Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. В. Медведев, Гамильтониан и соотношения перестановки, *ТМФ*, 2000, том 122, номер 3, 325–333

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf570>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 15:59:33

ГАМИЛЬТОНИАН И СООТНОШЕНИЯ ПЕРЕСТАНОВКИ

На конкретном примере демонстрируется, что задание перестановочных соотношений (в классике – скобок Пуассона) между основными динамическими величинами не менее существенно для спецификации рассматриваемой системы, чем задание гамильтониана.

1. В научном фольклоре стало общепринятым отождествлять формулировку какой-либо – модельной или стремящейся описывать природу – теории с заданием ее гамильтониана. При этом – вольно или невольно – оказывается в тени роль перестановочных соотношений (в классическом описании – скобок Пуассона (СП)) вводимых динамических переменных. Такая непедантичность чревата возможностью досадных недоразумений, особенно когда, как то обычно бывает в теоретической физике, приходится заменять точное рассмотрение приближенным. Цель настоящей заметки состоит в том, чтобы наглядно продемонстрировать это обстоятельство на примере простейшей стохастической модели с двумя степенями свободы, введенной в научный оборот Матиньяном и др. [1–3] в связи с исследованиями полей Янга–Миллса.

2. Эта система описывается гамильтонианом

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2 + x^2 y^2}{2}, \quad (1)$$

фигурирующие в котором переменные (x, p_x, y, p_y) удовлетворяют “обычным” перестановочным соотношениям или, в классическом описании, имеют “обычную” матрицу скобок Пуассона:

$$(СП) = \begin{pmatrix} (x, x) & (x, p_x) & \dots & \dots \\ (p_x, x) & (p_x, p_x) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

которую мы, несколько условно, будем называть “диагональной”. Давно известно [4, 5], что эта система полностью стохастична, исключая множество меры нуль неустойчивых замкнутых траекторий. Гамильтоновы уравнения движения имеют вид

$$\frac{dx}{dt} = p_x, \quad \frac{dp_x}{dt} = -xy^2, \quad \frac{dy}{dt} = p_y, \quad \frac{dp_y}{dt} = -x^2y. \quad (3)$$

Поскольку система консервативна, то энергия $E = H$ сохраняется и доступная для движения часть конфигурационного пространства ограничивается парой равнобоковых гипербол, так что $x^2y^2 \leq 2E = 2H$. Она естественно делится на неравноправные области: “**арену**”, в которой $x^2 \sim y^2 < \sqrt{2E}$, и четыре “**рога**”, в которых либо $|y| \ll |x|$, либо $|x| \ll |y|$ (см. рисунок).

3. В каждом из **рогов**, будем считать для определенности, что в том, в котором $x > 0$, $|y| \ll x$, можно построить *приближенное решение* [6]

$$\begin{aligned} x &= x_0 - I \frac{t^2}{2}, & y &= \frac{\sqrt{2I}}{\sqrt{x}} \cos \phi, & \phi &= \int x dt = x_0 t - \frac{It^3}{6}, \\ p_x &= -It, & p_y &= -\sqrt{2I} \sqrt{x} \sin \phi, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\dot{x} = -It, \quad \dot{y} = -\sqrt{2I} \sqrt{x} \sin \phi - \frac{y}{2x} \dot{x} = -\sqrt{2I} \sqrt{x} \sin \phi + \frac{\sqrt{2I} I}{2x\sqrt{x}} t \cos \phi \neq p_y.$$

Оно *точно* удовлетворяет *приближенным* уравнениям

$$\frac{dx}{dt} = p_x, \quad \frac{dp_x}{dt} = -\frac{xy^2}{2} - \frac{p_y^2}{2x}, \quad \frac{dy}{dt} = p_y - \frac{y}{2x} p_x, \quad \frac{dp_y}{dt} = -x^2y + \frac{p_x p_y}{2x}. \quad (5)$$

Чтобы это были обычные уравнения гамильтонова формализма, в котором переменные (x, p_x, y, p_y) образуют канонический набор с матрицей скобок Пуассона (2), надо, чтобы эти уравнения имели бы форму

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_x}, \quad \frac{dp_x}{dt} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_y}, \quad \frac{dp_y}{dt} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial y} \quad (6)$$

с некоторой функцией Гамильтона $\tilde{H}(x, p_x, y, p_y)$. Но чтобы последние уравнения были совместны, необходимо, чтобы выполнялись условия интегрируемости, например должно быть

$$\frac{\partial}{\partial p_y} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_x} = \frac{\partial}{\partial p_x} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_y}.$$

Между тем в системе (5), трактуемой как (6), мы получили бы

$$\frac{\partial}{\partial p_y} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_x} = \frac{\partial}{\partial p_y} p_x = 0,$$

в то время как

$$\frac{\partial}{\partial p_x} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_y} = \frac{\partial}{\partial p_x} \left(p_y - \frac{y}{2x} p_x \right) = -\frac{y}{2x} \neq 0!$$

Таким образом, уравнения (5) не могут быть уравнениями Гамильтона в форме (6) для какого бы то ни было $\tilde{H}$!

4. Эту неприятность удастся устранить за счет того, что форма (6) не есть наиболее общая форма гамильтоновых уравнений; такой является, как известно, форма

$$\frac{dx}{dt} = (\tilde{H}, x), \quad \frac{dp_x}{dt} = (\tilde{H}, p_x), \quad \frac{dy}{dt} = (\tilde{H}, y), \quad \frac{dp_y}{dt} = (\tilde{H}, p_y), \quad (7)$$

которая не будет совпадать с (6), если матрица (СП) скобок Пуассона не будет иметь специального “диагонального” вида (2). Чтобы использовать такую возможность, попробуем, например, изменить только равнявшиеся нулю СП p_x с y и p_y . Система (7) примет тогда вид

$$\dot{x} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_x} = p_x, \quad (8a)$$

$$\dot{p}_x = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial x}(-1) + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial y}(y, p_x) + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_y}(p_y, p_x) = -\frac{p_y^2}{2x} - \frac{xy^2}{2}, \quad (8б)$$

$$\dot{y} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_x}(p_x, y) + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_y} = p_y - \frac{y}{2x} p_x, \quad (8в)$$

$$\dot{p}_y = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_x}(p_x, p_y) + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial y}(-1) = \frac{p_x p_y}{2x} - x^2 y. \quad (8г)$$

Из уравнения (8a) следует, что $\tilde{H} = p_x^2/2 + H'(x, y, p_y)$. Далее, из (8в) с учетом (8a) получается, что

$$p_x(p_x, y) + \frac{\partial H'}{\partial p_y} = -\frac{y}{2x} p_x + p_y,$$

откуда, разделяя члены, зависящие от p_x и p_y , мы приходим к тому, что $(p_x, y) = -y/2x$ и $H' = p_y^2/2 + H''(x, y)$. Используем теперь равенство (8г), которое тоже даст нам два уравнения: $p_x(p_x, p_y) = p_x p_y/2x$ и $\partial H''/\partial y = x^2 y$, из которых получим, что $(p_x, p_y) =$

$p_y/2x$ и $H'' = x^2 y^2/2 + H'''(x)$. Таким образом, из (8а), (8в) и (8г) мы получаем для гамильтониана

$$\tilde{H} = \frac{p_x^2 + p_y^2 + x^2 y^2}{2} + H'''(x).$$

Подставляя это выражение в оставшееся уравнение (8б), увидим, что оно удовлетворяется, если положить $H'''(x) = 0$.

Итак, наша попытка придать системе (5) гамильтонову форму, допуская ненулевые значения для СП (p_x, p_y) и (p_x, y) , увенчалась успехом: уравнения (5), которым удовлетворяют решения (4) приближенной задачи, могут быть приведены к гамильтоновой форме с **“недиагональной” матрицей скобок Пуассона**:

$$(\text{СП}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{y}{2x} & \frac{p_y}{2x} \\ 0 & \frac{y}{2x} & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{p_y}{2x} & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

(Тут следовало бы еще проверить, что так назначенные СП удовлетворяют тождествам Якоби; выкладка не составляет труда.) Самое же неожиданное состоит в том, что возникающий для *приближенного* решения гамильтониан

$$\tilde{H} = \frac{p_x^2 + p_y^2 + x^2 y^2}{2} = H \quad (10)$$

есть просто **гамильтониан точной модели Матиняна (1)!**

ИТАК, из одного и того же гамильтониана, (т.е. из гамильтониана, для которого мы держим неизменной форму его зависимости от координат и импульсов) *судя по тому, какие мы назначили правила перестановки, мы получаем:*

ЛИБО полностью стохастическую модель Матиняна,

ЛИБО приближенную точно интегрируемую модель.

Задание перестановок (скобок Пуассона) играет в формулировке теории не менее кардинальную роль, чем задание гамильтониана.

5. В приближенной задаче переменные (x, p_x, y, p_y) не образуют, как мы видим, канонического набора. Их можно, однако, выразить (с помощью неканонического преобразования) через другие, набор которых будет уже каноническим. Именно, если ввести новый комплект основных переменных (x, π_x, y, p_y) , положив

$$\pi_x = p_x + \frac{y}{2x} p_y, \quad p_x = \pi_x - \frac{y}{2x} p_y, \quad (11)$$

то для них, как легко проверить, матрица СП будет иметь вид (2), т.е. они образуют канонический набор.

Но теперь гамильтониан, если выразить его через новые переменные, потеряет свою простую форму (10), принимая вид

$$H_{\text{app}} = \frac{1}{2} \left[\left(\pi_x - \frac{y}{2x} p_y \right)^2 + p_y^2 + x^2 y^2 \right]. \quad (12)$$

Гамильтониан (12) с перестановочными соотношениями (2) приводит для новых переменных к (гамильтоновым) уравнениям движения:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \pi_x - \frac{y}{2x}p_y, & \frac{d\pi_x}{dt} &= -xy^2 - \frac{yp_y}{2x^2} \left(\pi_x - \frac{y}{2x}p_y \right), \\ \frac{dy}{dt} &= p_y - \frac{y}{2x} \left(\pi_x - \frac{y}{2x}p_y \right), & \frac{dp_y}{dt} &= -x^2y + \frac{p_y}{2x} \left(\pi_x - \frac{y}{2x}p_y \right),\end{aligned}\quad (13)$$

которые точно интегрируются, приводя к решению

$$\begin{aligned}x &= x_0 - I \frac{t^2}{2}, & \pi_x &= -It - \frac{I}{x} \sin \phi \cos \phi, \\ y &= \frac{\sqrt{2I}}{\sqrt{x}} \cos \phi, & p_y &= -\sqrt{2I} \sqrt{x} \sin \phi, \\ \phi &= \int x dt = x_0 t - \frac{It^3}{6},\end{aligned}\quad (14)$$

совпадающим, естественно, если вернуться в нем к старым переменным, с выписанным выше (4).

Итак, что касается приближенной системы, то мы видим, что ее равным образом можно описывать как диагональным по импульсам гамильтонианом (10) с “недиагональной” матрицей СП (9), так и переменными (11) с “диагональной” СП-матрицей (2), но зато с “недиагональным” гамильтонианом (12). При этом “значения” обоих гамильтонианов равны $H(x, p_x, y, p_y) = H_{\text{app}}(x, \pi_x, y, p_y)$, т.е. они получается один из другого (неканонической!) заменой переменных.

6. Что можно сказать об энергии приближенной системы? Сохраняется ли для приближенного решения точная энергия? Этот вопрос не совсем тривиален. В то время как сохраняющуюся энергию точного решения модели Матияна можно было с равным правом выражать как через импульсы, так и через скорости

$$E_{\text{ex}} = \frac{p_x^2 + p_y^2 + x^2 y^2}{2} = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + x^2 y^2}{2} = \text{const}, \quad (15)$$

при переводе этого выражения на язык приближенного решения возникает целый ряд альтернатив.

Через *исходные импульсы* p_x, p_y – подставляя в точную энергию их приближенное выражение – мы получили бы

$$E(x_{\text{app}}, p_{x,\text{app}}, \dots) = \frac{p_x^2 + p_y^2 + x^2 y^2}{2} = E = \text{const}. \quad (16)$$

Если же перейти к исправленным импульсам, для которых выполняются уравнения Гамильтона с диагональной СП-матрицей, то для сохраняющейся энергии E_{app} возникнет уже знакомое нам выражение приближенной функции Гамильтона

$$E_{\text{app}}(x, \pi_{\text{app}}, \dots) = \frac{\left(\pi_x - \frac{y}{2x}p_y \right)^2 + p_y^2 + x^2 y^2}{2}. \quad (17)$$

Но можно стать и на ту точку зрения, что приближенное решение определяет зависимость от времени только *координат*, а до *импульсов* и всей гамильтоновой структуры нам вообще нет дела. Тогда мы будем обязаны рассматривать и энергию как функцию *координат* и *скоростей*, получающихся из них простым дифференцированием по времени. В таком случае мы получили бы

$$E_{\text{app}}(x, \dot{x}, \dots) = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + x^2 y^2}{2} = E \left(1 - \frac{2I \sqrt{2E(1 - \frac{x}{x_0})}}{x} \sin \phi \cos \phi + \frac{I^2 x_0}{x^3} \left(1 - \frac{x}{x_0} \right) \cos^2 \phi \right) \neq \text{const}. \quad (18)$$

Для приближенного решения, выраженного через координаты и скорости, полная энергия **не сохраняется!** Сохраняется же величина

$$E_{\text{app}} = \frac{\dot{x}^2 + \left(\dot{y} + \frac{y}{2x} \dot{x} \right)^2 + x^2 y^2}{2} \quad (19)$$

– *приближенная энергия*. Если мы посмотрим, как связана она с $E_{\text{app}}(x, \pi_x, \dots)$ и с $E_{\text{ex}}(x_{\text{app}}, p_{x, \text{app}}, \dots)$, то, естественно, убедимся, что численно все они совпадают.

7. В то время как исходная модель Матиняна выглядела чрезвычайно симметрично, в ней были диагональны и гамильтониан (1), и матрица СП (2), в обоих рассмотренных пока способах гамильтонова описания приближенной системы диагональность нарушалась: в одном диагональна функция Гамильтона (10), но недиагональна матрица СП (9), в другом СП-матрица диагональна, как в (2), но зато недиагональна кинетическая энергия в гамильтониане (12).

Хотелось бы найти такие переменные, в которых было бы диагонально и то, и другое. Для этого удобно отталкиваться от переменных (x, p_x, y, p_y) , в которых диагонален гамильтониан, и ввести еще одни импульсы

$$P_x = f(x, y)p_x, \quad P_y = g(x, y)p_y, \quad (20)$$

отличающиеся от p_x, p_y лишь множителями, зависящими только от координат. Такое преобразование не должно испортить диагональности кинетической энергии.

Чтобы добиться диагональности СП-матрицы в новых переменных, потребуем прежде всего, чтобы СП (P_x, P_y) равнялась бы, как то для пары порядочных импульсов надлежит, нулю:

$$\begin{aligned} 0 &= (P_x, P_y) = (f(x, y)p_x, g(x, y)p_y) = \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} p_x, f, \frac{\partial f}{\partial y} p_x, 0 \right) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{y}{2x} & \frac{p_y}{2x} \\ 0 & \frac{y}{2x} & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{p_y}{2x} & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} p_y \\ 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y} p_y \\ g \end{pmatrix} = \\ &= \left(f \frac{\partial g}{\partial x} - f \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{fg}{2x} \right) p_y - \frac{\partial f}{\partial y} g p_x = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

что приводит к требованиям

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{1}{2x}g - \frac{y}{2x} \frac{\partial g}{\partial y} = 0. \quad (22)$$

Общим решением этой системы будет

$$f(x, y) = f(x), \quad g(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x}}h(\sqrt{x}y) \quad (23)$$

с произвольными f и h .

Введя новые импульсы, надо ввести, конечно, и новые координаты, которые мы будем считать какими-то функциями опять только старых координат

$$X = X(x, y), \quad Y = Y(x, y). \quad (24)$$

Потребуем канонических диагональных значений для остальных СП:

$$\begin{aligned} (P_X, X) &= f \frac{\partial X}{\partial x} - f \frac{y}{2x} \frac{\partial X}{\partial y} = 1, \\ (P_Y, X) &= \frac{h}{\sqrt{x} \frac{\partial X}{\partial y}} = 0, \\ (P_X, Y) &= f \frac{\partial Y}{\partial x} - f \frac{y}{2x} \frac{\partial Y}{\partial y} = 0, \\ (P_Y, Y) &= \frac{h}{\sqrt{x}} \frac{\partial Y}{\partial y} = 1. \end{aligned} \quad (25)$$

Простые вычисления показывают, что общим решением этих уравнений будет

$$\begin{aligned} X(x, y) &= X(x), & X(x) &= \int \frac{dx}{f(x)} \quad \text{или} \quad f(x) = \frac{1}{\frac{dX}{dx}} = \frac{dx}{dX}, \\ Y(x, y) &= Y(\sqrt{x}y), & Y(\sqrt{x}y) &= \int \frac{d(\sqrt{x}y)}{h(\sqrt{x}y)} \quad \text{или} \quad h(\sqrt{x}y) = \frac{1}{\frac{dY(\sqrt{x}y)}{d(\sqrt{x}y)}}, \end{aligned} \quad (26)$$

где функции f и h остаются произвольными.

8. В этом состоит общий ответ на вопрос о том, когда преобразование (20), (24) приведет к каноническому набору. Для наглядности полезно разложить это преобразование на два этапа, на первом из которых простейшим выбором $f = 1$, $h = 1$ вводятся канонические переменные

$$\begin{aligned} Q_1 &= x, & \frac{dQ_1}{dx} &= 1, & P_1 &= p_x = \pi_x - \frac{y}{2x}p_y, \\ Q_2 &= \sqrt{x}y, & \frac{dQ_2}{d(\sqrt{x}y)} &= 1, & P_2 &= \frac{1}{\sqrt{x}}p_y \end{aligned} \quad (27)$$

с обратными формулами

$$x = Q_1, \quad p_x = P_1, \quad y = \frac{1}{\sqrt{Q_1}} Q_2, \quad p_y = \sqrt{Q_1} P_2, \quad (28)$$

и, поскольку в **(неканонических!)** (p_x, x, p_y, y) приближенный гамильтониан равнялся просто

$$H_{\text{app}} = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + x^2 y^2),$$

то в **(канонических!)** $\{P_1, Q_1, P_2, Q_2\}$ он примет вид

$$H_{\text{app}} = \frac{P_1^2 + Q_1(P_2^2 + Q_2^2)}{2}. \quad (29)$$

На втором этапе в рассматриваемых нами преобразованиях разрешенными остаются только сепаратные преобразования координат внутри каждой группы 1 и 2, не перемешивающие переменные разных групп:

$$X = X(Q_1), \quad P_X = \frac{1}{\frac{dX}{dQ_1}} P_1, \quad Y = Y(Q_2), \quad P_Y = \frac{1}{\frac{dY}{dQ_2}} P_2. \quad (30)$$

После этого гамильтониан принимает вид

$$H_{\text{app}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\left(\frac{dQ_1}{dX}\right)^2} P_X^2 + \frac{Q_1}{2} \left(\frac{1}{\left(\frac{dQ_2}{dY}\right)^2} P_Y^2 + Q_2^2 \right), \quad (31)$$

откуда ясно, что преобразование Y -пары может только усложнить вид гамильтониана, в то время как преобразованием X -пары можно еще повысить его симметрию, например, сделать коэффициенты при всех трех квадратах в H_{app} одинаковыми. Действительно, требуя

$$\frac{1}{\left(\frac{dQ_1}{dX}\right)^2} = Q_1, \quad dX = Q_1^{\frac{1}{2}} dQ_1, \quad (32)$$

получаем

$$X = \frac{2}{3} Q_1^{\frac{3}{2}}, \quad P_X = \frac{P_1}{\sqrt{Q_1}}, \quad Q_1 = \left(\frac{3}{2} X \right)^{\frac{2}{3}}, \quad Q_2 = Y, \quad (33)$$

и гамильтониан приобретает форму

$$H_{\text{app}} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} X \right)^{\frac{2}{3}} [P_X^2 + P_Y^2 + Y^2]. \quad (34)$$

Окончательные же переменные выражаются через исходные как

$$X = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}, \quad P_X = \frac{p_x}{\sqrt{x}} = \frac{\pi_x}{\sqrt{x}} - \frac{y}{2x\sqrt{x}} p_y, \quad Y = \sqrt{x} y, \quad P_Y = \frac{1}{\sqrt{x}} p_y \quad (35)$$

с обратными формулами

$$x = \left(\frac{3}{2} X \right)^{\frac{2}{3}}, \quad p_x = \left(\frac{3}{2} X \right)^{\frac{1}{3}} P_X, \quad y = \frac{Y}{\left(\frac{3}{2} X \right)^{\frac{1}{3}}}, \quad p_y = \left(\frac{3}{2} X \right)^{\frac{1}{3}} P_Y. \quad (36)$$

9. Заметим в заключение, что наиболее удобной формой гамильтониана приближенной задачи является, по-видимому, все-таки форма (29), позволяющая найти решение просто устным счетом “на пальцах”. В самом деле, поскольку гамильтониан (29) зависит от P_2 и Q_2 только через

$$I = \frac{P_2^2 + Q_2^2}{2},$$

то I коммутирует с ним и, значит, сохраняется. А сумма квадратов чего постоянна, даже равна единице? — известно, синуса и косинуса. Значит, Q_2 и P_2 равны соответственно $\sqrt{2I} \cos \phi(t)$ и $-\sqrt{2I} \sin \phi(t)$ с некоторым $\phi(t)$. Далее, I постоянно, поэтому движение $Q_1(t), P_1(t)$ есть тривиальное движение в постоянном поле. Наконец, вклад I в гамильтониан пропорционален $x(t)$, поэтому $d\phi/dt = x$.

Благодарности. Автор признателен участникам семинаров в МИРАН и ИТЭФ за замечания, сделанные в процессе обсуждения докладов. В особенности мне хотелось бы поблагодарить И. Я. Арефьеву и П. Б. Медведева.

Список литературы

- [1] Г. З. Басеян, С. Г. Матинян, Г. К. Саввиди. Письма в ЖЭТФ. 1979. Т. 29. С. 641.
- [2] С. Г. Матинян, Г. К. Саввиди, Н. Г. Тер-Арутюнян-Саввиди. ЖЭТФ. 1981. Т. 80. С. 830.
- [3] С. Г. Матинян, Г. К. Саввиди, Н. Г. Тер-Арутюнян-Саввиди. Письма в ЖЭТФ. 1981. Т. 34. С. 613.
- [4] Е. С. Николаевский, Л. Н. Шур. Пересечение сепаратрис периодических траекторий и неинтегрируемость классических уравнений Янга–Миллса. Препринт ИТЭФ-3. М.: ИТЭФ, 1983.
- [5] Б. И. Чириков, Д. Л. Шепелянский. ЯФ. 1982. Т. 36. № 6. С. 1563.
- [6] Б. В. Медведев. ТМФ. 1984. Т. 60. С. 224; 1989. Т. 79. С. 404.

Поступила в редакцию 31.III.1999 г.