Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Славнов, К. В. Степаньянц, Универсальная инвариантная перенормировка для суперсимметричной теории Янга–Миллса, *ТМФ*, 2004, том 139, номер 2, 179–191

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf57>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 15:55:03

© 2004 г.

А. А. Славнов*, К. В. Степаньянц†

УНИВЕРСАЛЬНАЯ ИНВАРИАНТНАЯ ПЕРЕНОРМИРОВКА ДЛЯ СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ ЯНГА–МИЛЛСА

Предлагается явно инвариантная схема перенормировки для $N = 1$ неабелевых суперсимметричных калибровочных теорий.

Ключевые слова: регуляризация, суперсимметрия, перенормировка, контрчлены.

1. ВВЕДЕНИЕ

Построение явно суперсимметричной и калибровочно-инвариантной процедуры перенормировки является нетривиальной, а в некоторых случаях и все еще не решенной задачей. Было бы желательно иметь схему вычислений, которая сохраняет суперсимметрию на всех промежуточных этапах вычислений. Однако наиболее популярные калибровочно-инвариантные регуляризации, такие как размерная регуляризация [1], размерная редукция [2] или решеточная регуляризация, нарушают суперсимметрию [3]. Регуляризация высшими ковариантными производными [4], [5] может быть легко использована в абелевых теориях [6]–[8]. В принципе регуляризация высшими ковариантными производными применима и к неабелевым теориям [9], но вычисления квантовых поправок в этой схеме очень сложны. Чтобы упростить вычисления, иногда удобно использовать не калибровочно-инвариантную регуляризацию. Например, можно регуляризовать теорию добавлением слагаемого с высшими производными, в котором вместо ковариантных производных стоят обычные производные, что позволяет значительно упростить вычисления для теории Янга–Миллса. Такая регуляризация сохраняет суперсимметрию, но нарушает калибровочную инвариантность, которая, однако, может быть восстановлена специальным выбором схемы перенормировки. Например, в рамках

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail: slavnov@mi.ras.ru

† Московский государственный университет, Москва, Россия.
E-mail: stepan@theor.phys.msu.su

алгебраической перенормировки это делается подбором конечных контрчленов, обеспечивающих выполнение тождеств Славнова–Тейлора (ТСТ) для перенормированных функций Грина. Этот метод был успешно применен к суперсимметричным теориям в работах [10], [11], где инвариантная перенормируемость $N = 1$ неабелевых суперсимметричных калибровочных моделей была доказана в рамках алгебраической перенормировки. Однако практическое использование алгебраической перенормировки является достаточно сложным из-за необходимости подбора большого числа (неинвариантных) контрчленов.

Недавно был предложен новый метод инвариантной перенормировки [12], [13], дающий функции Грина, которые автоматически удовлетворяют перенормированным ТСТ. Этот метод был обобщен на случай суперсимметричной электродинамики в работе [14]. Однако для того чтобы применить его к неабелевым суперсимметричным теориям, необходимо решить некоторые проблемы, связанные с более сложной структурой ТСТ. Это делается в данной статье.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 вводятся обозначения и напоминаются некоторые сведения о суперсимметричной теории Янга–Миллса. Универсальная инвариантная схема перенормировки для этой модели строится в разделе 3. Эта схема иллюстрируется в разделе 4 на примере вычисления однопетлевой β -функции с помощью упрощенной (неинвариантной) версии регуляризации высшими производными. Полученные результаты обсуждаются в разделе 5.

2. $N = 1$ СУПЕРСИММЕТРИЧНАЯ ТЕОРИЯ ЯНГА–МИЛЛСА

$N = 1$ суперсимметричная теория Янга–Миллса описывается следующим действием¹⁾:

$$S = \frac{1}{2e^2} \text{Re tr} \int d^4x d^2\theta W_a C^{ab} W_b + \frac{1}{16e^2} \text{tr} \int d^4x d^4\theta \left((\bar{c}^+ - \bar{c}) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \delta V + \alpha B^+ B - i B^+ \bar{D}^2 V - i B D^2 V \right), \quad (1)$$

которое инвариантно относительно БРСТ-преобразований

$$\begin{aligned} \delta V &= \varepsilon \left[-\frac{i}{2} \mathbf{V} \text{ctg } \mathbf{V} (c - c^+) + \frac{1}{2} \mathbf{V} (c + c^+) \right], \\ \delta B &= 0, \quad \delta B^+ = 0, \\ \delta \tilde{c} &= i\varepsilon B, \quad \delta \tilde{c}^+ = -i\varepsilon B^+, \\ \delta c &= -\varepsilon c^2, \quad \delta c^+ = -\varepsilon (c^+)^2. \end{aligned} \quad (2)$$

¹⁾ В наших обозначениях метрический тензор пространства Минковского имеет диагональные элементы $(1, -1, -1, -1)$.

Здесь мы используем следующие обозначения:

$$V = -ieV^a t^a, \quad \text{tr}(t^a t^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab}, \quad (3)$$

где t^a – эрмитовы генераторы калибровочной группы, так что V^a является вещественным скалярным суперполем, и для произвольной функции $f(V) = c_0 + c_1 V + c_2 V^2 + \dots$ мы определяем величину

$$f(\mathbf{V})A \equiv c_0 A + c_1 [V, A] + c_2 [V, [V, A]] + \dots \quad (4)$$

W_a является киральным спинорным суперполем, которое выражается через V формулой

$$W_a \equiv \frac{1}{32} \overline{D}(1 - \gamma_5) D(e^{-2iV}(1 + \gamma_5) D_a e^{2iV}), \quad (5)$$

где D – суперсимметричная ковариантная производная:

$$D = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} - i\gamma^\mu \theta \partial_\mu. \quad (6)$$

Удобно определить производящий функционал, включив в него дополнительные источники G и g :

$$Z = \int d\mu \exp \left\{ iS + i \text{tr} \int d^4x d^4\theta \left(VJ + G \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \delta V \right) + i \text{tr} \int d^4x d^2\theta \times \right. \\ \left. \times \left(j_c c + \bar{j}_c \bar{c} + g \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \delta c \right) + i \text{tr} \int d^4x d^2\bar{\theta} \left(j_c^+ c^+ + \bar{j}_c^+ \bar{c}^+ + g^+ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \delta c^+ \right) \right\}. \quad (7)$$

Исходя из этого производящего функционала мы строим производящий функционал для связных функций Грина

$$W = -i \ln Z \quad (8)$$

и эффективное действие

$$\Gamma = W - \int d^4x d^4\theta VJ - \int d^4x d^2\theta (j_c c + \bar{j}_c \bar{c}) - \int d^4x d^2\bar{\theta} (j_c^+ c^+ + \bar{j}_c^+ \bar{c}^+), \quad (9)$$

причем источники должны быть исключены с помощью уравнений

$$V = \frac{\delta W}{\delta J}, \quad c = \frac{\delta W}{\delta j_c}, \quad \bar{c} = \frac{\delta W}{\delta \bar{j}_c}, \quad c^+ = \frac{\delta W}{\delta j_c^+}, \quad \bar{c}^+ = \frac{\delta W}{\delta \bar{j}_c^+}. \quad (10)$$

Заметим, что определенное таким образом эффективное действие будет зависеть от источников G и g как от параметров.

3. ИНВАРИАНТНАЯ ПЕРЕНОРМИРОВКА

Сделав в производящем функционале (7) замену (2), несложно получить ТСТ, которые могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} & \text{tr} \int d^4x d^4\theta \left[\frac{\delta\Gamma}{\delta V} \frac{\delta\Gamma}{\delta G} + \frac{2}{\alpha} \left(D^2 V \frac{\delta\Gamma}{\delta \bar{c}} - \bar{D}^2 \frac{\delta\Gamma}{\delta \bar{c}^+} \right) \right] + \\ & + \text{tr} \int d^4x d^2\theta \frac{\delta\Gamma}{\delta c} \frac{\delta\Gamma}{\delta g} + \text{tr} \int d^4x d^2\bar{\theta} \frac{\delta\Gamma}{\delta c^+} \frac{\delta\Gamma}{\delta g^+} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Благодаря инвариантности производящего функционала относительно преобразования $\bar{c} \rightarrow \bar{c} + \epsilon(x)$, где $\epsilon(x)$ — произвольная антикоммутирующая функция, имеют место следующие тождества:

$$\left\langle \frac{1}{32e^2} \bar{D}^2 \frac{\partial}{\partial \epsilon} \delta V + \bar{j}_c \right\rangle = 0, \quad \left\langle \frac{1}{32e^2} D^2 \frac{\partial}{\partial \epsilon} \delta V + \bar{j}_c^+ \right\rangle = 0. \quad (12)$$

Для того чтобы записать эти ТСТ через эффективное действие, удобно определить функционал $\tilde{\Gamma}$, который получается из эффективного действия Γ вычитанием члена, фиксирующего калибровку:

$$\tilde{\Gamma} \equiv \Gamma - \frac{1}{32e^2\alpha} \text{tr} \int d^4x d^4\theta V (D^2 \bar{D}^2 + \bar{D}^2 D^2) V. \quad (13)$$

Такой функционал удовлетворяет следующим уравнениям:

$$\text{tr} \int d^4x d^4\theta \frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta V} \frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta G} + \text{tr} \int d^4x d^2\theta \frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta c} \frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta g} + \text{tr} \int d^4x d^2\bar{\theta} \frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta c^+} \frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta g^+} = 0, \quad (14)$$

$$-\frac{1}{32e^2} \bar{D}^2 \frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta G} + \frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta \bar{c}} = 0, \quad -\frac{1}{32e^2} D^2 \frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta G} + \frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta \bar{c}^+} = 0. \quad (15)$$

Заметим, что до сих пор мы еще нигде не полагали поля равными нулю. Кроме того, тождество (14) не является линейным. Поэтому для работы с этими тождествами будем использовать следующий алгоритм:

1. Для того чтобы найти соотношения между различными функциями Грина, будем дифференцировать тождества (14) и (15) по их аргументам, а затем полагать поля равными нулю.

2. Тождество (14) необходимо разложить в ряд по постоянной Планка $\hbar$, что соответствует петлевому разложению. Представим эффективное действие следующим образом:

$$\tilde{\Gamma} = S + \hbar \Delta\Gamma^{(1)} + \hbar^2 \Delta\Gamma^{(2)} + \dots \quad (16)$$

Тогда в низшем порядке это тождество выполняется благодаря БРСТ-инвариантности классического действия. В произвольном порядке имеем

$$\Delta\Gamma^{(n)} \cdot S + S \cdot \Delta\Gamma^{(n)} = - \sum_{m=1}^{n-1} \Delta\Gamma^{(m-n)} \cdot \Delta\Gamma^{(m)}, \quad (17)$$

где

$$A \cdot B \equiv \text{tr} \int d^4x d^4\theta \left(\frac{\delta A}{\delta V} \frac{\delta B}{\delta G} + \frac{\delta B}{\delta V} \frac{\delta A}{\delta G} \right) + \\ + \text{tr} \int d^4x d^2\theta \left(\frac{\delta A}{\delta c} \frac{\delta B}{\delta g} + \frac{\delta B}{\delta c} \frac{\delta A}{\delta g} \right) + \text{tr} \int d^4x d^2\bar{\theta} \left(\frac{\delta A}{\delta c^+} \frac{\delta B}{\delta g^+} + \frac{\delta B}{\delta c^+} \frac{\delta A}{\delta g^+} \right). \quad (18)$$

Тождество (17) имеет место, если регуляризация сохраняет калибровочную инвариантность. В случае использования неинвариантной регуляризации калибровочная инвариантность может быть восстановлена добавлением локальных контрчленов к соответствующим вершинам. Такая процедура применяется в схеме алгебраической перенормировки, где основная проблема заключается в том, чтобы найти перенормированное действие S_R , для которого эффективное действие удовлетворяет ТСТ. Поскольку явное определение всех неинвариантных контрчленов является достаточно сложной задачей, то мы будем применять другой подход, который позволяет получать калибровочно-инвариантное перенормированное эффективное действие, непосредственно решая ТСТ.

Нашей целью является получение перенормированного эффективного действия $\tilde{\Gamma}_R$, которое по построению удовлетворяет ТСТ:

$$\tilde{\Gamma}_R = S_R + \hbar \Delta\gamma^{(1)} + \hbar^2 \Delta\gamma^{(2)} + \dots \quad (19)$$

Здесь $\Delta\gamma^{(i)}$ – некоторые функции, которые строятся по $\Delta\Gamma^{(i)}$ таким образом, чтобы перенормированное эффективное действие удовлетворяло перенормированным ТСТ. Перенормированное действие записывается в виде

$$S_R = S - \hbar \Delta\gamma_{\text{div}}^{(1)} - \hbar^2 \Delta\gamma_{\text{div}}^{(2)} + \dots, \quad (20)$$

благодаря чему

$$\tilde{\Gamma}_R = S + \hbar \Delta\Gamma_R^{(1)} + \hbar^2 \Delta\Gamma_R^{(2)} + \dots, \quad (21)$$

где

$$\Delta\Gamma_R^{(i)} \equiv \Delta\gamma^{(i)} - \Delta\gamma_{\text{div}}^{(i)}. \quad (22)$$

Если в теории отсутствуют аномалии, то всегда можно построить такие контрчлены $\Delta\gamma_{\text{div}}^{(i)}$, что

$$\Delta\gamma^{(i)} - \Delta\gamma_{\text{div}}^{(i)} = \Delta\Gamma^{(i)} - \Delta\Gamma_{\text{div}}^{(i)} \quad (23)$$

в пределе, когда снимается регуляризация. При этом $\Delta\Gamma^{(i)}$ и $\Delta\Gamma_{\text{div}}^{(i)}$ соответствуют $\Delta\gamma^{(i)}$ и $\Delta\gamma_{\text{div}}^{(i)}$ для случая инвариантной регуляризации. Далее мы покажем, что решая ТСТ, можно получить выражение для $\Delta\Gamma_R^{(i)}$ без явного нахождения неинвариантных контрчленов $\Delta\gamma_{\text{div}}^{(i)}$.

Мы будем использовать уравнение (17) для определения перенормированных функций Грина в n -м порядке, предполагая, что вычитания во всех расходящихся подграфах, соответствующих $\Gamma^{(m)}$ ($m < n$), выполнены в соответствии с уравнением (17).

Дифференцируя уравнение (17) по полям, а затем полагая все поля равными нулю, мы получаем соотношение, которое выражает произвольную функцию Грина по крайней мере с одной киральной внешней линией через другие функции Грина того же порядка по постоянной Планка $\hbar$, в которых число внешних линий калибровочного поля на единицу меньше, или через функции Грина более низкого порядка. Символически можно записать, что

$$D_x^2 \Gamma^n(x, \dots) = R(\Gamma^m), \quad (24)$$

где через $R(\Gamma_m)$ обозначено произведение функций Грина низшего порядка и функций Грина того же порядка, что и исходная, но имеющих на единицу меньшее число внешних линий калибровочного поля. При этом мы предполагаем, что все функции Грина порядка $m < n$ перенормированы в соответствии с уравнением (17), а расходящиеся поддиаграммы в функции Γ_n вычтены в соответствии с R -операцией. Тогда уравнение (24) фиксирует окончательное вычитание для функции Γ^n , после которого перенормированная функция будет удовлетворять ТСТ. Действительно, представим функцию Γ_n в виде

$$\Gamma_n(\theta, p) = \sum_i B_i(\theta, p) F_i(p), \quad (25)$$

где функции B_i являются полиномами по θ, p , а F_i зависят только от p . Перенормировка производится с помощью вычитания из $F_i(p)$ некоторых полиномов. Мы будем выбирать полиномы B_i таким образом, чтобы их киральные части

$$Q_i = D_x^2 B_i \quad (26)$$

были либо линейно независимы, либо равны нулю.

Правая часть уравнения (24) может быть разложена по полиномам Q_i :

$$R(\Gamma_m) = \sum_i Q_i(\theta, p) R_i(p). \quad (27)$$

Практически, для того чтобы найти функции R_i явно, необходимо выполнить умножение коэффициентных функций Грина Γ_m , входящих в правую часть уравнения (24), с использованием алгебры суперсимметрии.

В соответствии с нашим предположением все функции в правой части уравнения (24) являются конечными. Используя линейную независимость коэффициентных функций Q_i , мы получаем, что перенормированная функция Γ_n может быть записана следующим образом:

$$\Gamma_n^R = \sum_i B_i(\theta, p) R_i(p) + \sum_j B_j(\theta, p) F_j(p), \quad (28)$$

где вторая сумма берется по значениям j , для которых $Q_j = 0$. Тем самым завершается процесс перенормировки.

Такая перенормировка может быть выполнена в следующей последовательности. На первом шаге мы вычисляем однопетлевую поправку к двухточечным функциям Грина духовых полей:

$$\frac{\delta^2}{\delta c^+ \delta \bar{c}} \Delta \Gamma_{\text{R}}^{(1)}, \quad \frac{\delta^2}{\delta c \delta \bar{c}^+} \Delta \Gamma_{\text{R}}^{(1)}. \quad (29)$$

ТСТ не накладывают никаких ограничений на эти функции. Поэтому они могут быть перенормированы произвольным образом, скажем при помощи вычитания в некоторой фиксированной точке нормировки μ_c . На следующем шаге мы вычисляем функции

$$\frac{\delta^2}{\delta c^+ \delta G} \Delta \Gamma_{\text{R}}^{(1)}, \quad \frac{\delta^2}{\delta c \delta G} \Delta \Gamma_{\text{R}}^{(1)}. \quad (30)$$

Для этого необходимо использовать ТСТ, которые получаются при дифференцировании уравнений (15) по c . После этого мы переходим к перенормировке функции

$$\frac{\delta^3 \Delta \Gamma^{(1)}}{\delta c \delta \bar{c} \delta V}, \quad (31)$$

используя соответствующее ТСТ. Построив функции (30) и (31), можно перенормировать функцию

$$\frac{\delta^3 \Delta \Gamma^{(1)}}{\delta c^+ \delta \bar{c} \delta V}. \quad (32)$$

Затем мы дифференцируем все ТСТ по V и переходим к перенормировке функций с большим числом степеней V , начиная с функции

$$\frac{\delta^3 \Delta \Gamma^{(1)}}{\delta c \delta G \delta V}. \quad (33)$$

Перенормировка двухточечной функции Грина для калибровочного поля производится аналогично случаю квантовой электродинамики [14]: если ввести функцию Π ,

$$(2\pi)^4 \delta^4((p_1)_\mu + (p_2)_\mu) \Pi[(\theta_{x_1}, p_1), (\theta_{x_2}, -p_1)] \equiv \int d^4 x_1 d^4 x_2 \frac{\delta^2 \tilde{\Gamma}}{\delta V_{x_1} \delta V_{x_2}} \Big|_{\phi, \tilde{\phi}, V=0} \exp(i(p_1)_\mu x_1^\mu + i(p_2)_\mu x_2^\mu), \quad (34)$$

то

$$\Pi[(\theta_x, p), (\theta_y, -p)] = F_1(p) p^2 \Pi_{1/2} \delta^4(\theta_x - \theta_y) + F_2(p) \delta^4(\theta_x - \theta_y), \quad (35)$$

где

$$\Pi_{1/2} = -\frac{1}{16\partial^2} D^a \overline{D}^2 C_{ab} D^b. \quad (36)$$

В этом случае

$$B_1(\theta, p) = p^2 \Pi_{1/2} \delta^4(\theta_x - \theta_y), \quad B_2(\theta, p) = \delta^4(\theta_x - \theta_y). \quad (37)$$

Перенормированные функции Грина получаются вычитанием из $F_i(p)$ некоторых полиномов, выбранных таким образом, чтобы обеспечить выполнение ТСТ для функции

$$\Pi^r[\theta, p] = \sum_i B_i(\theta, p) (F_i(p) - P_i(p)). \quad (38)$$

Для двухточечной функции Грина подстановка (35) в ТСТ

$$\overline{D}_y^2 \frac{\delta^2 \Delta \Gamma^{(1)}}{\delta V_z \delta V_y} = 0, \quad (39)$$

которое получается при дифференцировании линейаризованного тождества (14) по c^+ и V , приводит к следующему уравнению:

$$(F_2(p) - P_2(p)) D_x^2 \delta^4(\theta_x - \theta_y) = 0. \quad (40)$$

Следовательно,

$$P_2(p) = F_2(p), \quad (41)$$

тогда как функция P_1 не может быть определена из ТСТ и соответствует калибровочно-инвариантному контрчлену. Удобно выбрать

$$P_1(p) = F_1(\mu_\pi), \quad (42)$$

где μ_π — точка нормировки. Тогда перенормированная двухточечная функция Грина запишется в виде

$$\Pi^r[(\theta_x, p), (\theta_y, -p)] = (F_1(p) - F_1(\mu_\pi)) p^2 \Pi_{1/2} \delta^4(\theta_x - \theta_y). \quad (43)$$

Такая функция Грина удовлетворяет уравнению

$$D_x^2 \Pi^r[(\theta_x, p), (\theta_y, -p)] = 0, \quad (44)$$

которое является суперсимметричным обобщением условия поперечности в обычной квантовой электродинамике.

Перенормировка трехточечной функции для калибровочного поля также может быть выполнена с помощью приведенного выше алгоритма при использовании соответствующего ТСТ.

Описанная выше процедура может быть интерпретирована как нахождение локальных контрчленов, которые будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \Delta S = & \frac{1}{16e^2} \text{tr} \int d^4x d^4\theta (\bar{c}^+ - \bar{c}) \left(i \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbf{V}^n (c - c^+) + \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} b_n \mathbf{V}^n (c + c^+) \right) + \\ & + \text{tr} \int d^4x d^4\theta G \left(i \sum_{n=0}^{\infty} f_n \mathbf{V}^n (c - c^+) + \sum_{n=0}^{\infty} h_n \mathbf{V}^n (c + c^+) \right) + \\ & + \text{tr} \int d^4x d^4\theta F[V]. \end{aligned} \quad (45)$$

После добавления таких контрчленов перенормированное эффективное действие $\Delta\Gamma_{\text{R}}^{(1)}$ будет удовлетворять перенормированным ТСТ. Предложенный выше алгоритм позволяет избежать явного нахождения всех возможных членов в формуле (45), которое может вызвать значительные технические сложности.

4. ОДНОПЕТЛЕВАЯ ПЕРЕНОРМИРОВКА ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ПРОСТЕЙШЕЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ПАУЛИ–ВИЛЛАРСА

Для того чтобы проиллюстрировать предложенную выше схему перенормировки, мы рассмотрим $N = 1$ суперсимметричную теорию Янга–Миллса и вычислим β -функцию, используя регуляризацию (обычными) высшими производными, дополненную полями Паули–Вилларса для регуляризации однопетлевых расходимостей.

Регуляризация вводится с помощью добавления слагаемого с высшими производными, после чего регуляризованное действие принимает вид

$$\begin{aligned} S_{\text{R}} = & \frac{1}{2e^2} \text{Re tr} \int d^4x d^2\theta W_a C^{ab} \left(1 + \frac{\partial^{2n}}{\Lambda^{2n}} \right) W_b + \\ & + \frac{1}{16e^2} \text{tr} \int d^4x d^4\theta \left((\bar{c}^+ - \bar{c}) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \delta V + \alpha B^+ B - i B^+ \bar{D}^2 V - i B D^2 V \right). \end{aligned} \quad (46)$$

Однако слагаемое с высшими производными не регуляризует однопетлевые расходимости. Поэтому необходимо добавить в производящий функционал поля Паули–Вилларса, что может быть сделано следующим образом:

$$\begin{aligned} Z = & \int d\mu \prod_i (\det PV(V, M_i))^{\alpha_i} \prod_i (\det pv(V, m_i))^{\beta_i} \times \\ & \times \exp \left\{ i S_{\text{R}} + i \text{tr} \int d^4x d^4\theta \left(V J + G \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \delta V \right) + \right. \\ & + i \text{tr} \int d^4x d^2\theta \left(j_c c + \bar{j}_c \bar{c} + g \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \delta c \right) + \\ & \left. + i \text{tr} \int d^4x d^2\bar{\theta} \left(j_c^+ c^+ + \bar{j}_c^+ \bar{c}^+ + g^+ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \delta c^+ \right) \right\}, \end{aligned} \quad (47)$$

где

$$\begin{aligned}
 (\det PV(V, M))^{-1} &= \\
 &= \int DW \exp \left\{ \frac{i}{2} \int d^4x d^4\theta_x d^4y d^4\theta_y W_x^a \frac{\delta^2 S_R}{\delta V_x^a \delta V_y^b} W_y^b - \frac{i}{4} M^2 \int d^4x d^4\theta W_a^2 \right\}, \\
 (\det pv(V, m))^{-1} &= \\
 &= \int DC D\bar{C} \exp \left\{ \frac{i}{16e^2} \text{tr} \int d^4x d^4\theta (\bar{C}^+ - \bar{C}) \frac{\partial}{\partial \epsilon} \delta V(V, C, C^+) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{im}{2e^2} \text{tr} \int d^4x d^2\theta \bar{C} C + \frac{im}{2e^2} \text{tr} \int d^4x d^2\bar{\theta} \bar{C}^+ C^+ \right\},
 \end{aligned} \tag{48}$$

а коэффициенты α_i и β_i удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{aligned}
 \sum_i \alpha_i &= 1, & \sum_i \alpha_i M_i^2 &= 0, \\
 \sum_i \beta_i &= 1, & \sum_i \beta_i m_i^2 &= 0.
 \end{aligned} \tag{49}$$

Здесь через W^a , C и $\bar{C}$ обозначены поля Паули–Вилларса, M_i – массы полей Паули–Вилларса, соответствующих суперполю V , а m_i – массы полей Паули–Вилларса, соответствующих духовым полям. Мы будем предполагать, что все массы M_i и m_i пропорциональны параметру Λ в слагаемом с высшими производными.

Рис. 1. Однопетлевой вклад в двухточечную функцию Грина калибровочного суперполя.

Для того чтобы найти двухточечную функцию Грина калибровочного суперполя, необходимо вычислить диаграммы Фейнмана, показанные на рис. 1. В результате получаем

$$\begin{aligned}
 \Delta \Gamma_{2\text{-point}}^{(1)} &= -ie^2 c_1 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} V^a(-p) \partial^2 \Pi_{1/2} V^a(p) \times \\
 &\quad \times \left\{ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{(-1)^n p^{2n}}{\Lambda^{2n}} \right) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{k^2(k+p)^2(1 + (-1)^n k^{2n}/\Lambda^{2n})} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \sum_k \alpha_k \frac{1}{(k^2 - M_j^2)((k+p)^2 - M_j^2)(1 + (-1)^n k^{2n}/\Lambda^{2n})} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{k^2(k+p)^2} - \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_k \alpha_k \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - M_j^2)((k+p)^2 - M_j^2)} \Bigg\} + \\
& + e^2 c_1 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} V_a(-p) V_a(p) \Bigg\{ \sum_j \frac{i\alpha_j}{3} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - M_j^2} - \\
& - \sum_j \frac{i\alpha_j}{8} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2(k+p)^2 + p^2}{(k^2 - M_j^2)((k+p)^2 - M_j^2)} + \\
& + \sum_j \frac{i\alpha_j}{4} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{M_j^2(1 + (-1)^n(k+p)^{2n}/\Lambda^{2n})}{(k^2 - M_j^2)(1 + (-1)^n k^{2n}/\Lambda^{2n})((k+p)^2 - M_j^2)} - \\
& - \sum_j \frac{i\beta_j}{12} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m_j^2} + \\
& + \sum_j \frac{i\beta_j}{8} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{p^2}{(k^2 - m_j^2)((k+p)^2 - m_j^2)} \Bigg\}. \tag{50}
\end{aligned}$$

Подставляя это выражение в формулу (34), мы получаем функцию Π , которую можно представить в виде (35), причем

$$\begin{aligned}
F_1(p) &= ie^2 c_1 \Bigg\{ \left(1 + \frac{(-1)^n p^{2n}}{\Lambda^{2n}}\right) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{k^2(k+p)^2(1 + (-1)^n k^{2n}/\Lambda^{2n})} - \right. \\
& - \sum_k \alpha_k \frac{1}{(k^2 - M_j^2)((k+p)^2 - M_j^2)(1 + (-1)^n k^{2n}/\Lambda^{2n})} \Bigg) + \\
& + \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{k^2(k+p)^2} - \sum_k \alpha_k \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - M_j^2)((k+p)^2 - M_j^2)} \right) \Bigg\}, \\
F_2(p) &= 2e^2 c_1 \Bigg\{ \sum_j \frac{i\alpha_j}{3} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - M_j^2} - \\
& - \sum_j \frac{i\alpha_j}{8} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2(k+p)^2 + p^2}{(k^2 - M_j^2)((k+p)^2 - M_j^2)} + \\
& + \sum_j \frac{i\alpha_j}{4} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{M_j^2(1 + (-1)^n(k+p)^{2n}/\Lambda^{2n})}{(k^2 - M_j^2)(1 + (-1)^n k^{2n}/\Lambda^{2n})((k+p)^2 - M_j^2)} - \\
& - \sum_j \frac{i\beta_j}{12} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m_j^2} + \sum_j \frac{i\beta_j}{8} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{p^2}{(k^2 - m_j^2)((k+p)^2 - m_j^2)} \Bigg\}. \tag{51}
\end{aligned}$$

Для того чтобы вычислить интегралы в этих выражениях, вначале необходимо совершить поворот Вика. После этого несложно убедиться, что

$$F_1(p) = -\frac{3}{16}e^2 c_1 \left(\ln \frac{\Lambda}{p} + \text{конечные члены} \right). \tag{52}$$

Несложно проверить, что функция F_2 является конечной и пропорциональна p^2 . После взятия предела $\Lambda \rightarrow \infty$ (и, следовательно, $M_j \rightarrow \infty$ и $m_j \rightarrow \infty$) мы получаем, что

$$\begin{aligned} \Pi[(\theta_x, p), (\theta_y, -p)] = & -\frac{3}{16\pi^2} e^2 c_1 p^2 \Pi_{1/2} \delta^4(\theta_x - \theta_y) \left(\ln \frac{\Lambda}{p} + \text{конечные члены} \right) + \\ & + e^2 c_1 \delta^4(\theta_x - \theta_y) p^2 C \left(\alpha_j, \beta_j, \frac{M_j}{\Lambda}, \frac{m_j}{\Lambda} \right), \end{aligned} \quad (53)$$

где константа C определяется как

$$p^2 C = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} F_2(p) \quad (54)$$

и в общем случае отлична от нуля, что может быть легко проверено. Перенормированная функция Π^r , полученная в соответствии с предписанием (43), равна

$$\Pi[(\theta_x, p), (\theta_y, -p)] = -\frac{3}{16\pi^2} e^2 c_1 p^2 \Pi_{1/2} \delta^4(\theta_x - \theta_y) \left(\ln \frac{\mu}{p} + \text{конечные члены} \right), \quad (55)$$

что соответствует следующему вкладу в перенормированное эффективное действие:

$$\Delta \Gamma_R^{(1)} = \frac{3e^2}{32\pi^2} c_1 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} V^a(-p) \partial^2 \Pi_{1/2} V^a(p) \left(\ln \frac{\mu}{p} + \text{конечные члены} \right). \quad (56)$$

Рис. 2. Однопетлевые вклады в духовый пропагатор и дух-глюонную вершину.

Однопетлевая поправка к духовому пропагатору, соответствующая первой диаграмме на рис. 2, равна нулю. Мы также проверили, что однопетлевая поправка к дух-глюонной вершине, определяемая остальными диаграммами на этом рисунке, является конечной. Поэтому однопетлевая β -функция

$$\beta(\alpha) \equiv \frac{d}{d \ln \mu} \left(\frac{e^2}{4\pi} \right), \quad (57)$$

вычисленная с помощью неинвариантной регуляризации, описанной выше, равна

$$\beta(\alpha) = -\frac{3\alpha^2 c_1}{2\pi} + O(\alpha^3), \quad (58)$$

что согласуется с вычислениями, выполненными в рамках размерной редукции. Было бы интересно получить двухпетлевой вклад в β -функцию (57) при использовании рассматриваемой регуляризации, поскольку в суперсимметричной электродинамике [15], [16] такой вклад отличается от результата, полученного с помощью размерной редукции, и равен нулю.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе мы предложили специальную процедуру перенормировки для суперсимметричных теорий Янга–Миллса, которая гарантирует БРСТ-инвариантность перенормированной теории при использовании произвольной промежуточной регуляризации. При этом суперсимметричные ТСТ включаются в вычисления, что позволяет избежать появления неинвариантных контрчленов. Предложенная процедура иллюстрируется вычислением однопетлевой β -функции для $N = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса, регуляризованной с помощью неинвариантной версии метода высших производных. Было бы интересно также вычислить двухпетлевые квантовые поправки и сравнить их с соответствующим результатом в суперсимметричной электродинамике [15], [16].

Благодарности. Работа была частично поддержана грантом РФФИ № 02-01-00126 и Президентским грантом поддержки ведущих научных школ № НШ 2052.2003.1.

Список литературы

- [1] *G. 't Hooft, M. Veltman.* Nucl. Phys. B. 1972. V. 44. P. 189.
- [2] *W. Siegel.* Phys. Lett. B. 1979. V. 84. P. 193.
- [3] *I. Jack, D. R. T. Jones.* Regularisation of supersymmetric theory. In: Perspectives on Supersymmetry. Ed. G. L. Kane. Singapore: World Scientific, 1998. P. 149; hep-ph/9707278.
- [4] *A. A. Slavnov.* Nucl. Phys. B. 1971. V. 31. P. 301; *А. А. Славнов.* ТМФ. 1972. Т. 13. № 2. С. 174.
- [5] *T. Baleyev, A. A. Slavnov.* Mod. Phys. Lett. A. 1996. V. 11. P. 1539.
- [6] *А. А. Солошенко, К. В. Степанынц.* ТМФ. 2002. Т. 131. С. 135.
- [7] *A. A. Soloshenko, K. V. Stepanyantz.* Three-loop β -function for $N = 1$ supersymmetric electrodynamics, regularized by higher derivatives. hep-th/0304083.
- [8] *K. Nishihara, T. Kubota.* New derivation of anomaly-mediated gaugino mass in the higher derivative regularization method. hep-ph/0304283.
- [9] *P. West.* Nucl. Phys. B. 1986. V. 268. P. 113.
- [10] *O. Piguet, K. Sibold.* Nucl. Phys. B. 1985. V. 253. P. 517.
- [11] *O. Piguet, K. Sibold.* Nucl. Phys. B. 1984. V. 248. P. 301.
- [12] *A. A. Slavnov.* Phys. Lett. B. 2001. V. 518. P. 195.
- [13] *А. А. Славнов.* ТМФ. 2002. Т. 130. С. 3.
- [14] *А. А. Славнов, К. В. Степанынц.* ТМФ. 2003. Т. 135. С. 265; hep-th/0208006.
- [15] *A. A. Soloshenko, K. V. Stepanyantz.* Two-loop renormalization of $N = 1$ supersymmetric electrodynamics, regularized by higher derivatives. hep-th/0203118.
- [16] *K. V. Stepanyantz.* Anomaly puzzle in $N = 1$ supersymmetric electrodynamics as artifact of dimensional reduction. hep-th/0301167.

Поступила в редакцию 16.V.2003 г.