Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Маньяс, Сети, решетки и многокомпонентные КП-иерархии, *ТМФ*, 2000, том 122, номер 2, 272–283

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf568>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 15:30:51

© 2000 г.

М. Маньяс*

СЕТИ, РЕШЕТКИ И МНОГОКОМПОНЕНТНЫЕ КП-ИЕРАРХИИ

Дается обзор некоторых полученных ранее результатов о связи между геометрическими сетями и решетками и теорией КП-иерархий.

1. ВВЕДЕНИЕ

Мы приводим некоторые результаты, полученные нами ранее совместно с Долива, Мартинесом Алонсо, Медина и Сантини [1–3], относительно тесной связи между классической дифференциальной геометрией сопряженных и ортогональных сетей и многокомпонентной иерархией Кадомцева–Петвиашвили (КП); в качестве одного из следствий получена связь с новой дискретной геометрической теорией четырехугольных и циркулярных решеток.

Используя билинейную формулировку N -компонентных КП- и ВКП-иерархий, мы показали, что:

- 1) многокомпонентные КП- и ВКП-иерархии моделируют изосопряженные и изортогональные деформации соответственно сопряженных и ортогональных сетей;
- 2) вертексные операторы этих многокомпонентных иерархий соответствуют классическим геометрическим преобразованиям:
 - а) преобразование Шлезингера многокомпонентной КП-иерархии – это преобразование Лапласа;
 - б) основные вертексные операторы многокомпонентной КП-иерархии являются преобразованиями Леви и сопряженными преобразованиями Леви;
 - в) составные вертексные операторы многокомпонентной КП-иерархии диагонального типа суть фундаментальные преобразования;
 - г) основные вертексные операторы многокомпонентной ВКП-иерархии являются преобразованием Рибокура;
- 3) дискретизация типа Мивы порождает соответствующие решетки:

*Departamento de Matemática Aplicada y Estadística, Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Areonáutica, Universidad Politécnica de Madrid, Madrid, Spain. Departamento de Métodos Matemáticos de la Física, Universidad Complutense, Madrid, Spain.

- а) преобразование Мивы типа Леви дискретизирует сопряженную сеть в четырехугольную решетку;
- б) фундаментальное преобразование типа Мивы для многокомпонентных КП- и ВКП-иерархий порождает соответствующие четырехугольные и циркулярные решетки.

Статья построена следующим образом. В разделе 2 мы даем введение в геометрические построения, а в разделе 3 напоминаем, что такое многокомпонентные КП-теории, и переходим затем к результатам, полученным нами в терминах функций Бейкера.

2. СЕТИ И РЕШЕТКИ

2.1. Сопряженные и ортогональные сети и их преобразования.

2.1.1. Сопряженные сети и их преобразования. Системы криволинейных координат $\mathbf{u} := (u_1, \dots, u_M) \in \mathbb{R}^M$ на M -мерных гиперповерхностях в объемлющем евклидовом пространстве $\mathbb{R}^N$, $N \geq M$, определяются отображениями максимального ранга $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{x}(\mathbf{u})$, где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ — декартовы координаты в $\mathbb{R}^N$. Сопряженные системы с криволинейными координатами (и связанные с ними сопряженные сети или согласно [4] просто сети, образованные координатными линиями) являются расширениями соответствующих понятий для поверхностей [5–7]. Сеть построена из $\binom{M}{2}$ координатных поверхностей; две ее координатные линии сопряжены в данной точке, если соответствующие касательные направления являются сопряженными диаметрами индикатрисы Дюпена (или индикатрисы кривизны) и, таким образом, ортогональны по отношению к ассоциированной второй фундаментальной форме [8].

Уравнения Дарбу

$$\frac{\partial \beta_{ij}}{\partial u_k} = \beta_{ik} \beta_{kj}, \quad i, j, k = 1, \dots, M, \quad i, j, k \text{ различны,}$$

для так называемых коэффициентов вращения $\{\beta_{ij}\}_{i,j=1,\dots,M}^{i \neq j}$ характеризуют M -мерные сопряженные сети и являются условиями совместности для линейной системы

$$\frac{\partial \mathbf{X}_j}{\partial u_i} = \beta_{ji} \mathbf{X}_i, \quad i, j = 1, \dots, M, \quad i \neq j, \quad (1)$$

в которую входят касательные векторы $\mathbf{X}_i(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^N$ к координатным линиям. Так называемые коэффициенты Ламе H_i удовлетворяют сопряженной линейной системе

$$\frac{\partial H_j}{\partial u_i} = \beta_{ij} H_i, \quad i, j = 1, \dots, M, \quad i \neq j,$$

в терминах которой точки $\mathbf{x}$ сети находятся с помощью уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i} = \mathbf{X}_i H_i, \quad i = 1, \dots, M.$$

Преобразования сопряженной сети [4, 5, 7] строятся с помощью прямолинейных конгруэнций. Рассмотрим отображение $\mathbb{I}$, ставящее каждому $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^M$ в соответствие линию $\mathbb{I}$ в $\mathbb{R}^N$, примером чего является i -я касательная конгруэнция сопряженной сети, которая каждому $\mathbf{u}$ ставит в соответствие касательную линию к i -й координатной линии. Эти отображения $\mathbb{I}: \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{L}(\mathbb{R}^N)$ называются прямолинейной конгруэнцией, если они имеют фокальные сети; сеть, чья j -я координатная линия касательна к линиям $\mathbb{I}$, называется j -й фокальной сетью к прямолинейной конгруэнции. Сопряженная сеть и прямолинейная конгруэнция сопряжены, если их пересечения происходят по координатным линиям, т.е. если при вариации координаты u_i в $\mathbb{I}$ соответствующее пересечение с поверхностью содержится в i -й координатной линии.

А. Преобразование Лапласа $\mathcal{L}_{ij}(\mathbf{x})$, $i \neq j$, сопряженной сети $\mathbf{x}$ является j -й фокальной сетью i -й касательной конгруэнции точки $\mathbf{x}$ [5]. В простых терминах это означает, что линия, касательная к i -й координатной линии в точке $\mathbf{x}$ сети, касательна к j -й координатной линии преобразованной сети в соответствующей точке $\mathcal{L}_{ij}(\mathbf{x})$.

Положения точек преобразованной сети даются формулой [5, 9]

$$\mathcal{L}_{ij}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \frac{H_j}{\beta_{ij}} \mathbf{X}_i.$$

Б. Преобразование Леви $\mathcal{L}_i(\mathbf{x})$ сопряженной сети $\mathbf{x}$ является сетью, сопряженной к i -й касательной конгруэнции [4, 10], т.е. линии $\langle \mathbf{x}, \mathcal{L}_i(\mathbf{x}) \rangle$ касательны в $\mathbf{x}$ к i -й координатной линии.

Положения точек новых сетей имеют вид [4, 9]

$$\mathcal{L}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \frac{\Omega[\zeta, H]}{\zeta_i} \mathbf{X}_i,$$

где ζ_k , $k = 1, \dots, N$, – решение линейной системы (1), а $\Omega[\zeta, H]$ – решение уравнений

$$\frac{\partial \Omega}{\partial u_k} = \zeta_k H_k, \quad k = 1, \dots, N.$$

В. Присоединенное преобразование Леви $\mathcal{L}_i^*(\mathbf{x})$ сопряженной сети $\mathbf{x}$ является i -й фокальной сетью сопряженной конгруэнции к $\mathbf{x}$ [4], т.е. линии $\langle \mathbf{x}, \mathcal{L}_i^*(\mathbf{x}) \rangle$ касательны к i -й координатной линии новой сети. Преобразованные положения точек имеют вид [4, 9]

$$\mathcal{L}_i^*(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \frac{C[\mathbf{X}, \zeta^*]}{\zeta_i^*} H_i,$$

где ζ_k^* , $k = 1, \dots, N$, – решение сопряженной линейной системы, а вектор Комбескюра $C[\mathbf{X}, \zeta^*]$ является решением уравнений

$$\frac{\partial C}{\partial u_k} = \mathbf{X}_k \zeta_k^*, \quad k = 1, \dots, N.$$

Г. Фундаментальное преобразование $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ сопряженной сети $\mathbf{x}$ имеет те же сопряженные конгруэнции, что и $\mathbf{x}$, т.е. линии $\langle \mathbf{x}, \mathcal{F}(\mathbf{x}) \rangle$ пересекают обе сети вдоль координатных линий. Это можно рассматривать как композицию преобразования Леви и сопряженного преобразования Леви $\mathcal{F}_i = \mathcal{L}_i \circ \mathcal{L}_i^*$. Фундаментальное преобразование имеет вид [4, 11, 12]

$$\mathcal{F}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - C[\mathbf{X}, \zeta^*] \frac{\Omega[\zeta, H]}{\Omega[\zeta, \zeta^*]},$$

где $\Omega[\zeta, \zeta^*]$ – решение уравнения

$$\frac{\partial \Omega}{\partial u_k} = \zeta_k \zeta_k^*, \quad k = 1, \dots, N.$$

Отметим, что преобразование Леви, сопряженное преобразование Леви и преобразование Лапласа можно восстановить из фундаментального преобразования взятием подходящих пределов, в которых одна или две сети (или обе сети), сопряженные к конгруэнции преобразования, являются фокальными сетями конгруэнции [4, 13].

2.1.2. *Ортогональные сети и их преобразования.* Теперь мы считаем, что $N = M$ и сеть является просто системой криволинейных координат на N -мерном евклидовом пространстве. Среди этих криволинейных координатных систем имеются ортогональные [14–16], для которых

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_j} = 0, \quad i \neq j,$$

где

$$\mathbf{g}_i = \frac{1}{H_i} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}, \quad i = 1, \dots, N,$$

– соответствующие нормированные касательные векторы, а

$$H_i := \left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i} \right\|, \quad i = 1, \dots, N,$$

являются коэффициентами Ламе. Как было показано Дюпенем [8], координатные поверхности пересекаются на линиях кривизны, т.е. координатные линии на поверхности ортогональны по отношению к первой и второй фундаментальным формам (а потому сопряжены).

Оказывается, что ортонормированный репер $\{\mathbf{g}_j\}_{j=1}^N$ удовлетворяет системе

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial u_j} - \beta_{ij} \mathbf{g}_j &= 0, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad i \neq j, \\ \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial u_i} + \sum_{\substack{k=1, \dots, N \\ k \neq i}} \beta_{ki} \mathbf{g}_k &= 0, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned}$$

где β_{ij} – коэффициенты вращения:

$$\beta_{ij} := \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_j}{\partial u_i}.$$

Из совместности этой системы следуют так называемые уравнения Ламе для коэффициентов вращения:

$$\frac{\partial \beta_{ij}}{\partial u_k} - \beta_{ik} \beta_{kj} = 0, \quad i, j, k = 1, \dots, N, \quad i, j, k \text{ различны}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \beta_{ij}}{\partial u_i} + \frac{\partial \beta_{ji}}{\partial u_j} + \sum_{\substack{k=1, \dots, N \\ k \neq i, j}} \beta_{ki} \beta_{kj} = 0, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad i \neq j. \quad (3)$$

2.1.3. Преобразование Рибокура. Преобразование Рибокура [4, 7, 15–17] является редукцией фундаментального преобразования, сохраняющей ортогональный характер сети. Обе ортогональные сети – это по существу касательные к семействам гипербол в $\mathbb{R}^N$; их можно восстановить, изучая сети в квадратах [7]. Функции ζ_i удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial \zeta_i}{\partial u_j} = \beta_{ij} \zeta_j, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad i \neq j,$$

а для новых ортогональных координат $\mathcal{R}(\mathbf{x})$ имеем

$$\mathcal{R}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2 \frac{1}{\sum_{k=1}^N \zeta_k^2} \Omega(\zeta, H) \sum_{k=1}^N \zeta_k \mathbf{g}_k.$$

2.2. Четырехугольные и циркулярные решетки.

2.2.1. Четырехугольные решетки. Среди M -мерных решеток $\mathbf{x}: \mathbb{Z}^M \rightarrow \mathbb{R}^N$ в окружающем евклидовом пространстве $\mathbb{R}^N$ имеется выделенный класс решений, для которых элементарные четырехугольники являются планарными [9, 18, 19]. Введем оператор трансляции T_i дискретных переменных n_i :

$$T_i f(n_1, \dots, n_i, \dots, n_N) = f(n_1, \dots, n_i + 1, \dots, n_N),$$

и соответствующий оператор частного дифференцирования $\Delta_i = T_i - 1$. Условие планарности можно выразить через линейные уравнения

$$\Delta_j C_i = (T_j Q_{ij}) C_j, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad i \neq j,$$

для подходящим образом перенормированных касательных векторов $C_i(\mathbf{n}) \in \mathbb{R}^N$. Условия совместности этих уравнений имеют вид

$$\Delta_k Q_{ij} = (T_k Q_{ik}) Q_{kj}, \quad i, j, k \text{ различны}.$$

Точки $\mathbf{x}$ решетки можно найти с помощью дискретного интегрирования уравнений

$$\Delta_i \mathbf{x} = (T_i H_i) C_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

где H_i – решения уравнений

$$\Delta_i H_j = Q_{ij} T_i H_i, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad i \neq j.$$

2.2.2. Циркулярные решетки. Прямоугольные решетки $\mathbf{x}: \mathbb{Z}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, для которых каждая четырехугольная решетка вписана в окружность, называются циркулярными циклическими решетками [13, 20–23]. Можно показать, что условие

$$C_i \cdot T_i(C_j) + C_j \cdot T_j(C_i) = 0, \quad i \neq j,$$

для касательных векторов эквивалентно требованию, чтобы решетка была циркулярной.

3. МНОГОКОМПОНЕНТНЫЕ КП-ИЕРАРХИИ

3.1. N -компонентные КП-иерархии. В терминах тау-функций $\tau(\ell, \mathbf{t})$ N -компонентная КП-иерархия [24–26] имеет вид

$$\int_{S^1} dz \sum_{m=1}^N (-1)^{\sum_{j>m} \ell_j + \ell'_j} \exp(\xi(z, \mathbf{t}_m - \mathbf{t}'_m)) z^{\ell_m - \ell'_m - 2} \times \\ \times \tau\left(\ell - \mathbf{e}_m, \mathbf{t} - \left[\frac{1}{z}\right] \mathbf{e}_m\right) \tau\left(\ell' + \mathbf{e}_m, \mathbf{t}' + \left[\frac{1}{z}\right] \mathbf{e}_m\right) = 0 \quad (4)$$

для любых $\mathbf{t}, \mathbf{t}'$ и ℓ, ℓ' , таких что $\ell_1 + \dots + \ell_N - 1 = \ell'_1 + \dots + \ell'_N + 1 = 0$. Здесь мы использовали определения

$$\begin{aligned} \ell &:= (\ell_1, \dots, \ell_N) \in \mathbb{Z}^N, \\ \mathbf{t} &:= (\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_N) \in C^{N \cdot \infty}, \quad \mathbf{t}_i := (t_{i,1}, t_{i,2}, \dots) \in C^\infty, \\ \xi(z, \mathbf{t}_i) &:= \sum_{n=1}^{\infty} z^n t_{i,n}, \\ [z] &:= \left(\frac{1}{z}, \frac{1}{2z^2}, \frac{1}{3z^3}, \dots\right). \end{aligned}$$

При фиксированном ℓ введем обозначения

$$\begin{aligned} \tau(\mathbf{t}) &:= \tau(\ell, \mathbf{t}), \\ \tau_{ij}(\mathbf{t}) &:= \mathcal{S}_{ij} \tau(\mathbf{t}) := \tau(\ell + \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j, \mathbf{t}). \end{aligned}$$

Заметим, что векторы $\alpha_{ij} = \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j$ являются корнями корневой системы A_{N-1} , так что любая их линейная комбинация с целыми коэффициентами есть точка в соответствующей решетке корней. Операторам сдвига $\mathcal{S}_{ij}$ вдоль векторов корневой решетки α_{ij} соответствует так называемое преобразование Шлезингера в теории монодромии [24, 25, 27].

$N \times N$ -матричную функцию Бейкера ψ и ее сопряженную функцию ψ^* можно определить в терминах тау-функции как

$$\begin{aligned} \psi_{ij}(z, \mathbf{t}) &= \varepsilon_{ij} z^{\delta_{ij}-1} \frac{\tau_{ij}(\mathbf{t} - [z] \mathbf{e}_j)}{\tau(\mathbf{t})} \exp(\xi(z, \mathbf{t}_j)), \\ \psi_{ij}^*(z, \mathbf{t}) &= \varepsilon_{ji} z^{\delta_{ij}-1} \exp(-\xi(z, \mathbf{t}_i)) \frac{\tau_{ij}(\mathbf{t} + [z] \mathbf{e}_i)}{\tau(\mathbf{t})}, \end{aligned}$$

где $\varepsilon_{ij} := \text{sign}(j - i)$, $j \neq i$ ($\varepsilon_{ii} := 1$). Заметим, что мы имеем

$$\begin{aligned} \psi(z, \mathbf{t}) &:= \chi(z, \mathbf{t}) \psi_0(z, \mathbf{t}), \\ \psi^*(z, \mathbf{t}) &:= \psi_0(z, \mathbf{t})^{-1} \chi^*(z, \mathbf{t}), \end{aligned}$$

где $\psi_0(z, \mathbf{t}) = \text{diag}(\exp(\xi(z, \mathbf{t}_1)), \dots, \exp(\xi(z, \mathbf{t}_N)))$, а χ и χ^* – затравочные функции Бейкера с асимптотическим разложением

$$\begin{aligned}\chi(z) &\sim 1 + \beta z^{-1} + \mathcal{O}(z^{-2}), & z \rightarrow \infty, \\ \chi^*(z) &\sim 1 - \beta z^{-1} + \mathcal{O}(z^{-2}), & z \rightarrow \infty,\end{aligned}$$

причем матрица β дается выражением

$$\begin{aligned}\beta_{ii}(\mathbf{t}) &:= -\frac{\partial \ln \tau(\mathbf{t})}{\partial u_i}, & i = 1, \dots, N, \\ \beta_{ij}(\mathbf{t}) &:= \varepsilon_{ij} \frac{\tau_{ij}(\mathbf{t})}{\tau(\mathbf{t})}, & i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, N,\end{aligned}$$

где $u_k := t_{k,1}$, $k = 1, \dots, N$.

Выполняя подстановки $\ell \rightarrow \ell + \mathbf{e}_i$ и $\ell' \rightarrow \ell - \mathbf{e}_j$ в уравнении (4), получим

$$\int_{S^1} dz \psi(z, \mathbf{t}) \psi^*(z, \mathbf{t}') = 0. \quad (5)$$

Оба билинейных равенства (4) и (5) полезны для характеристики N -компонентной КП-иерархии. В частности, уравнение (5) подходит для формулировки грассманова подхода к иерархии [28, 29], которая, в свою очередь, очень удобна при выводе линейной системы уравнений для функций Бейкера. В частности, получаем

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial u_k} = \beta_{ik} \psi_k,$$

где $\psi_i := (\psi_{i1}, \dots, \psi_{iN})$. Для данной функции Бейкера ψ строятся ассоциированные сопряженные сети, для которых β берется из уравнения (1) с касательными векторами $\mathbf{X}_i$:

$$\mathbf{X}_i(\mathbf{t}) = \int_{S^1} dz \psi_i(z, \mathbf{t}) f(z),$$

определенными по некоторому диагональному матричному распределению $f(z)$. Из сопряженной функции Бейкера ψ^* коэффициенты Ламе получаются в виде

$$H_i(\mathbf{t}) = \sum_{j=1}^N \int_{S^1} h_j(z) \psi_{ji}^*(z, \mathbf{t}) dz, \quad i = 1, \dots, N,$$

для подходящих распределений $\{h_j\}_{j=1, \dots, N}$.

Мы приходим к выводу, что решения N -компонентной КП-иерархии описывают N -мерные сопряженные сети с M координатами u_i , выбранными среди $t_{i,1}$, $i = 1, \dots, N$, в то время как остальные времена $t_{i,k}$ при $k > 1$ описывают интегрируемые изосопряженные деформации сетей (остальные времена $t_{i,1}$ ассоциированы с дополнительными сопряженными координатными линиями, и все вместе участвуют в построении системы сопряженных координатных линий в $\mathbb{R}^N$).

Запишем теперь соответствие между классическими геометрическими преобразованиями и преобразованиями симметрии в N -компонентной КП-иерархии.

А. Преобразование Шлезингера является преобразованием Лапласа

$$\mathcal{L}_{ij}(\mathbf{X}_k) = \varepsilon_{ki} \varepsilon_{kj} \mathcal{S}_{ij}(\mathbf{X}_k).$$

Б. Отрицательный когерентный сдвиг вдоль времен – это преобразование Леви

$$\mathcal{L}_i(\mathbf{X}_j)(\mathbf{t}) = p^{\delta_{ij}} \mathbf{X}_j(\mathbf{t} - [p]\mathbf{e}_i),$$

где $\mathcal{L}_i$ обозначает преобразование Леви с данными

$$\zeta_j := \frac{d^n \psi_{ji}}{dz^n}(p), \quad j = 1, \dots, M,$$

а $n \geq 0$ – порядок первой ненулевой z -производной i -го столбца функции ψ в точке p .

В. Положительный когерентный сдвиг по временам является сопряженным преобразованием Леви

$$\mathcal{L}_i^*(\mathbf{X}_j)(\mathbf{t}) = \frac{1}{p^{\delta_{ij}}} \mathbf{X}_j(\mathbf{t} + [p]\mathbf{e}_i),$$

где $\mathcal{L}_i^*$ обозначает сопряженное преобразование Леви с данными

$$\zeta_j^*(\mathbf{t}) = \frac{d^m \psi_{ij}^*}{dz^m}(p, \mathbf{t}), \quad j = 1, \dots, M,$$

а m – порядок первой не исчезающей z -производной от i -й строки функции ψ^* в точке $z = p$, и вектор Комбескюра равен

$$C_i(\mathbf{t}) = -\frac{1}{p} \psi_i(\mathbf{t} + [p]\mathbf{e}_i) \zeta_i^*(\mathbf{t}).$$

Г. В контексте теории тау-функции солитонные решения порождаются составными вертексными операторами. В дальнейшем мы сконцентрируем внимание на диагональном случае $i = j$:

$$X_i(p, q) \tau(\ell, \mathbf{t}) := \left(\frac{p}{q} \right)^{\ell_i} \exp(\xi(p, \mathbf{t}_i) - \xi(q, \mathbf{t}_i)) \tau(\ell, \mathbf{t} + ([q] - [p])\mathbf{e}_i).$$

Индуктированное действие этого вертексного оператора на функции Бейкера дается фундаментальным преобразованием

$$\mathcal{F}_i(\mathbf{X}_j) = \mathbf{X}_j - \frac{C_i}{\Omega} \zeta_j, \quad j = 1, \dots, N,$$

с данными $\zeta_j(\mathbf{t}) = (1 - p/q) \psi_{ji}(p, \mathbf{t})$ и $\zeta_j^*(\mathbf{t}) = \psi_{ij}^*(q, \mathbf{t})$, $j = 1, \dots, N$, и потенциалами

$$C_i(\mathbf{t}) = -\frac{1}{q} \mathbf{X}_i(\mathbf{t} + [q]\mathbf{e}_i) \zeta_i^*(\mathbf{t}),$$

$$\Omega(\mathbf{t}) = -\frac{1}{a} \frac{q^{\ell_i-1}}{p^{\ell_i}} - \frac{1}{q} \zeta_i(\mathbf{t} + [q]\mathbf{e}_i) \zeta_i^*(\mathbf{t}).$$

3.2. N -компонентная ВКП-иерархия. N -компонентная ВКП-иерархия [30] определяется в терминах билинейного уравнения для тау-функции

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \int_{S^1} \frac{dz}{2\pi iz} \exp(\xi(z, \mathbf{t}_k) - \xi(z, \mathbf{t}'_k)) \tau_{ik}(\mathbf{t} - [z]\mathbf{e}_k) \tau_{jk}(\mathbf{t}' + [z]\mathbf{e}_k) = \\ = \sum_{k=1}^N \tau_{ki}(\mathbf{t}) \tau_{kj}(\mathbf{t}'), \quad i, j = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (6)$$

где теперь

$$\begin{aligned} \mathbf{t} = (\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_N) \in \mathbb{C}^{N \cdot \infty}, \quad \mathbf{t}_i := (t_{i,1}, t_{i,3}, t_{i,5}, \dots) \in \mathbb{C}^\infty, \\ \xi(z, \mathbf{t}_i) := \sum_{n=1}^{\infty} z^{2n+1} t_{i,2n+1}, \\ [z] := 2 \left(\frac{1}{z}, \frac{1}{3z^3}, \frac{1}{5z^5}, \dots \right). \end{aligned}$$

Функция Бейкера записывается как

$$\psi(z, \mathbf{t}) := \mathcal{T}^{-1}(\mathbf{t}) \varphi(z, \mathbf{t}),$$

где

$$\mathcal{T}(\mathbf{t}) := (\tau_{ij}(\mathbf{t})), \quad \varphi_{ij}(z, \mathbf{t}) := \tau_{ij}(\mathbf{t} - [z]\mathbf{e}_j) \exp(\xi(z, \mathbf{t}_j)),$$

а билинейное уравнение (6) принимает вид

$$\int_{S^1} \frac{dz}{2\pi iz} \psi(z, \mathbf{t}) \psi^t(-z, \mathbf{t}') = G(\mathbf{t}) G^t(\mathbf{t}'), \quad G(\mathbf{t}) := \mathcal{T}^{-1}(\mathbf{t}) \mathcal{T}^t(\mathbf{t}). \quad (7)$$

По построению асимптотическое поведение функции Бейкера дается выражением

$$\psi(z, \mathbf{t}) = \chi(z, \mathbf{t}) \psi_0(z, \mathbf{t}),$$

где

$$\chi(z, \mathbf{t}) \sim 1 + \beta(\mathbf{t}) z^{-1} + \mathcal{O}(z^{-2}), \quad z \rightarrow \infty.$$

Прямым следствием уравнения (7) при $\mathbf{t} = \mathbf{t}'$ является ортогональность матрицы $G(\mathbf{t})$. Более того, допуская, что функция Бейкера мероморфна внутри единичной окружности, мы видим, что можно положить $G(\mathbf{t}) = \psi(0, \mathbf{t})$.

Для вывода линейной системы для функций Бейкера используется подход аффинного типа в духе грассманиана. Таким образом, можно заключить, что:

1) векторы $\psi_i(z, \mathbf{t})$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial u_j} - \beta_{ij} \psi_j = 0, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad i \neq j;$$

2) векторы $\mathbf{g}_i(z, \mathbf{t})$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial u_j} - \beta_{ij} \mathbf{g}_j &= 0, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad i \neq j, \\ \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial u_i} + \sum_{\substack{k=1, \dots, N \\ k \neq i}} \beta_{ki} \mathbf{g}_k &= 0, \quad i = 1, \dots, N'; \end{aligned}$$

3) коэффициенты β_{ij} являются решениями уравнений Ламе (2) и (3).

Таким образом, решения N -компонентной ВКП-иерархии дают N -мерные ортогональные сети с координатами $u_i = t_{i,1}$, $i = 1, \dots, N$, а оставшиеся времена $t_{i,2k-1}$ при $k > 1$ являются их интегрируемыми изоортогональными деформациями.

Наконец, положительный когерентный сдвиг представляет собой преобразование Рибокура

$$\mathcal{R}(\mathbf{g}_j)(\mathbf{t}) = (-1)^{\delta_{ij}} \mathbf{g}_j(\mathbf{t} + [p]\mathbf{e}_i),$$

характеризующееся данными $\zeta_k(\mathbf{t}) := \psi_{ki}(-p, \mathbf{t})$, $k = 1, \dots, N$.

3.3. Решетки в многокомпонентной КП-теории и преобразование Мивы.

Многокомпонентная КП-теория подходит также для порождения с помощью преобразования типа Мивы [31] интегрируемых решеток четырехугольного и циркулярного типов. С геометрической точки зрения путем итераций преобразования Леви или фундаментального преобразования для сопряженной сети можно получить четырехугольную решетку, а для ортогональной сети итерации преобразования Рибокура дают циркулярную решетку.

Заметим, что для четырехугольной решетки две упомянутые процедуры имеют различный оттенок, итерацию преобразования Леви можно понимать как схему дискретизации сопряженной сети, а итерация фундаментального преобразования является не дискретизацией, а схемой, с помощью которой получается соответствующая решетка.

1. Для каждого комплексного числа p , $|p| > 1$, мы можем ввести новые функции, зависящие от N дополнительных дискретных переменных, $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^N$, определив

$$\Psi(z, \mathbf{t}, \mathbf{n}) := \psi(z, \mathbf{t} - [p]\mathbf{n}), \quad \Psi^*(z, \mathbf{t}, \mathbf{n}) := \psi^*(z, \mathbf{t} - [p]\mathbf{n}),$$

где подразумевается, что

$$\mathbf{t} - \mathbf{n}[p] = (\mathbf{t}_1 - n_1[p], \mathbf{t}_2 - n_2[p], \dots, \mathbf{t}_N - n_N[p]).$$

Используя метод грассманиана, легко показать, что объекты

$$Q_{ij}(\mathbf{t}, \mathbf{n}) := -\frac{1}{p} \beta_{ij}(\mathbf{t} - [p]\mathbf{n}), \quad C_i := \Psi_i$$

определяют четырехугольную решетку.

2. Для данных комплексных чисел $p, q \in \mathbb{C}$, $|p|, |q| > 1$, четырехугольная решетка порождается из сопряженной сети с помощью соотношений

$$\begin{aligned}\Psi(z, \mathbf{t}, \mathbf{n}) &:= \psi(z, \mathbf{t} + ([p] - [q])\mathbf{n}), \\ \Psi^*(z, \mathbf{t}, \mathbf{n}) &:= \psi^*(z, \mathbf{t} + ([p] - [q])\mathbf{n}),\end{aligned}$$

где $\mathbf{n} = n_1 \mathbf{e}_1 + \dots + n_N \mathbf{e}_N \in \mathbb{Z}^N$.

Преобразование Мивы порождает четырехугольную решетку с дискретными коэффициентами вращения и перенормированными касательными векторами

$$\begin{aligned}T_j Q_{ij} &= \frac{[\text{Res}_p(T_i T_j \Psi_{jj})] \Psi_{ij}(q) - [\text{Res}_p(T_i T_j \Psi_{ij})] \Psi_{jj}(q)}{[\text{Res}_p(T_i T_j \Psi_{ji})] \Psi_{ij}(q) - [\text{Res}_p(T_i T_j \Psi_{ii})] \Psi_{jj}(q)}, \quad i \neq j, \\ C_j &= \frac{1}{\text{Res}_p(T_j \Psi_{jj})} \left((T_j \mathbf{X}_j) - \frac{p}{q} \mathbf{X}_j \right).\end{aligned}$$

3. В контексте ВКП-иерархии мы вводим преобразование типа Мивы. Циркулярную решетку можно получить из ортогональной сети путем дискретизации переменных в функции Бейкера с помощью преобразования Мивы

$$\Psi(z, \mathbf{t}, \mathbf{n}) := \psi(z, \mathbf{t} + \mathbf{n}[p]).$$

Это дает циркулярную решетку со следующими данными:

$$\begin{aligned}T_j Q_{ij} &= 2 \frac{\text{Res}_p(T_i T_j \Psi_{jj}) \Psi_{ij}(-p) - \text{Res}_p(T_i T_j \Psi_{ij}) \Psi_{jj}(-p)}{\sum_{k=1}^N \Psi_{kj}^2(-p)}, \\ C_j &= \sum_{k=1}^N \Psi_{kj}(-p) \mathbf{g}_k.\end{aligned}$$

Благодарности. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке CICYT (проект PB95-0401).

Список литературы

- [1] A. Doliwa, M. Mañas, L. Martínez Alonso, E. Medina, P. M. Santini. Charged Free Fermions, Vertex Operators and Classical Theory of Conjugate Nets. solv-int/9803015.
- [2] M. Mañas, L. Martínez Alonso. Phys. Lett. B. 1998. V. 436. P. 316.
- [3] A. Doliwa, M. Mañas, L. Martínez Alonso. Generating Quadrilateral and Circular Lattices in KP Theory. solv-int/9810012.
- [4] L. P. Eisenhart. Transformations of Surfaces. Princeton: Princeton University Press, 1923; Reprinted: New York: Chelsea Publishing Company, 1962.

- [5] *G. Darboux*. Leçons sur la théorie générale des surfaces. Paris: Gauthier-Villars, 1896; Reprinted: New York: Chelsea Publishing Company, 1972.
- [6] *L. P. Eisenhart*. A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces. Boston: Ginn and Co., 1909.
- [7] *E. P. Lane*. Projective Differential Geometry of Curves and Surfaces. Chicago: University of Chicago Press, 1932.
- [8] *D. J. Struik*. Lectures on Classical Differential Geometry. New York: Dover, 1961.
- [9] *A. Doliwa, P. M. Santini, M. Mañas*. Transformations for Quadrilateral Lattices. solv-int/9712017.
- [10] *L. Lévy*. J. l'École Polytechnique. 1886. V. 56. P. 63.
- [11] *H. Jonas*. Berl. Math. Ges. Ber. Sitzungsber. 1915. V. 14. P. 96.
- [12] *L. P. Eisenhart*. Trans. Amer. Math. Soc. 1917. V. 18. P. 111.
- [13] *A. Doliwa, S. V. Manakov, P. M. Santini*. Commun. Math. Phys. 1998. V. 196. P. 1.
- [14] *G. Lamé*. Leçons sur la théorie des coordonnées curvilignes et leurs diverses applications. Paris: Mallet-Bachelier, 1859.
- [15] *G. Darboux*. Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes (deuxième édition). Paris: Gauthier-Villars, 1910 (the first edition was in 1897); Reprinted: Sceaux: Éditions Jacques Gabay, 1993.
- [16] *L. Bianchi*. Lezioni di Geometria Differenziale. 3-a ed. Bologna: Zanichelli, 1924.
- [17] *A. Ribaucour*. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris. 1872. V. 74. P. 1489.
- [18] *R. Sauer*. Differenzengeometrie. Berlin: Springer-Verlag, 1970.
- [19] *A. Doliwa, P. M. Santini*. Phys. Lett. A. 1997. V. 233. P. 365.
- [20] *R. R. Martin*. In: The Mathematics of Surfaces. Ed. J. Gregory. Oxford: Clarendon Press, 1986; *A. W. Nutborne*. The solution of a frame matching equation. In: The Mathematics of Surfaces. Ed. J. Gregory. Oxford: Clarendon Press, 1986. P. 233.
- [21] *A. Bobenko*. In: Symmetries and Integrability of Difference Equations II. Eds. P. Clarkson and F. Nijhoff. Cambridge: Cambridge University Press, 1998; *A. Bobenko, U. Pinkall*. J. Diff. Geom. 1996. V. 43. P. 527; *J. Reine Angew. Math.* 1996. V. 475. P. 187; *A. Bobenko, W. K. Schief*. In: Discrete Integrable Geometry and Physics. Eds. A. Bobenko, R. Seiler. Oxford: Oxford University Press, 1998.
- [22] *J. Cieřliński, A. Doliwa, P. M. Santini*. Phys. Lett. A. 1997. V. 235. P. 480.
- [23] *B. G. Konopelchenko, W. K. Schief*. Three-dimensional Integrable Lattices in Euclidean Space: Conjugacy and Orthogonality. Preprint University of New South Wales, 1997.
- [24] *E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara, T. Miwa*. J. Phys. Soc. Japan. 1981. V. 50. P. 3806.
- [25] *V. G. Kac, J. W. van de Leur*. The n -component KP hierarchy and representation theory. In: Important Developments in Soliton Theory. Eds. A. S. Fokas, V. E. Zakharov. Berlin: Springer, 1993. P. 302.
- [26] *L. V. Bogdanov, B. G. Konopelchenko*. J. Math. Phys. 1998. V. 39. P. 4701.
- [27] *M. Jimbo, T. Miwa*. Physica D. 1981. P. 407; *L. Schlesinger*. J. Reine Angew. Math. 1912. V. 14. P. 96.
- [28] *M. Sato*. RIMS Kokyuroku. 1981. V. 439. P. 30; The KP hierarchy and infinite-dimensional Grassmann manifolds. In: Theta Functions. Bowdoin, 1987. Part 1; Proc. Sympos. Pure Maths. V. 49. Part 1. Providence, RI: AMS, 1989. P. 51.
- [29] *G. Segal, G. Wilson*. Publ. Math. IHES. 1985. V. 61. P. 5.
- [30] *E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara, T. Miwa*. Physica D. 1982. V. 4. P. 343.
- [31] *T. Miwa*. Proc. Japan Acad. A. 1982. V. 58. P. 9; *E. Date, M. Jimbo, T. Miwa*. J. Phys. Soc. Japan. 1982. V. 51. P. 4116, 4125; 1983. V. 52. P. 388, 761, 766.