_{i-p}^{(p+q+1)} \bar{P}_{i-p}^{(p+q+1)}, \\ \frac{\partial p_i^{(r)}}{\partial \bar{t}_k} &= \sum_{q=1}^{m_1-r} (\Theta_{i+r}^{+(q-1)} \bar{P}_{i+r}^{(q)} p_i^{(q+r)} - \Theta_{i-1}^{-(q-1)} \bar{P}_{i-q}^{(q)} p_{i-q}^{(q+r)}). \end{aligned} \quad (26)$$

Учитывая условие $\bar{P}_i^{(k)} = 1$ и “нильпотентный” характер первой системы уравнений, мы можем решить последнюю систему и получить явные выражения для всех функций $\bar{P}_i^{(s)}$ в виде кратных интегралов по пространственной координате x с подынтегральными выражениями, являющимися некоторыми функционалами от функций $\langle i \rangle$ и $p_i^{(s)}$. Подставляя полученные таким образом выражения для функций $\bar{P}_i^{(s)}$ в две последние системы из (26), находим явный вид производных от функций $\langle i \rangle$ и $p_i^{(s)}$ по временному аргументу.

Аналогичным способом можно решить первую систему уравнений для подстановки $UT(m_2, m_1)$ в терминах функций $\bar{p}_i^{(s)}$ как функционалов того же типа, что и выше для функций $\langle i \rangle$ и $p_i^{(s)}$. Теперь в последней итерационной процедуре мы имеем $\bar{p}_i^{(m_2)} = 1(!)$. Знание временных производных функций $\langle i \rangle$ и $p_i^{(s)}$ позволяет построить временные производные для всех функций $\bar{p}_i^{(s)}$.

Таким образом, мы имеем временные производные для всех функций, входящих в подстановку $UT(m_2, m_1)$, в терминах функционалов от них и их дискретных сдвигов соответствующего (ограниченного) порядка. Однако с помощью уравнений отображения $UT(m_2, m_1)$ (19) всегда можно представить эти сдвиги в терминах ровно $2^{m_1+m_2-1}$ начальных функций и их производных с точностью до определенного порядка.

Таким образом, мы получили систему тождеств, связывающих временные производные $2^{m_1+m_2-1}$ функций, выраженные в достаточно громоздком функциональном виде

(одновременно нелинейном и нелокальном), и их пространственные производные.

Учитывая полученные нами уравнения, мы можем рассматривать последнюю систему как полностью интегрируемую с известной последовательностью солитоноподобных решений.

5.3. Решение нильпотентной цепочечной системы. До сих пор мы не рассматривали условия согласованности для двух пар нильпотентных систем. Для определенности рассмотрим пространственно-временную пару $(y, \bar{t}_k)$ и ограничимся случаем подстановки УТ(1, k). Перепишем соответствующую систему (как комбинацию компонент уравнений (2) и (20)):

$$(m_+)_{\bar{t}_k} = \left((\bar{g}_0)^{-1} (\bar{g}_0)_{\bar{t}_k} + \sum_{s=1}^k p^{(+s)} \right) m_+, \quad (m_+)_{\bar{y}} = ((\bar{g}_0)^{-1} (\bar{g}_0)_{\bar{y}} + I^{(+1)}) m_+, \quad (27)$$

где

$$\bar{g}_0 \equiv \exp \sum_{k=1}^r (h_k \tau_k).$$

Тождество Маурера–Картана, примененное к данной паре уравнений (27), эквивалентно цепочечной системе для неизвестных функций $\bar{g}_0$ и $\pi^{(+s)} = \bar{g}_0 p^{(+s)} \bar{g}_0^{-1}$ (дифференцирование по аргументу $\bar{t}_k$ обозначено точкой, по аргументу y – штрихом и сделана замена $\bar{g}_0 \rightarrow g$):

$$(\pi^{(+1)})' = g \dot{I}^{(+1)} g^{-1}, \quad (\pi^{(+s)})' = [\pi^{(+s-1)}, g I^{(+1)} g^{-1}], \quad (28)$$

где $\pi_i^{(+k)} = 1$ и $I^{(+s)}$ означают, что в $p^{(+s)}$ все $p_i^{(+s)} = 1$.

Вспоминая, что $p^{(+s)}$ (и соответственно $\pi^{(+s)}$) можно представить в виде прямой суммы компонент, перепишем (28) в компонентном виде:

$$\begin{aligned} (\pi_i^{(+1)})' &= (g_i \dot{g}_{i+1}^{-1}), & (g_i g_{i+k}^{-1})' &= \pi_i^{(k-1)} (g_{i+k-1} g_{i+k}^{-1}) - (g_i g_{i+1}^{-1}) \pi_{i+1}^{(k-1)}, \\ (\pi_i^{(+s)})' &= \pi_i^{(s-1)} (g_{i+s-1} g_{i+s}^{-1}) - (g_i g_{i+1}^{-1}) \pi_{i+1}^{(s-1)}, & 2 \leq s \leq (k-1). \end{aligned}$$

После окончательного отождествления $G_i \equiv g_i g_{i+1}^{-1} = \exp(\tau_{i+1} - 2\tau_i + \tau_{i-1})$ приходим к системе уравнений для неизвестных функций $G_i, \pi_i^{(+s)}$

$$\begin{aligned} (\pi_i^{(+1)})' &= \dot{G}_i, & (G_i G_{i+1} \dots G_{i+k-1})' &= \pi_i^{(k-1)} G_{i+k-1} - G_i \pi_{i+1}^{(k-1)}, \\ (\pi_i^{(+s)})' &= \pi_i^{(s-1)} G_{i+s-1} - G_i \pi_{i+1}^{(s-1)}, & 2 \leq s \leq (k-1). \end{aligned} \quad (29)$$

Хотя эта цепочечная система на первый взгляд выглядит очень сложной, ее решение можно получить в явном виде.

Для этого рассмотрим следующее линейное уравнение для неизвестной функции X :

$$\dot{X} = X^{(k)} + A^{(2)} X^{(k-2)} + \dots + A^{(k)} X, \quad (30)$$

где $A^{(s)}$ – произвольные функции двух аргументов y и $\bar{t}_k$.

Можно сделать следующее утверждение. Пусть

$$X_1 = \phi_1, \quad X_2 = \phi_1 \int^y dy' \phi_2(y'), \quad X_3 = \phi_1 \int^y dy' \phi_2(y') \int^{y'} dy'' \phi_3(y''), \quad \dots$$

— различные решения линейного уравнения (30), представленные в фробениусоподобном виде. Тогда решение системы (29) можно записать в терминах этих решений как

$$G_i = \phi_i \equiv \frac{\text{Det}_{i+1}(X)}{\text{Det}_i(X)}, \quad X_{p,q} = \frac{\partial^{p-1} X_q}{\partial y^{p-1}}, \quad (31)$$

где матрица X имеет тот же вид, что и матрица вронскиана. Функции $\pi_i^{(+s)}$, в свою очередь, можно выразить в терминах кратных интегралов с известными подынтегральными выражениями $G_i, \dot{G}_i$ после многократных интегрирований соответствующих “нильпотентных” систем (29).

Более того, для функций g_i , которые только и потребуются нам для дальнейших исследований, получаем

$$g_i \equiv (\bar{g}_0)_i = \text{Det}_i^{-1}(X). \quad (32)$$

Вместо того чтобы доказывать это утверждение в общем виде, проведем детальное рассмотрение двух примеров, из которых становится ясно, что происходит в общем случае.

5.3.1. $k = 2$. Система (29) принимает вид

$$(\pi_i^{(+1)})' = \dot{G}_i, \quad (G_i G_{i+1})' = \pi_i^{(+1)} G_{i+1} - G_i \pi_{i+1}^{(+1)}, \quad (33)$$

т.е. вид цепочечной системы уравнений для только одной неизвестной функции G_i :

$$(G_i G_{i+1})' = \int dy (\dot{G}_i) G_{i+1} - G_i \int dy (\dot{G}_{i+1}). \quad (34)$$

Теперь рассмотрим уравнение (30) при $k = 2$. Тогда для $\phi_{1,2}$ получаем

$$\dot{\phi}_1 = \phi_1'' + A^2 \phi_1, \quad \dot{\phi}_2 = (2\phi_1^{-1} \phi_2 + \phi_2)'$$

Уравнение

$$X_3 = \phi_1 \int^y dy \phi_2(y') x_2 \int^{y'} dy'' \phi_3(y'')$$

эквивалентно подстановке

$$\phi_2 \rightarrow \phi_2 \int dy \phi_3.$$

После тривиальных алгебраических вычислений приходим к тождеству

$$\phi_2 = \int dy \dot{\phi}_3 - \int dy \dot{\phi}_2 \phi_3 = (\phi_2 \phi_3)'$$

Дальнейшая подстановка

$$\phi_3 \rightarrow \phi_3 \int dy \phi_4$$

(причем X_4 также является решением уравнения (30)!) приводит нас к уравнению

$$\phi_3 = \int dy \dot{\phi}_4 - \int dy \dot{\phi}_3 \phi_4 = (\phi_3 \phi_4)'.$$

По индукции нетрудно показать, что каждая из двух функций ϕ подчинена соотношению

$$\phi_i = \int dy \dot{\phi}_{i+1} - \int dy \dot{\phi}_i \phi_{i+1} = (\phi_i \phi_{i+1})'.$$

Сравнивая последнее соотношение с (34), можно сделать вывод, что в рассматриваемом случае мы имеем

$$G_i = \phi_i, \quad \pi_i^{(+1)} = \int dy (\dot{G}_i),$$

так что утверждение (31) доказано.

5.3.2. $k = 3$. В этом случае система (29) принимает вид

$$\begin{aligned} (\pi_i^{(+1)})' &= \dot{G}_i, & (G_i G_{i+1} G_{i+2})' &= \pi_i^{(+2)} G_{i+2} - G_i \pi_{i+1}^{(+2)}, \\ (\pi_i^{(+2)})' &= \pi_i^{(+1)} \dot{G}_{i+1} - G_i \pi_{i+1}^{(+1)}, \end{aligned} \quad (35)$$

а после исключения всех функций $\phi_i^{(1,2)}$ мы приходим к цепочечной системе уравнений (одновременно нелинейных и нелокальных) для функций G_i :

$$\begin{aligned} G_{s+2}(y) &\left[\int^y dy' G_{s+1}(y') \int^{y'} dy'' \dot{G}_s(y'') - \int^y dy' G_s(y') \int^{y'} dy'' \dot{G}_{s+1}(y'') \right] - \\ &- G_s(y) \left[\int^y dy' G_{s+2}(y') \int^{y'} dy'' \dot{G}_s(y'') - \right. \\ &\left. - \int^y dy' G_{s+1}(y') \int^{y'} dy'' \dot{G}_{s+2}(y'') \right] = (G_s G_{s+1} G_{s+2})'. \end{aligned} \quad (36)$$

Теперь рассмотрим уравнение (30) для случая $k = 3$:

$$\dot{X} = X''' + A^2 X' + A^1 X. \quad (37)$$

Подставляя сюда решения X_1 и X_2 в соответствии с (31), получаем

$$\dot{\phi}_1 = \phi_1''' + A^2 \phi_1' + A^1 \phi_1, \quad \dot{\phi}_2 = (3\phi_1^{-1} \phi_1'' \phi_2 + 3\phi_1^{-1} \phi_1' \phi_2' + \phi_2'' + A^2 \phi_2)'.$$

Тот факт, что X_3 также является решением уравнения (37), эквивалентен замене $\phi_2 \rightarrow \phi_2 \int \phi_3$ и приводит к тождеству

$$\phi_2 \int \dot{\phi}_3 - \phi_3 \int \dot{\phi}_2 = (3\phi_1^{-1} \phi_1' \phi_2 \phi_3 + 2\phi_2' \phi_3 + \phi_2 \phi_3')'.$$

Окончательно после подстановки $\phi_3 \rightarrow \phi_3 \int \phi_4$, что эквивалентно предположению о том, что X_4 также является решением того же линейного уравнения, мы получаем искомое тождество:

$$\begin{aligned} \phi_2(y) & \left[\int^y dy' \phi_3(y') \int^{y'} dy'' \dot{\phi}_4(y'') - \int^y dy' \phi_4(y') \int^{y'} dy'' \dot{\phi}_3(y'') \right] - \\ & - \left[\int^y dy' \phi_2(y') \int^{y'} dy'' \dot{\phi}_3(y'') - \int^y dy' \phi_3(y') \int^{y'} dy'' \dot{\phi}_2(y'') \right] \phi_4(y) = \\ & = (\phi_2(y)\phi_3(y)\phi_4(y))'. \end{aligned}$$

По индукции это тождество можно продолжить на все три произвольные функции $\phi_s(y)$, $\phi_{s+1}(y)$ и $\phi_{s+2}(y)$, решая в явном виде систему (36) и доказывая предложенное выше утверждение (31).

5.4. Многосолитоноподобные решения ДТ-иерархии. Из полученных в предыдущем разделе результатов следует, что существует глубокая связь между общим решением двумерной решетки Тоды с фиксированными концами (использование которой эквивалентно использованию конечномерной алгебры A_n) и особыми солитоноподобными решениями систем ДТ-иерархии.

Чтобы получить такие решения для систем ДТ-иерархии, которые могут быть пронумерованы с помощью индекса k (см. (30)), требуется только заменить произвольные функции $\bar{g}_0(y)$, $(g_0(x))$ в общем решении цепочки Тоды, выраженном через функции $\langle i \rangle$, на функции $\bar{g}_0(y, t_k)$ из уравнения (32) и соответствующие выражения для $g_0(x, t_k)$.

Как следствие каждая пара функций

$$u^k \equiv u_i^k = \frac{\langle i-1 \rangle_k}{\langle i \rangle_k}, \quad v^k \equiv v_i^k = \frac{\langle i+1 \rangle_k}{\langle i \rangle_k}$$

одновременно удовлетворяет k -й системе интегрируемой ДТ-иерархии относительно лево- и правременных параметров. Первый нетривиальный пример такой ($k=2$)-иерархии – это система Дэви–Стюартсона (23), записанная в виде дискретных сдвигов, или система (25), содержащая обычные производные.

Для получения решений, инвариантных относительно внутреннего автоморфизма или, более точно, ДТ-подстановок (в этой связи см. [11–13]), необходимы некоторые дополнительные соображения.

6. ВОЗМОЖНОЕ ОБОБЩЕНИЕ НА МНОГОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Предположим, что для некоторых градуировок (хотя это может не всегда выполняться) “лагранжианы” $L^{(+m_1)}(y)$ и $L^{(-m_2)}(x)$ из уравнения (2) можно представить в блочном виде $L^{(+m_1)} = \sum_s L_s^{(+m_1)}$, где элементы различных блоков взаимно коммутируют:

$$[L_s^{(+m_1)}(y), L_{s'}^{(+m_1)}(y')] = 0$$

(при некоторых разложениях это может выполняться и для второго лагранжиана). Тогда решение уравнения (2) можно представить в виде произведения p_1 (где p_1 — число блоков типа записанных выше) взаимно коммутирующих множителей

$$M^+(y) = \prod_s^{p_1} M_s^+(y). \quad (38)$$

Рассмотрим вместо $M^+(y)$ новый элемент $M^+(y_1, \dots, y_{p_1})$, зависящий от p_1 аргументов y_s :

$$M^+(y_1, \dots, y_{p_1}) = \prod_s^{p_1} M_s^+(y_s).$$

Проведя аналогичную процедуру с M^- , мы получим функцию p_2 независимых аргументов со значениями в группе:

$$M^-(x_1, \dots, x_{p_2}) = \prod_s^{p_2} M_s^-(x_s).$$

Теперь построим элемент со значениями в группе

$$G = N_- M_+ = g_0 N_+ M_-$$

аналогично тому, как это было сделано в разделе 2. Тогда для p_1 и p_2 функций со значениями в алгебре

$$\begin{aligned} G_{x_i} G^{-1} &= (N_-)_{x_i} N_-^{-1} = \sum_s^{m_2} R_i^{(-s)}(x, y), \quad 1 \leq s \leq m_2, \\ G_{y_m} G^{-1} &= (g_0)_{y_m} g_0^{-1} + g_0 (N_+)_{y_m} N_+^{-1} (g_0)^{-1} = \\ &= (g_0)_{y_m} g_0^{-1} + \sum_s^{m_1} R_m^{(+s)}(x, y), \quad 1 \leq s \leq m_1, \end{aligned} \quad (39)$$

мы приходим к тому же выводу, что и в случае просто аргументов x и y .

Простейший случай такого построения для $m_1 = m_2 = 1$ был рассмотрен в работе [14] и назван авторами мультитодовским формализмом. В работе [14] авторы ограничились только некоторым числом простых примеров и не заметили в рассматриваемых примерах зависимости их конструкции от блочной структуры подпространств с градуировкой ± 1 . Например, в случае главного вложения условие согласованности $(l + m)$ операторов Лакса (полученное с помощью уравнений нулевой кривизны) эквивалентно простой замене переменных. Другими словами, в явном решении двумерной системы Тоды необходимо всего лишь произвести замену независимых переменных нашей задачи: $x \rightarrow X(x_1, \dots, x_m)$, $y \rightarrow Y(y_1, \dots, y_n)$ (здесь X, Y — произвольные функции своих аргументов). Это имеет место всегда, когда невозможно разложение лагранжианов (для данной алгебры и ее градуировки) на взаимно коммутирующие части. В общем случае согласно формуле (38) и ее обсуждению число дополнительных нетривиальных размерностей может быть равно только $(p_1 + p_2)$.

Чтобы пойти дальше, необходимо понять с чисто алгебраической точки зрения, как блочная структура типа описанной выше связана со свойствами алгебры и ее выбранной градуировкой. Мы пока не готовы представить всеобъемлющее решение этой задачи.

7. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ДАЛЬНЕЙШИЕ ПЕРСПЕКТИВЫ

Основной результат настоящей работы состоит в утверждении, что интегрируемые системы в размерности $(1+2)$ (и, конечно, в случае $(1+1)$, являющемся прямой редукцией предыдущего) есть не более чем уравнения эквивалентности в теории представлений полупростых алгебр и групп, “закодированные” некоторым нетривиальным способом. Это верно по крайней мере в рамках рассматриваемых здесь интегрируемых подстановок.

Мы имеем цепочку последовательных шагов: градуированные алгебры Ли – теория представлений – интегрируемые отображения (подстановки) и, наконец, иерархии интегрируемых систем эволюционного типа и их (солитоноподобные) решения. Последовательная реализация такой цепочки является не более чем теорией интегрируемых систем, принадлежащих к одной и той же иерархии в размерности $(2+2)$ (учтем существование параметров “левого” и “правого” времени).

С другой стороны, теория интегрируемых систем, в частности в размерностях $(1+1)$ и $(1+2)$, являлась до недавнего времени независимым направлением математической физики, имеющим свои собственные приемы и методы исследования [15]. Это означает только, что имеется много независимых методов исследования в теории представлений полупростых алгебр и групп. Применение этих методов в теории интегрируемых систем дает множество других возможностей.

Исследователи, работающие в этой области, много раз находили абсолютно независимыми способами различные формы двух тождеств Якоби (10) и (11) и многочисленных следствий из них. Конечно, для A_n -алгебры и ее главной градуировки можно заполнить всю эту работу на языке тождеств Якоби в детерминантном виде, что на первый взгляд не связано с теорией представлений и что можно сделать без всякого упоминания о ее существовании.

В контексте настоящей работы возникает много других задач, некоторые из которых мы хотели бы упомянуть.

Во-первых (что достаточно очевидно), можно попытаться обобщить предложенное в настоящей работе построение на случай произвольных полупростых алгебр и их градуировок, связанных с главным вложением. Такую задачу можно рассматривать как случай абелева интегрируемого отображения в рамках полупростых алгебр. Для ее решения необходимо использовать более детальную информацию о структуре алгебры при наличии кратных корней, как это имеет место для ее фундаментальных представлений в случае произвольной полупростой алгебры (в этой связи см. приложение).

Вторая задача – это обобщение на случай произвольно градуированных полупростых алгебр. В общем случае само подпространство с нулевым градуировочным индексом становится некоммутативной алгеброй, что ведет к дополнительным техническим трудностям. Типичным примером является простейший случай так называемой матричной решетки Тоды, рассматриваемый с различных точек зрения в работах [12–14].

И последняя задача в рамках наших комментариев: как выполнить такое построение в случае алгебр Ли общего положения и к какому типу интегрируемых подстановок это приведет? Это требует дополнительных и нетривиальных исследований.

Благодарности. Автор благодарен Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas, UNAM, за замечательные условия для работы. Автор благодарит Н. Атакишиева, С. М. Чумакова и К. Б. Вольфа за обсуждения в процессе работы над данной статьей, а также Д. Б. Фэрли за обсуждение результатов и большую помощь в процессе подготовки рукописи к публикации.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 98-01-0330) и CONACyT (проект J29148U).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Решетки $GToda(2, 2; s, \bar{s})$

Рассмотрим произвольную полупростую алгебру и ее главную градуировку и ограничимся в основных уравнениях (2) выбором $m_1 = m_2 = 2$. Смысл дополнительных параметров становится ясным из того, что будет приведено ниже (см. [6]).

В этом случае “лагранжианы” принимают вид

$$L_{\pm}^2 = (h\tau_{\pm}) + \sum X_{\alpha}^{\pm} \phi_{\alpha}^{\pm 1} + \frac{1}{2} \sum [X_{\alpha}^{\pm}, X_{\beta}^{\pm}] \phi_{\alpha, \beta}^{\pm 2}, \quad \phi_{\alpha, \beta}^{\pm 2} = -\phi_{\beta, \alpha}^{\pm 2}.$$

L_{-}^2 действует на вектор состояния $|i\rangle$ следующим образом:

$$L_{-}^2 |i\rangle = \left(\phi_i^{-1} + \sum_{k_{\alpha, i} \neq 0} \phi_{\alpha, i}^{-2} X_{\alpha}^{-} \right) X_i^{-} |i\rangle.$$

Вычисление производных от α^1 и $\bar{\alpha}^1$, см. (14), таким же способом, как и в основном тексте статьи (см. раздел 4), приводит к результату

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\alpha}_i^1}{\partial x} &= \langle i \rangle^{-2} \left(\phi_i^{-1} + \sum_{k_{\alpha, i} \neq 0} \phi_{\alpha, i}^{-2} (X_{\alpha}^{-})_{\text{left}} \right) \prod_{j=1, i \neq j}^r \langle j | G | j \rangle^{-k_{ij}} = \\ &= \theta_i (\phi_i^{-1} - \sum_j k_{ji} \phi_{j, i}^{-2} \alpha_j^1), \quad \theta_i = \prod_j \langle j | G | j \rangle^{-k_{ij}}, \quad k_{j, j} = 2. \end{aligned}$$

Для функций

$$p_i^1 = \theta_i^{-1} \frac{\partial \bar{\alpha}_i^1}{\partial x}, \quad \bar{p}_i^1 = \theta_i^{-1} \frac{\partial \alpha_i^1}{\partial y}$$

и для $\langle i \rangle$ получается замкнутая система тождеств

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_i^1}{\partial y} &= \sum_j k_{ji} \phi_{j, i}^{-2} \theta_j \bar{p}_j^1, \quad \frac{\partial \bar{p}_i^1}{\partial x} = \sum_j k_{ji} \phi_{j, i}^{+2} \theta_j p_j^1, \\ \frac{\partial^2 \ln \langle i \rangle}{\partial x \partial y} &= \theta_i p_i^1 \bar{p}_i^1 - \theta_i \sum_j k_{ji} \theta_j \phi_{j, i}^{-2} \phi_{j, i}^{+2}. \end{aligned} \tag{П.1}$$

Вторые смешанные частные производные от $\ln \langle i \rangle$ нетрудно вычислить, используя тот же способ, что и для первого из уравнений (П.1).

Сравнивая уравнение (19) (в случае $m_1 = m_2 = 2$) с уравнением (П.1), после подстановки в последнюю систему матрицы Картана A_n -алгебры мы обнаруживаем полную

идентичность этих систем при условии дополнительного выбора произвольных функций $\phi_{j,i}^{\pm} = 1$.

Для простоты в основном тексте статьи мы положили $\bar{p}_i^{m_2} = p_i^{m_1} = 1$, что представляет собой некоторое дополнительное предположение, от которого мы теперь хотим избавиться.

Очевидно, что основные уравнения (2) инвариантны относительно калибровочного преобразования с групповым элементом $\exp(h\tau_{\pm})$ ($\tau_+ \equiv \tau_+(y)$, $\tau_- \equiv \tau_-(x)$). С их помощью можно так преобразовать все функции $\phi_{\alpha,\beta}^{\pm 2}$, что они будут иметь постоянные значения. Будем работать в такой калибровке, где эти константы принимают значения 0 или 1 в произвольном порядке, и обозначим последовательности таких параметров символами $\bar{s}$, s . Это объясняет обозначение $\text{GToda}(2, 2; s, \bar{s})$ в заголовке данного приложения. Возникающие системы всегда отличаются по виду как от самих уравнений, так и от их общих решений (см. в этой связи работу [6]).

Список литературы

- [1] A. N. Leznov. The internal symmetry group and methods of field theory for integrating exactly soluble dynamic systems. In: Group Theoretical Methods in Physics (Proc. of International Seminar, Zvenigorod, 1982). Eds. M. A. Markov, V. I. Manko, and A. E. Shabad. New York: Harwood, 1985. P. 443–457.
- [2] D. B. Fairlie, A. N. Leznov. Phys. Lett. A. 1995. V. 199. P. 360–364; A. N. Leznov. Physica D. 1995. V. 87. P. 48–51.
- [3] A. N. Leznov. Two-dimensional Ultra-Toda integrable mappings and chains (Abelian case), hep-th/9703025; A. H. Лезнов. ТМФ. 1998. Т. 117. № 1. С. 107–122.
- [4] A. H. Лезнов, И. А. Федосеев. ТМФ. 1982. Т. 53. № 3. С. 358–373; I. A. Fedoseev, A. N. Leznov. Phys. Lett. B. 1984. V. 141. № 1–2. P. 100; A. H. Лезнов, М. А. Мухоморов. ТМФ. 1987. Т. 71. № 1. С. 46–53.
- [5] A. N. Leznov, V. G. Smirnov. Lett. Math. Phys. 1981. V. 5. P. 31–36.
- [6] V. B. Derjagin, A. N. Leznov, A. S. Sorin. Nucl. Phys. B. 1998. V. 527. P. 643.
- [7] P. L. Eisenhart. Continuous Groups of Transformations. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1933.
- [8] A. N. Leznov, M. V. Saveliev. Group-theoretical methods for integration of nonlinear dynamical systems. Progress in Physics. V. 15. Basel: Birkhauser-Verlag, 1992.
- [9] V. B. Derjagin, A. N. Leznov, E. A. Yuzbashjan. The two-dimensional integrable mappings and hierarchies of integrable systems. Preprint MPI-96-40. Bonn, 1996.
- [10] A. Davey, K. Stewartson. Proc. Roy. Soc. A. 1974. V. 338. P. 101–109.
- [11] A. H. Лезнов. ТМФ. 1980. Т. 42. С. 343–355.
- [12] A. N. Leznov, E. A. Yuzbashjan. Multi-soliton solution of two-dimensional matrix Davey–Stewartson equation. Preprint MPI-96-37. Bonn, 1996; Nucl. Phys. B. 1997. V. 496 [PM]. P. 643–653; Lett. Math. Phys. 1995. V. 35. P. 345–349.
- [13] И. Гельфанд, В. Ремах. Функц. анализ и его прилож. 1991. Т. 25. № 2. С. 13–25; 1992. Т. 26. № 4. С. 1–20; P. Etingof, I. Gelfand, V. Retakh. Math. Research Letters. 1997. V. 4. P. 413–425.
- [14] A. V. Razumov, M. V. Saveliev. Maximally Nonabelian Toda Systems. hep-th/9612081.
- [15] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский. Теория солитонов: Метод обратной задачи рассеяния. М.: Наука, 1980; Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986; П. Олвер. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989; L. A. Dickey. Soliton equations and Hamiltonian systems. London: World Scientific, 1991.