Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Страчан, Вырожденные бигамильтоновы структуры гидродинамического типа, *ТМФ*, 2000, том 122, номер 2, 294–304

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf569>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 05:48:56

© 2000 г.

И. А. Б. Страчан*

ВЫРОЖДЕННЫЕ БИГАМИЛЬТОНОВЫ СТРУКТУРЫ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА

Исследуются вырожденные бигамильтоновы скобки Пуассона гидродинамического типа, возникающие как бигамильтоновы структуры некоторых бездисперсионных рациональных уравнений Лакса и связанные с понятием вырожденного многообразия Фробениуса.

1. ВВЕДЕНИЕ

Скобки Пуассона гидродинамического типа были введены Дубровиным и Новиковым в [1], где давалось полное описание скобок Пуассона вида

$$\{u^i(x), u^j(y)\} = g^{ij}[u(x)]\delta'(x-y) + \Gamma_k^{ij}[u(x)]u_x^k(x)\delta(x-y) \quad (1)$$

при условии невырожденности $\det(g^{ij}) \neq 0$. Это равенство определяет антисимметричные скобки Пуассона для функционалов

$$\{I, J\} = \int dx \frac{\delta I}{\delta u^i(x)} \widehat{A^{ij}} \frac{\delta J}{\delta u^j(x)},$$

где

$$\widehat{A^{ij}} = g^{ij}[u(x)] \frac{d}{dx} + \Gamma_k^{ij}[u(x)]u_x^k(x).$$

Необходимые условия, накладываемые на g^{ij} и Γ_k^{ij} для того, чтобы уравнение (1) определяло гамильтонову структуру в невырожденном случае $\det(g^{ij}) \neq 0$, имеют наглядную геометрическую интерпретацию [1].

ТЕОРЕМА 1. *В невырожденном случае $\det(g^{ij}) \neq 0$ скобки (1) определяют гамильтонову структуру тогда и только тогда, когда:*

- а) $\mathbf{g} = (g^{ij})^{-1}$ задает (псевдо)риманову метрику;
- б) $\Gamma_k^{ij} = -g^{is}\Gamma_{sk}^j$, где Γ_{sk}^j – символы Кристоффеля для римановой связности, определяемой $\mathbf{g}$;

*Department of Mathematics, University of Hull, Hull, UK. E-mail: i.a.b.strachan@hull.ac.uk

в) тензор римановой кривизны $\mathbf{g}$ равен нулю.

Данный результат, а также его интерпретация в терминах дифференциальной геометрии, следует из невырожденности метрики. Однако это условие не является необходимым, для того чтобы (1) определяло гамильтонову структуру. В общем виде, без ограничений на g^{ij} , результат был получен Гринбергом [2]¹⁾.

ТЕОРЕМА 2. Скобки (1) определяют гамильтонову структуру тогда и только тогда, когда пара (g, Γ) удовлетворяет условиям

$$g^{ij} = g^{ji}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial u^k} = \Gamma_k^{ij} + \Gamma_k^{ji}, \quad (3)$$

$$g^{ij} \Gamma_i^{rs} = g^{ri} \Gamma_i^{js}, \quad (4)$$

$$\Gamma_t^{ij} \Gamma_r^{tk} - \Gamma_t^{ik} \Gamma_r^{tj} = g^{ti} \left(\frac{\partial \Gamma_r^{jk}}{\partial u^t} - \frac{\partial \Gamma_t^{jk}}{\partial u^r} \right) \quad (5)$$

и

$$\sum_{\substack{\text{циклическая} \\ \text{сумма по } i, j, k}} \left[\left(\frac{\partial \Gamma_t^{ij}}{\partial u^q} - \frac{\partial \Gamma_q^{ij}}{\partial u^t} \right) \Gamma_r^{tk} + \left(\frac{\partial \Gamma_t^{ij}}{\partial u^r} - \frac{\partial \Gamma_r^{ij}}{\partial u^t} \right) \Gamma_q^{tk} \right] = 0. \quad (6)$$

При $\det g^{ij} \neq 0$ последнее условие следует из предыдущих уравнений.

В данном более общем случае уравнения уже не имеют наглядной геометрической интерпретации. Они определяют интегрируемое распределение, но их дифференциально-геометрическое содержание менее очевидно. Назовем пару, удовлетворяющую этим уравнениям, (g, Γ) -парой.

Для того чтобы две гамильтоновы структуры $\{, \}_1$ и $\{, \}_2$ задавали бигамильтонову структуру, они должны быть совместными, т.е. $\{, \} = \{, \}_1 + \lambda \{, \}_2$ должна быть гамильтоновой структурой для всех значений λ . Для невырожденных скобок Пуассона гидродинамического типа это условие совместности предполагает, что для произвольного λ :

а) метрика $g^{ij} = g_1^{ij} + \lambda g_2^{ij}$ является плоской (такую метрику иногда называют плоским пучком);

б) метрическая связность для нее имеет вид $\Gamma_k^{ij} = \Gamma_{1k}^{ij} + \lambda \Gamma_{2k}^{ij}$.

Результат, полученный Дубровиным [5] для невырожденной метрики (частный случай более общего результата, полученного Магри [6]), легко распространяется на случай вырожденной метрики. Это позволяет найти некоторые классы бигамильтоновых структур.

¹⁾ В работе [2] была допущена опечатка в порядке индексов в (4), она была исправлена другими авторами (см., например, [3, 4]).

ЛЕММА 1. Пусть пара (g, Γ) определяет вырожденную гамильтонову структуру. Если в некоторой системе координат $x^1, \dots, x^n$ компоненты пары (g, Γ) линейно зависят от некоторой координаты $x^\bullet$, то пара

$$(g + \lambda \partial_\bullet g, \Gamma + \lambda \partial_\bullet \Gamma) \quad (7)$$

определяет вырожденную гамильтонову структуру для всех значений λ . Отсюда получаем вырожденную бигамильтонову структуру.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство прямо следует из общей теории гамильтоновых структур. Здесь мы для полноты приведем другое доказательство, основанное на дифференциальной геометрии.

Нам достаточно показать, что если исходная пара (g, Γ) удовлетворяет условиям теоремы 2, то пара (7) также удовлетворяет этим условиям. Поскольку первые два условия тривиальны, утверждение доказывается прямым вычислением. Рассмотрим, например, условие (4) теоремы 2:

$$[(\Gamma_k^{ij} + \lambda_\bullet \Gamma_t^{ij})(g^{tk} + \lambda \partial_\bullet g^{tk}) - (k \leftrightarrow i)] = \left(1 + \lambda \partial_\bullet + \frac{\lambda^2}{2} \partial_\bullet^2\right) [\Gamma_k^{ij} - (k \leftrightarrow i)].$$

Это условие следует из того, что если g и Γ линейно зависят от $x^\bullet$, то

$$\partial_\bullet^2(\Gamma g) = 2\partial_\bullet \Gamma \partial_\bullet g.$$

Следовательно, если пара (g, Γ) удовлетворяет условию (4), то пара (7) также удовлетворяет этому условию. Остальные условия квадратичны по g и Γ и поэтому доказываются так же. Обозначим эту новую структуру (η, γ) .

Было изучено много невырожденных бигамильтоновых структур, см., например, [5, 7]. Был также исследован случай, когда одна из скобок невырождена, а другая, совместная с ней, вырождена [8]. В настоящей статье рассматривается полностью вырожденный случай, когда обе скобки вырождены, но совместны.

Первая гамильтонова структура дается парой (g, Γ) :

$$\begin{aligned} g^{ij}(u) &= m^{ij} u^i u^j, \\ \Gamma_k^{ij}(u) &= \delta_k^j m^{ij} u^i, \end{aligned}$$

для произвольных (возможно, вырожденных) симметричных матриц m^{ij} . Это просто координатное преобразование постоянной метрики m^{ij} . Такое преобразование предполагает, что в невырожденном случае система невырождена только “слегка”: преобразование координат, приводящее g^{ij} к метрике с постоянными элементами, одновременно обращает Γ_k^{ij} в нуль. Для вырожденной метрики это не обязательно так, и преобразование может оставить некоторые ненулевые Γ_k^{ij} [2].

Для того чтобы получить бигамильтонову структуру, нужно найти систему координат, в которой элементы пары (g, Γ) линейны по одной из переменных. После этого с помощью доказанной выше леммы можно найти бигамильтонову структуру.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим плоскую метрику

$$g^{ij}(u, v, w) = \begin{pmatrix} au^2 & uv & uw \\ uv & av^2 & vw \\ uw & vw & aw^2 \end{pmatrix}.$$

В симметричных переменных $S = u + v + w$, $P = uv + vw + wu$ и $Q = uvw$ она принимает вид

$$g^{ij}(S, P, Q) = \begin{pmatrix} aS^2 + 2(1-a)P & (1+a)SP + 3(1-a)Q & (2+a)SQ \\ (1+a)SP + 3(1-a)Q & 2(1+a)P^2 + 2(1-a)SQ & 2(2+a)PQ \\ (2+a)SQ & 2(2+a)PQ & 3(2+a)Q^2 \end{pmatrix}.$$

Для произвольных a элементы не являются линейными по какой-либо из переменных. Однако для некоторых значений метрика линейризуется по одной из переменных:

при $a = 0$

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 2P & SP + 3Q & 2SQ \\ SP + 3Q & 2P^2 + 2SQ & 4PQ \\ 2SQ & 4PQ & 6Q^2 \end{pmatrix},$$

$$\eta^{ij} = \frac{\partial g^{ij}}{\partial S} = \begin{pmatrix} 0 & P & 2Q \\ P & 2Q & 0 \\ 2Q & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

при $a = -1$

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} -S^2 + 4P & 6Q & SQ \\ 6Q & 4SQ & 2PQ \\ SQ & 2PQ & 3Q^2 \end{pmatrix},$$

$$\eta^{ij} = \frac{\partial g^{ij}}{\partial P} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2Q \\ 0 & 2Q & 0 \end{pmatrix};$$

при $a = -2$

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} -2S^2 + 6P & -SP + 9Q & 0 \\ -SP + 9Q & -2P^2 + 6SQ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\eta^{ij} = \frac{\partial g^{ij}}{\partial Q} = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 0 \\ 9 & 6S & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Часто удобно вводить так называемые плоские координаты, в которых элементы η^{ij} постоянны. Такие системы координат удовлетворяют системе уравнений Гаусса–Манина

$$\eta^{ij} \partial_k \partial_j \mathbf{t} + \gamma_j^{ik} \partial_k \mathbf{t} = 0.$$

Нетрудно найти плоские координаты для приведенных выше примеров. Случаи $a = 0$ и $a = -1$ исследованы в [9] и не будут подробно здесь рассматриваться.

ПРИМЕР 2. При $a = -2$ плоские координаты имеют вид

$$\begin{aligned} t^1 &= +\frac{1}{3}(u + v + w), \\ t^2 &= -\frac{1}{18}(u + v + w)^2 + \frac{1}{3}(uv + vw + wu), \\ t^3 &= +uvw. \end{aligned}$$

В этих координатах вырожденная метрика принимает вид

$$\begin{aligned} g^{ij} &= \begin{pmatrix} -(t^1)^2 + 2t^2 & \frac{1}{2}(t^1)^3 - 3t^1t^2 + t^3 & 0 \\ \frac{1}{2}(t^1)^3 - 3t^1t^2 + t^3 & -\frac{1}{2}(t^1)^4 + 2(t^1)^2t^2 - 2(t^2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \eta^{ij} &= \frac{\partial g^{ij}}{\partial t^3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Вид матрицы m^{ij} и, следовательно, метрики g^{ij} в рассмотренных примерах определяется условием инвариантности по отношению к перестановке переменных u, v, w , т.е. преобразованиям группы S_3 . Это требование может быть расширено на случай произвольного числа полей; в невырожденном случае мы приходим к системам, исследованным в [9].

В примере 3 мы ослабим это условие и потребуем лишь инвариантности по отношению к перестановке u и v , т.е. к преобразованиям группы S_2 . Смысл такого ограничения будет обсуждаться в следующем разделе. Тогда, если не рассматривать случай с нулевыми перекрестными членами, метрика принимает вид

$$g^{ij} = \left(\begin{array}{cc|c} au^2 & uv & uw \\ uv & av^2 & vw \\ \hline uw & vw & bw^2 \end{array} \right). \quad (8)$$

Задача поиска бигамильтоновых структур снова сводится к задаче поиска системы координат, в которой элементы (g, Γ) линейны по одной из переменных. Поскольку результаты по невырожденным метрикам известны, мы приведем здесь только примеры вырожденных метрик.

ПРИМЕР 3. В переменных

$$\begin{aligned} S &= u + v - w, \\ P &= uv - w(u + v) + w^2, \\ Q &= w \end{aligned}$$

метрика (8) представляется в виде

$$\begin{aligned} g^{11} &= aS^2 + 2(1-a)P + (a+b-2)Q^2, \\ g^{12} &= (2-a-b)(Q-S)Q^2 + P(3(a-1)Q + (1+a)S), \\ g^{13} &= Q(S + (1-b)Q), \\ g^{22} &= 2(1+a)P^2 + (a+b-2)(Q-S)^2Q^2 - 2(a-1)PQ(2Q-S), \\ g^{23} &= Q(2P + (b-1)Q(Q-S)), \\ g^{33} &= bQ^2. \end{aligned}$$

Наиболее интересны два случая: $a = -1$, b произвольно, если метрика линейна по P , и $a = 0$, $b = 2$, если метрика линейна по S . В первом случае метрика невырождена. Этот случай рассматривался в [5]. Во втором случае метрика вырождена,

$$\eta^{ij} = \frac{\partial g^{ij}}{\partial S} = \begin{pmatrix} 0 & P & Q \\ P & -2PQ & -Q^2 \\ Q & -Q^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что в вырожденной системе плоских координат

$$\begin{aligned} t^1 &= S, \\ t^2 &= \frac{S}{Q}, \\ t^3 &= \log(Q) \end{aligned}$$

элементы η^{ij} постоянны и

$$g^{ij}(t) = \begin{pmatrix} 2t^2e^{t^3} & -2t^2e^{t^3} & +t^1 - e^{t^3} \\ -2t^2e^{t^3} & +2t^2e^{t^3} & -t^1 + e^{t^3} \\ +t^1 - e^{t^3} & -t^1 + e^{t^3} & 2 \end{pmatrix}.$$

Эта метрика линейна по t^1 , и, следовательно,

$$\eta^{ij}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & -1 \\ +1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Этот пример может быть обобщен на случай произвольной размерности [10].

ТЕОРЕМА 3. Пусть σ_i – базисные симметричные функции переменных $u^1, \dots, u^N$, определяемые разложением

$$\prod_{i=1}^N (\lambda + u^i) = \sum_{i=0}^N \lambda^{N-i} \sigma_i.$$

Определим переменные s^i , $i = 1, \dots, N+1$, как

$$s^r = \sum_{n=0}^r (-1)^n (u^{N+1})^n \sigma_{r-n}, \quad r = 1, \dots, N, \\ s^{N+1} = u^{N+1}.$$

Тогда для произвольного $N \geq 2$ $(N+1)$ -мерная метрика $g^{ij} = m^{ij} u^i u^j$, где

$$m^{ij} = \begin{pmatrix} 2-N & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2-N & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 2-N & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & N \end{pmatrix},$$

линейна по переменной s^{N-1} .

Применяя лемму 1, получаем вырожденные бигамильтоновы структуры. Система координат s^i не является плоской, т.е. элементы метрики η^{ij} непостоянны. Они могут быть найдены путем решения уравнений Гаусса–Манина. Для плоских координат не существует универсального выражения. В общем случае справедлива следующая гипотеза [10].

ГИПОТЕЗА 1. Пусть $N > M \geq 1$ и

$$\varepsilon^i = \begin{cases} +1 & \text{при } i = 1, \dots, N, \\ -1 & \text{при } i = N+1, \dots, N+M. \end{cases}$$

Тогда $(N+M)$ -мерная метрика, задаваемая соотношением $g^{ij} = m^{ij} u^i u^j$, где

$$m^{ij} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \alpha_2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \alpha_3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & \alpha_{N-M} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

а $\alpha_i = 1 - \varepsilon_i(N-M)$, линейна по координате s^{N-M} , где координаты s^i определяются через разложение рациональной функции

$$\prod_{i=1}^{N+M} (\lambda + u^i)^{\varepsilon_i} = \lambda^{N-M} + s^1 \lambda^{N-M-1} + \dots + s^{N-M} + \frac{s^{N-M+1}}{\lambda + s^{N+1}} + \dots + \frac{s^N}{\lambda + s^{N+M}}.$$

Кроме того, существуют плоские координаты t^i такие, что переменные s^i — полиномиальные функции переменных $t^1, \dots, t^N, e^{t^{N+1}}, \dots, e^{t^M}$, а все элементы η^{ij} — постоянные.

2. РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЛАКСА

Данная работа была изначально задумана как продолжение исследований [10, 11] бигамильтоновой структуры бездисперсионных интегрируемых систем, определяемых рациональным уравнением Лакса²⁾

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tau_n} = \{(\mathcal{L}^{\frac{n}{N-M}})_+, \mathcal{L}\}_{PB}, \quad (10)$$

где $\{f, g\}_{PB} = \lambda(\partial_\lambda f \partial_x g - \partial_x f \partial_\lambda g)$, $\mathcal{L}$ – действительная функция:

$$\mathcal{L} = \frac{\text{многочлен степени } N}{\text{многочлен степени } M} = \prod_{i=1}^{N+M} (\lambda + u^i)^{\varepsilon_i}$$

с единственным ограничением $N > M$, а $()_+$ обозначает проекцию на ту составляющую ряда по степеням λ , которая содержит только неотрицательные степени λ .

ТЕОРЕМА 4 [10]. В переменных $\tilde{u}^i = \log u^i$ уравнения эволюции (10) могут быть записаны в гамильтоновом виде

$$\dot{\tilde{u}}_{\tau_n}^i = \sum_j m^{ij} \mathcal{D} \left(\frac{\delta H^{(n)}}{\delta \tilde{u}^j} \right),$$

где матрица m^{ij} определяется (9), а гамильтонианы имеют вид

$$\begin{aligned} H^{(n)} &= \int dx \frac{1}{2\pi i} \oint \mathcal{L}^{\frac{n}{N-M}} \frac{d\lambda}{\lambda} = \\ &= \int dx \sum_{\{r_i : \sum_{i=1}^{N+M} r_i = n\}} \left\{ \prod_{i=1}^{N+M} \left(\frac{\varepsilon_i n}{N-M} \right) e^{r_i \tilde{u}^i} \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом, применяя результаты, полученные в предыдущем разделе, мы получаем полное описание бигамильтоновой структуры для произвольного N и $M = 1$, в то время как для произвольных M и N одна из структур оказывается гамильтоновой, а вторая имеет предполагаемый вид.

3. ВЫРОЖДЕННЫЕ МНОГООБРАЗИЯ ФРОБЕНИУСА

Наиболее близкий геометрический образ, позволяющий понять бигамильтонову структуру гидродинамических систем, – это многообразие Фробениуса [5]. Такие многообразия определяются с помощью функции $F(t^1, \dots, t^n)$ такой, что ее производные

$$c_{ijk} = \frac{\partial^3 F}{\partial t^i \partial t^j \partial t^k}$$

²⁾Переменные τ_n обозначают время, а переменные t – плоские координаты, в которых элементы η^{ij} – постоянные.

удовлетворяют следующим условиям:

1) матрица $\eta_{ij} = c_{1ij}$ постоянная и невырожденная. Эта и обратная к ней матрица η^{ij} используются для поднятия и опускания индексов. На таком многообразии η_{ij} является плоской метрикой;

2) функции $c_{jk}^i = \eta^{ir} c_{rjk}$ генерируют ассоциативную коммутативную алгебру с единичным элементом. Тогда в каждом касательном пространстве $T^t\mathcal{M}$ мы получаем алгебру Фробениуса. Соответствующее произведение обозначим как $u \cdot v$;

3) функции F удовлетворяют условию квазиоднородности, которое можно записать как

$$\mathcal{L}_E F = d_F F + \{\text{квадратичные члены}\}, \quad (11)$$

где E – векторное поле, называемое эйлеровым полем.

Эти условия задают систему уравнений Виттена–Дойтца–Верлинде–Верлинде. На таком многообразии можно ввести вторую плоскую метрику

$$g^{ij} = E(dt^i \cdot dt^j). \quad (12)$$

Вместе с исходной метрикой η^{ij} данная метрика определяет плоский пучок (т.е. матрица $\eta^{ij} + \lambda g^{ij}$ плоская для всех значений λ). Таким образом, из многообразия Фробениуса мы автоматически получаем бигамильтонову структуру.

Аналогичная структура возникает для определенных вырожденных бигамильтоновых структур [10] и, в частности, для структур, связанных с рациональными уравнениями Лакса. Сначала рассмотрим вырожденную метрику η^{ij} с постоянными элементами. Будучи вырожденной, метрика имеет нетривиальное ядро, так что существует ненулевой вектор ζ_i такой, что $\eta^{ij}\zeta_j = 0$ (этот вектор является элементом Казимира для двух гамильтоновых структур). Далее, выберем скалярную функцию $F(t)$ и функции $h^i(\zeta_j t^j)$ такие, что структурные функции

$$c_{jk}^i = \eta^{ir} \partial_r \partial_j \partial_k F + \partial_j \partial_k h^i \quad (13)$$

определяют ассоциативную коммутативную алгебру с единичным элементом. Функция F должна также удовлетворять условию квазиоднородности (11), и в результате появляется вторая согласованная вырожденная гамильтонова структура, задаваемая метрикой (12). Если η^{ij} невырождена, то ее ядро равно нулю; тогда функции h^i также равны нулю, и мы возвращаемся к известному невырожденному случаю. Заметим, что в противоположность невырожденному случаю в нашем случае нет прямой связи между η^{ij} и F .

ПРИМЕР 4. Чтобы получить вырожденную бигамильтонову структуру, рассмотренную в примере 3, нам понадобятся:

1) эйлерово векторное поле:

$$E = t^1 \frac{\partial}{\partial t^1} + t^2 \frac{\partial}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t^3};$$

2) препотенциал F :

$$F = \frac{1}{2}(t^1)^2 t^3 + t^2 e^{t^3} + \frac{1}{2}(t^2)^2 \log t^2;$$

3) ассоциированные ненулевые потенциалы h^i :

$$h^3 = \frac{1}{2}(t^1 + t^2)^2.$$

Эти элементы вместе с постоянной матрицей η^{ij} из примера 3 определяют вырожденную алгебру Фробениуса со структурными функциями (13) и второй плоской метрикой (12).

Для получения иерархии необходимо семейство гамильтонианов. Они задаются рекурсионным соотношением

$$\frac{\partial^2 h^{(n)}}{\partial t^i \partial t^j} = c_{ij}^k \frac{\partial h^{(n-1)}}{\partial t^k}, \quad (14)$$

условия интегрируемости для которого следуют из свойств многообразия Фробениуса.

В работе Кодамы [12] показано, что такие структуры, по крайней мере связанные с рациональными уравнениями Лакса, могут быть получены из структур, исследованных в [13], сингулярным предельным переходом к невырожденным многообразиям Фробениуса высших порядков.

Появление мультигамильтоновых структур для невырожденных систем следует из общей теории; они определяются соотношением $\mathcal{H}_n = \mathcal{R}^{n-1} \mathcal{H}_1$, где оператор рекурсии $\mathcal{R} = \mathcal{H}_2 \mathcal{H}_1^{-1}$. Для вырожденных систем также существуют гамильтоновы структуры высших порядков, хотя $\mathcal{H}_1^{-1}$, а следовательно, и $\mathcal{R}$, не существует. Для заданного многообразия Фробениуса гамильтонова структура третьего порядка имеет вид

$$g_3^{ij} = \eta^{rs} c_{rp}^i c_{sq}^j E(dt^p) E(dt^q).$$

ПРИМЕР 5. Для системы, рассмотренной в примерах 3 и 4, получаем

$$\begin{aligned} g_3^{11} &= -4t^2 e^{2t^3} + 4t^1 t^2 e^{t^3}, \\ g_3^{12} &= -g_3^{11}, \\ g_3^{13} &= +e^{2t^3} - 2t^1 e^{t^3} + (t^1)^2 + 4t^2 e^{t^3}, \\ g_3^{22} &= g_3^{11}, \\ g_3^{23} &= -g_3^{13}, \\ g_3^{33} &= 4t^1 - 4e^{t^3}. \end{aligned}$$

Эта матрица квадратична по t^1 , вырождена и удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial g_3^{ij}}{\partial t^1} = 2g_2^{ij}.$$

Эту процедуру можно продолжить, хотя в конце концов она приводит к вырожденным структурам с нелокальными хвостами, общая теория которых разработана только для простейшего случая [3].

4. КОММЕНТАРИИ

Заслуживает интереса существование нетривиального элемента Казимира $\mathcal{C}$ для таких систем. В качестве одного из возможных упрощений можно использовать ограничение динамики на поверхность $\mathcal{C} = \text{const}$. Например, первый поток для системы ($N = 2$, $M = 1$), задаваемой уравнением Лакса (10), имеет вид

$$\begin{aligned}u_\tau &= u(v_x - w_x), \\v_\tau &= v(u_x - w_x), \\w_\tau &= w(u_x + v_x - 2w_x)\end{aligned}$$

с функцией Казимира $\mathcal{C} = uv/w$ или в плоских координатах $\mathcal{C} = t^1 + t^2$. После ограничения на поверхность $w = uv$ мы получаем систему

$$\begin{aligned}u_\tau &= u[(1 - u)v_x - vu_x], \\v_\tau &= v[(1 - v)u_x - uv_x].\end{aligned}$$

В более общем случае систему можно ограничить на поверхность $w = uv f(x)$ для некоторой произвольной функции $f(x)$ (т.е. $\mathcal{C} = f^{-1}$). Это приводит к системе

$$\begin{aligned}u_\tau &= u[(1 - u)v_x - vu_x] - u^2 v f'(x), \\v_\tau &= v[(1 - v)u_x - uv_x] - v^2 u f'(x),\end{aligned}$$

которая представляет собой пример гидродинамической системы с конкретной зависимостью от x . Для таких систем можно также получить гамильтонову структуру [14].

Список литературы

- [1] Б. Дубровин, С. П. Новиков. ДАН СССР. 1983. Т. 270. С. 781–785.
- [2] Н. И. Гринберг. УМН. 1985. Т. 40. № 4. С. 217–218.
- [3] О. И. Мохов. Phys. Lett. A. 1992. V. 166. P. 215–216.
- [4] I. Dorfmann. Dirac Structures and Integrability of Nonlinear Evolution Equations. N. Y.: Wiley, 1993.
- [5] B. Dubrovin. Geometry of 2D topological field theories. In: Integrable Systems and Quantum Groups, Montecatini, terms, 1993. Springer Lecture Notes in Math. V. 1620. Lectures Given at the 1st Session of the Centro Internazionale Matematico Estivo (CIME) Held in Montecatini Terme, Italy, June 14–22, 1993. Eds. M. Francaviglia, S. Greco. Berlin: Springer, 1996. P. 120–3348.
- [6] F. Magri. J. Math. Phys. 1978. V. 19. P. 1156–1162.
- [7] О. И. Мохов. УМН. 1997. Т. 52. № 6. С. 171–172.
- [8] О. И. Мохов. УМН. 1998. Т. 53. № 2. С. 153–154.
- [9] B. Dubrovin, Y. Zhang. Compos. Math. 1998. V. 111. № 2. P. 167–219.
- [10] I. A. B. Strachan. J. Math. Phys. 1999. V. 40. P. 5058–5079.
- [11] D. B. Fairlie, I. A. B. Strachan. Inverse problems. 1996. V. 12. P. 885–908.
- [12] Y. Kodama. Private communication and seminar given at the ICMS, Edinburgh, Sept. 1998.
- [13] S. Aoyama, Y. Kodama. Commun. Math. Phys. 1996. V. 182. P. 185–219.
- [14] М. В. Поляк. УМН. 1987. Т. 42. № 3. С. 195–196.