Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Гринина, Решение операторного уравнения $i\varepsilon dy/dt = A(t)y$ на интервалах, содержащих точки поворота, *ТМФ*, 2000, том 122, номер 3, 357–371

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf572>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 13:39:13

© 2000 г.

Е. А. Гринина*

РЕШЕНИЕ ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ

$i\varepsilon dy/dt = A(t)y$ НА ИНТЕРВАЛАХ, СОДЕРЖАЩИХ ТОЧКИ ПОВОРОТА

Получены формальные решения уравнения $i\varepsilon dy/dt = A(t)y$ в виде полных асимптотических разложений при $\varepsilon \rightarrow 0$ на интервалах, содержащих параболическую и гиперболическую точки поворота. Выполнено детальное исследование высших приближений в разложениях формальных решений по степеням ε .

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим уравнение

$$i\varepsilon \frac{dy}{dt} = A(t)y, \quad (1)$$

где $y(t) \in \mathcal{X}$, $\mathcal{X}$ – банахово пространство, $t \in \Delta = (\alpha, \beta)$, Δ – интервал на вещественной оси $\mathbb{R}$, $A(t)$ – линейный оператор в $\mathcal{X}$. Мы будем исследовать асимптотическое поведение решений при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\varepsilon > 0$. Оператор $A(t)$ может быть неограниченным, во всех случаях мы предполагаем, что он замкнут и определен на плотном множестве $D \subset \mathcal{X}$.

Уравнение (1) и вопрос об асимптотическом поведении его решений при $\varepsilon \rightarrow 0$ были предметом многочисленных обсуждений (см., например, [1–3]). Вопрос рассматривался как в рамках адиабатической теоремы, так и в рамках асимптотической теории дифференциальных уравнений. Мы следуем здесь в основном работе [1].

Определим рассматриваемую задачу более конкретно. Мы считаем, что спектр $\sigma(t)$ оператора $A(t)$ состоит из двух компонент:

$$\sigma(t) = \sigma_0(t) \cup \sigma_1(t), \quad (2)$$

так что:

- 1) $\text{dist}(\sigma_0(t), \sigma_1(t)) \geq \delta > 0$, $t \in \Delta$;
- 2) спектральное инвариантное подпространство $\mathcal{X}_0(t)$, соответствующее компоненте σ_0 , двумерно: $\dim \mathcal{X}_0(t) = 2$;

* Научно-исследовательский институт физики Санкт-Петербургского государственного университета, С.-Петербург, Россия

3) $\sigma(t)$ содержится в полосе $|\operatorname{Im} \lambda| \leq d$, вне которой резольвента $\mathcal{R}^A$ оператора $A(t)$ допускает оценку

$$\|\mathcal{R}^A(\lambda)\| \leq \operatorname{const}(1 + |\lambda|)^{s_1}, \quad (3)$$

d и s_1 не зависят от t .

Наша задача состоит в том, чтобы описать индивидуальные формальные решения уравнения (1), отвечающие подпространству $\mathcal{X}_0(t)$, и их полные асимптотические разложения при $\varepsilon \rightarrow 0$. Возможность описания таких решений зависит от структуры $\sigma_0(t)$. Обозначим через $k_1(t)$ и $k_2(t)$ собственные значения оператора $A_0(t) = A(t)|_{\mathcal{X}_0}$. Случай, когда собственные значения оператора $A_0(t)$ различны всюду на Δ , является стандартным (см. [2]). Мы предполагаем, что значения $k_1(t)$ и $k_2(t)$ совпадают либо только в одной точке t_1 интервала Δ , либо только в двух точках t_1 и t_2 интервала Δ . Будем искать равномерные полные в степенных порядках по ε разложения решений при $\varepsilon \rightarrow 0$. Это потребует дополнительных предположений относительно оператора A_0 . В обоих случаях мы будем считать, что оператор A_0 допускает необходимую спектральную модель.

Операторнозначная функция $M(t): \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ является спектральной моделью оператора $A_0(t)$, если существует обратимый оператор $W(t): \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathcal{X}$ такой, что:

- 1) $W(t)$, $W^{-1}(t)$ – гладкие функции переменной t ;
- 2) $W^{-1}W = I_{\mathbb{C}^2}$, $WW^{-1} = P_0(t)$, $P_0(t)$ – спектральный проектор на $\mathcal{X}_0$;
- 3) $A(t)W(t) = W(t)[(1/2) \operatorname{tr} A_0(t) + M(t)]$.

Будем говорить, что оператор $V(t)$ принадлежит классу $\mathbf{B}_A(\Delta)$, если области значений всех производных $V^{(r)}(t)$ содержатся в областях определений всех неотрицательных степеней $A^{(s)}(t)$ оператора $A(t)$ и произведения $A^{(s)}(t)V^{(r)}(t)$ равномерно ограничены в смысле нормы при $t \in \Delta$.

Мы предполагаем, что $W \in \mathbf{B}_A(\Delta)$.

Далее введем функцию $l(t)$:

$$k_1(t) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} A_0(t) + l(t), \quad k_2(t) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} A_0(t) - l(t). \quad (4)$$

В точках совпадения собственных значений $l(t) = 0$. Заметим также, что $\operatorname{tr} M = 0$ и $\det M = -l^2$.

Точка t_1 называется параболической точкой поворота, если на интервале Δ , $t_1 \in \Delta$, выполняются следующие условия:

- 1) l^2 – гладкая функция с единственным корнем в точке t_1 , а ее производная корнем не имеет;
- 2) оператор

$$U = \zeta' \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\zeta & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

является спектральной моделью оператора A_0 , здесь ζ – гладкое решение уравнения

$$l^2 = -\zeta'^2 \zeta, \quad \zeta(t_1) = 0. \quad (6)$$

Заметим, что уравнение

$$i\varepsilon \frac{dz}{dt} = U(t)z \quad (7)$$

эквивалентно явно решаемому в терминах функций Эйри уравнению

$$i\varepsilon \frac{du}{d\eta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\eta & 0 \end{pmatrix} u, \quad \eta = \zeta(t). \quad (8)$$

Пара параболических точек поворота t_1, t_2 образует одну гиперболическую (двойную) точку поворота, если на интервале $\Delta, t_1, t_2 \in \Delta$,

- 1) l^2 — гладкая функция с двумя корнями в точках t_1 и t_2 ;
- 2) $(l^2)'$ имеет единственный и притом простой корень строго внутри интервала (t_1, t_2) ;
- 3) $l^2 > 0$ вне интервала $[t_1, t_2]$;
- 4) один из операторов

$$H_1(t) = \zeta' \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \zeta^2 - \mu^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_2(t) = \zeta' \begin{pmatrix} -\zeta & -\mu \\ \mu & \zeta \end{pmatrix} \quad (9)$$

является спектральной моделью оператора $A_0(t)$.

В обоих случаях ζ определяется дифференциальным уравнением

$$l^2 = \zeta'^2(\zeta^2 - \mu^2), \quad \zeta(t_1) = -\mu, \quad \zeta(t_2) = \mu. \quad (10)$$

Параметр μ зависит от расстояния между точками t_1 и t_2 и дается формулой

$$\mu^2 = \frac{2}{\pi} \int_{t_1}^{t_2} |l(t)| dt. \quad (11)$$

Как и в параболическом случае, модельные уравнения для гиперболической точки

$$i\varepsilon \frac{dz}{dt} = H_m(t)z, \quad m = 1, 2, \quad (12)$$

сводятся к уравнениям, явно разрешимым в терминах функций параболического цилиндра:

$$i\varepsilon \frac{du}{d\eta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \eta^2 - \nu^2 & 0 \end{pmatrix} u, \quad i\varepsilon \frac{du}{d\eta} = \begin{pmatrix} -\eta & -\nu \\ \nu & \eta \end{pmatrix} z, \quad \eta = \zeta(t). \quad (13)$$

Важно отметить, что модели H_1 и H_2 друг к другу не сводятся и являются независимыми моделями двойной точки поворота.

С тем же успехом можно было бы рассматривать случай гиперболической точки поворота, для которой $l^2 < 0$ вне интервала $[t_1, t_2]$. Для самосопряженного оператора A возможен только случай $l^2 > 0$, при этом μ следует брать мнимым, т.е. точки t_1, t_2 — комплексными.

Мы будем следовать работе [1], где изложенная схема была применена к изучению точек поворота для уравнений с адиабатическим возмущением с периодическим потенциалом. Нашей конечной целью является детальное исследование высших приближений в разложениях формальных решений по степеням ε . Мы не останавливаемся на строгом обосновании асимптотического характера рассматриваемых формальных решений.

2. ОБЩАЯ СТРУКТУРА ОПЕРАТОРА T

Основная идея построения решений уравнения (1) состоит в сравнении этого уравнения с модельными уравнениями (8) или (12) в зависимости от типа рассматриваемой точки поворота. Далее, пока наши рассуждения не будут требовать фиксации конкретной спектральной модели $U(t)$ или $H(t)$, примем для них единое обозначение $M(t)$.

Решение уравнения (1), отвечающее подпространству $\mathcal{X}_0$, следует искать в виде

$$y(t) = \exp \left[-\frac{i}{2\varepsilon} \int \operatorname{tr} A_0(t) dt \right] T(t) z(t), \quad (14)$$

где $T(t)$ – линейный оператор $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathcal{X}$, гладко зависящий от $t \in \Delta$, $z(t)$ – решение подходящего модельного уравнения.

Подставляя решение (14) в исходное уравнение (1), получаем уравнение для $T(t)$:

$$\begin{aligned} i\varepsilon \frac{dT}{dt} &= \mathcal{K}T, \quad \mathcal{K}T \doteq \tilde{A}T - TM, \\ \tilde{A} &= A - \frac{1}{2} \operatorname{tr} A_0 I_{\mathcal{X}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Таким образом, построение решений уравнения (1) в виде формальных асимптотических разложений сводится к построению гладкого решения уравнения (15) в виде

$$T(t, \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} (i\varepsilon)^n T_n(t). \quad (16)$$

Конкретный вид оператора T зависит от выбора спектральной модели M в уравнении (15), т.е. от характера точки поворота.

Прежде всего изучим общую структуру оператора T , не зависящую от выбора конкретной спектральной модели в уравнении (15). Подставляя решение (16) в уравнение (15), получаем простую рекуррентную схему для нахождения последовательных членов разложения (16):

$$\frac{dT_{n-1}}{dt} = \mathcal{K}T_n. \quad (17)$$

Старший член T_0 разложения (16) удовлетворяет однородному уравнению.

Чтобы воспользоваться предложенной рекуррентной схемой, необходимо обратить оператор $\mathcal{K}$, для этого следует решить уравнение

$$\mathcal{K}X \doteq \tilde{A}X - XM = F, \quad (18)$$

где $F: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathcal{X}$ – заданный ограниченный оператор. Такие уравнения хорошо известны из теории возмущений. Уравнение (18) эквивалентно паре уравнений в спектральных инвариантных подпространствах

$$\begin{cases} \tilde{A}_0 X_0 - X_0 M = F_0, & F_0 = P_0 F, & X_0 = P_0 X, \\ \tilde{A}_1 X_1 - X_1 M = F_1, & F_1 = P_1 F, & X_1 = P_1 X, \end{cases} \quad (19)$$

P_0 – спектральный проектор, отвечающий σ_0 , $P_0 + P_1 = I$, $\tilde{A}_1 = P_1 A$.

Рассмотрим второе уравнение из пары (19). Так как спектры операторов $\tilde{A}_1$ и M разделены, это уравнение может иметь только одно решение. Если имеют место свойства (2) и (3) и $F_1 \in \mathbf{B}_A(\Delta)$, то решение существует и дается формулой

$$X_1 = \Gamma F_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} R^{\tilde{A}_1}(\lambda) F_1 R^M(\lambda) d\lambda, \quad (20)$$

где $R^{\tilde{A}_1}(\lambda)$ и $R^M(\lambda)$ – резольвенты соответствующих операторов, C_0 – контур, окружающий компоненту σ_0 спектра σ . Заметим, что оператор (20) есть оператор того же класса, что и F_1 : $X_1 \in \mathbf{B}_A(\Delta)$.

Теперь обсудим первое уравнение из пары (19). Если обозначить

$$f_0 = W^{-1} F_0, \quad x_0 = W^{-1} X_0, \quad (21)$$

то это уравнение можно переписать в виде

$$f_0 = M x_0 - x_0 M \doteq \text{ad } M x_0, \quad (22)$$

где $\text{ad } M$ – линейный оператор в четырехмерном пространстве $\mathcal{B}$ линейных операторов $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$. Пространство $\mathcal{B}$ содержит два двумерных инвариантных подпространства

$$\mathcal{B}_0 = \text{Ker}(\text{ad } M), \quad \mathcal{B}_1 = \text{Im}(\text{ad } M). \quad (23)$$

Подпространство $\mathcal{B}_0$ состоит из операторов, коммутирующих с M . Эти подпространства ортогональны в следующем смысле:

$$\text{tr}(\phi\psi) = 0, \quad \phi \in \mathcal{B}_0, \quad \psi \in \mathcal{B}_1. \quad (24)$$

В качестве базиса в $\mathcal{B}_0$ естественно выбрать операторы $\{I, M\}$, тогда неоднородное уравнение (22) имеет решение, если его правая часть удовлетворяет паре условий

$$\text{tr } f_0 = 0, \quad \text{tr}(f_0 M) = 0. \quad (25)$$

Элементы подпространства $\mathcal{B}_1$ удовлетворяют антикоммутаторному уравнению

$$\psi M + M \psi = 0. \quad (26)$$

Следовательно,

$$\text{ad } M x_0 = 2M x_0 = -2x_0 M. \quad (27)$$

Теперь решение неоднородного уравнения (22) можно выписать в явной форме:

$$x_0 = \frac{1}{2} M^{-1} f_0 = -\frac{1}{2} f_0 M^{-1}. \quad (28)$$

В итоге с учетом того, что для используемых спектральных моделей

$$M^{-1} = \frac{1}{l^2} M, \quad (29)$$

общее решение первого уравнения из пары (19) имеет вид

$$X_0 = W[aI + bM] - \frac{1}{2l^2} W f_0 M, \quad (30)$$

где a и b – скалярные функции.

Из (30) видно, что полученное решение имеет сингулярность в точках поворота ($l = 0$). Выделим эту сингулярность непосредственно.

Обозначим собственные векторы оператора $\text{ad } M$, отвечающие собственным числам l и $-l$, через $\mathcal{X}_+ = \mathcal{X}_+(l)$ и $\mathcal{X}_- = \mathcal{X}_-(-l)$, соответственно. Введем

$$\mathcal{X}_e = \frac{1}{2}(\mathcal{X}_+ + \mathcal{X}_-), \quad \mathcal{X}_o = \frac{1}{2l}(\mathcal{X}_+ - \mathcal{X}_-). \quad (31)$$

Если

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}, \quad (32)$$

то нетрудно вычислить, что

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_e &= -m_{12}M + 2l^2\sigma_-, & \sigma_- &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{X}_o &= \begin{pmatrix} m_{12} & 0 \\ -2m_{11} & -m_{12} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (33)$$

Заметим, что $\mathcal{X}_e$ и $\mathcal{X}_o$ являются гладкими функциями по t . Так как $\text{tr}(\mathcal{X}_+^2) = \text{tr}(\mathcal{X}_-^2) = 0$, то с учетом соотношений

$$\text{tr}(\mathcal{X}_+\mathcal{X}_-) = -4m_{12}^2l^2, \quad \text{tr}(f_0\mathcal{X}_e) = 2l^2 \text{tr}(f_0\sigma_-) \quad (34)$$

для f_0 ($f_0 \in \mathcal{B}_1$) можно получить следующее представление:

$$f_0 = \mathcal{X}_+ \frac{\text{tr}(f_0\mathcal{X}_-)}{\text{tr}(\mathcal{X}_+\mathcal{X}_-)} + \mathcal{X}_- \frac{\text{tr}(f_0\mathcal{X}_+)}{\text{tr}(\mathcal{X}_+\mathcal{X}_-)} = -\frac{\text{tr}(f_0\sigma_-)}{m_{12}^2} \mathcal{X}_e + \frac{\text{tr}(f_0\mathcal{X}_o)}{2m_{12}^2} \mathcal{X}_o. \quad (35)$$

При выводе этих формул предполагалось, что $m_{12} \neq 0$, что выполнено для используемых спектральных моделей.

Теперь можно явно выделить сингулярность решения (30). Подставляя в (30) представление (35) и учитывая, что

$$M\mathcal{X}_e = -\mathcal{X}_eM = k^2\mathcal{X}_o, \quad M\mathcal{X}_o = -\mathcal{X}_oM = \mathcal{X}_e,$$

получаем решение (30) в виде

$$X_0 = W \left(aI + \left(b - \frac{\text{tr}(f_0 \mathcal{X}_o)}{4m_{12}l^2} \right) M \right) - W \left(\frac{\text{tr}(f_0 \mathcal{X}_o)}{4m_{12}^2} \sigma_- + \frac{\text{tr}(f_0 \sigma_-)}{4m_{12}^2} \mathcal{X}_o \right), \quad (36)$$

слагаемые во второй скобке (36) являются гладкими.

В итоге можно заключить, что общая структура оператора T дается формулой

$$\begin{aligned} T &= W(aI + \tilde{b}M) + i\varepsilon S, \\ \tilde{b} &= b - i\varepsilon \frac{\text{tr}(W^{-1}T'\mathcal{X}_o)}{4m_{12}l^2}, \quad S: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathcal{X}. \end{aligned} \quad (37)$$

Уравнение (15) имеет решение, если

$$\text{tr}(W^{-1}T') = 0, \quad \text{tr}(W^{-1}T'M) = 0. \quad (38)$$

При этих условиях

$$S = -\frac{1}{2}W \left[\frac{\text{tr}(W^{-1}T'\mathcal{X}_o)}{2m_{12}^2} \sigma_- + \frac{\text{tr}(W^{-1}T'\sigma_-)}{2m_{12}^2} \mathcal{X}_o \right] + \Gamma P_1 T'. \quad (39)$$

Если b имеет сингулярность, такую что функция $\tilde{b}$ оказывается гладкой, то оператор T также окажется гладким, что и будет выяснено непосредственно при построении оператора T в виде (16). Очевидно, что все подлежащие определению элементы в (37) должны допускать разложение по ε , аналогичное разложению (16):

$$S(t, \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} (i\varepsilon)^n S_n(t), \quad (40)$$

$$a(t, \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} (i\varepsilon)^n a_n(t), \quad \tilde{b}(t, \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} (i\varepsilon)^n \tilde{b}_n(t). \quad (41)$$

Подставим разложения (40), (41) в (38), (39) и получим рекуррентную схему для нахождения последовательных членов этих разложений:

$$\begin{aligned} S_n &= -\frac{1}{2}W [\gamma_1 \sigma_- + \gamma_2 \mathcal{X}_o] + \Gamma P_1 (W' [a_n I + \tilde{b}_n] + S'_{n-1}), \\ \gamma_1 &= \frac{\text{tr}((W(a_n I + \tilde{b}_n M) + S_{n-1})' \mathcal{X}_o)}{2m_{12}^2}, \\ \gamma_2 &= \frac{\text{tr}((W(a_n I + \tilde{b}_n M) + S_{n-1})' \sigma_-)}{2m_{12}^2}. \end{aligned} \quad (42)$$

Условия (38) дают дифференциальные уравнения на a_n и $\tilde{b}_n$. Обозначив $K = K(t) = W^{-1}(t)W'(t)$, получаем

$$\begin{cases} 2a'_n + \tilde{b}_n \text{tr}(KM) = \text{tr}(W^{-1}S'_{n-1}), \\ 2l^2 \tilde{b}'_n + (l^2)' \tilde{b}_n + a_n \text{tr}(KM) = \text{tr}(W^{-1}S'_{n-1}M). \end{cases} \quad (43)$$

Заметим, что благодаря возможности перенормировки оператора W можно считать, что $\text{tr } K = 0$. При выводе (43) использовалось, что

$$\text{tr } M = 0, \quad \text{tr}(M^2) = \text{tr}(l^2 I), \quad \text{tr}(MM') = (l^2)'.$$

Решив систему (43), мы выразим a_n и $\tilde{b}_n$ через S_{n-1} , и, подставив найденное решение в (42), получим выражения для S_n через a_n , $\tilde{b}_n$ и S_{n-1} . Коэффициенты a_0 и b_0 находим как решения однородной системы (43), S_0 строим согласно (42) и (20), считая $S_{-1} \equiv 0$. Таким образом, рекуррентная процедура для построения оператора T в виде (16) предложена, при этом согласно (37)

$$T_n = W(a_n I + \tilde{b}_n M) + S_{n-1}. \quad (44)$$

Заметим, что исходная простая рекуррентная схема (17) эквивалентна схеме (42), (43).

Вообще говоря, при построении оператора T согласно предложенной процедуре существует неопределенность, связанная с неопределенностью в решении системы (43). Этот вопрос мы обсудим позже, при рассмотрении конкретных спектральных моделей.

3. ПАРАБОЛИЧЕСКАЯ ТОЧКА ПОВОРОТА

Построим оператор T на интервале Δ , содержащем одну параболическую точку поворота. В качестве спектральной модели M в этом случае следует взять оператор U вида (5). Функция l^2 (коэффициент перед $\tilde{b}'_n$ в системе (43)) имеет теперь корень в точке t_1 , следовательно, для построения гладкого решения этой системы (и тем самым гладкого оператора T) необходимо выполнение условия

$$(l^2)' \tilde{b}_n + a_n \text{tr}(KU) + \text{tr}(S'_{n-1} U)|_{t_1} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (45)$$

Получим прежде всего формулу для члена T_0 старшего порядка. Согласно (44)

$$T_0 = W(a_0 I + b_0 U), \quad (46)$$

a_0 и b_0 являются решениями однородной системы (43) при $M = U$ и удовлетворяют условию (45) при $n = 0$. В действительности условие (45) из двумерного пространства решений системы (43) выделяет одномерное подпространство. Решение этой системы, удовлетворяющее условию (45), имеет вид

$$a_0 = N_0 \text{ch} \left(\frac{1}{2} \int_{t_1}^t \frac{\text{tr}(KU)}{l} dt' \right), \quad (47)$$

$$\tilde{b}_0 = -\frac{N_0}{l} \text{sh} \left(\frac{1}{2} \int_{t_1}^t \frac{\text{tr}(KU)}{l} dt' \right). \quad (48)$$

Покажем, что a_0 и $\tilde{b}_0$, определяемые формулами (47), (48), гладкие в точке t_1 . Прежде всего заметим, что $\text{tr}(KU) = \text{tr}(WW^{-1}U)$ — гладкая функция в t_1 , так как W, W^{-1}

и U — гладкие в точке t_1 операторы. Функция $l(t)$ при $t \rightarrow t_1$ согласно определению параболической точки поворота имеет вид $l(t) = C_1\sqrt{t-t_1}$.

Таким образом, при $t \rightarrow t_1$

$$\int_{t_1}^t \frac{\operatorname{tr}(KU)}{l} dt' = \sqrt{t-t_1} \sum_{n \geq 0} q_n (t-t_1)^n. \quad (49)$$

В силу четности функции $\operatorname{sh} x$ при подстановке (49) в (47) получаем разложение в ряд Тейлора в точке t_1 , из чего и следует требуемая гладкость a_0 . Чтобы убедиться в гладкости $\tilde{b}_0$, необходимо учесть, что $\operatorname{sh} x$ — нечетная функция, подставить представление (49) в (48), а затем разделить результат на $l(t) = C_1\sqrt{t-t_1}$. Тогда получим разложение в ряд Тейлора в точке t_1 , что доказывает гладкость $\tilde{b}_0$. Старший порядок T_0 разложения (16), таким образом, построен.

Для нахождения следующего порядка T_1 необходимо найти S_0 согласно (42) и (20), для этого достаточно знать a_0 и $\tilde{b}_0$. Из этих формул непосредственно видно, что S_0 гладко зависит от t . Для a_1 и $\tilde{b}_1$ имеем неоднородную систему (43) с правой частью, зависящей от S_0 , W^{-1} и тем самым гладкой по t . Найдя a_1 и $\tilde{b}_1$, построим член T_1 следующего порядка разложения (16).

ТЕОРЕМА 1. *На интервале Δ , содержащем параболическую точку поворота t_1 , существует оператор T вида (16), удовлетворяющий уравнению (15) и гладкий по t на всем интервале Δ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение (15) приводит к рекуррентной процедуре (42), (43) для членов разложения (16). Проведем доказательство методом математической индукции. База индукции уже установлена — старший порядок T_0 разложения (16) построен.

Предположим, что построен гладкий при $t \in \Delta$ оператор T_n вида (44), т.е. известны $a_n, \tilde{b}_n, S_{n-1}$, гладкие по $t \in \Delta$. Построим T_{n+1} также вида (44):

$$T_{n+1} = W(a_{n+1}I + \tilde{b}_{n+1}M) + S_n, \quad (50)$$

и установим его гладкость. Оператор S_n дается формулами (42) и (20), откуда гладкость по t видна непосредственно при условии, что $a_n, \tilde{b}_n$ и S_{n-1} гладко зависят от t . Оператор W гладко зависит от t по определению спектральной модели. Гладкость по t спектрального проектора P_0 очевидна из формулы

$$P_0 = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} R^A(\lambda, t) d\lambda. \quad (51)$$

Теперь построим a_{n+1} и $\tilde{b}_{n+1}$, гладкие по t . Согласно рекуррентной схеме (43)

$$\begin{cases} 2a_{n+1} + \tilde{b}_{n+1} \operatorname{tr}(KU) = -\operatorname{tr}(W^{-1}S'_n) \equiv \alpha_n, \\ 2l^2 \tilde{b}'_{n+1} + (l^2)' \tilde{b}_{n+1} + a_{n+1} \operatorname{tr}(KU) = -\operatorname{tr}(W^{-1}S'_n U) \equiv \beta_n, \end{cases} \quad (52)$$

система дополняется условием (45) для $n+1$.

Правые части уравнений системы (52), обозначенные через $\alpha_n = \alpha_n(t)$ и $\beta_n = \beta_n(t)$, являются гладкими по t . Решая эту систему, с учетом условия (45) получаем искомые a_{n+1} и $\tilde{b}_{n+1}$:

$$a_{n+1} = N_{n+1} \operatorname{ch} \left(\frac{1}{2} \int_{t_1}^t \operatorname{tr}(KU) \frac{dt'}{l} \right) + \frac{1}{2} \int_{t_1}^t \alpha_n \operatorname{ch}(r(s, t)) ds - \frac{1}{2} \int_{t_1}^t \frac{\beta_n}{l} \operatorname{sh}(r(s, t)) ds, \quad (53)$$

$$\tilde{b}_{n+1} = -\frac{N_{n+1}}{l} \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2} \int_{t_1}^t \operatorname{tr}(KU) \frac{dt'}{l} \right) - \frac{1}{2l} \int_{t_1}^t \alpha_n \operatorname{sh}(r(s, t)) ds + \frac{1}{2l} \int_{t_1}^t \frac{1}{l} \beta_n \operatorname{ch}(r(s, t)) ds, \quad (54)$$

где

$$r(s, t) = \frac{1}{2} \int_s^t \operatorname{tr}(KU) \frac{dy}{l}, \quad (55)$$

N_{n+1} — произвольная постоянная. Обсудим гладкость полученных a_{n+1} и $\tilde{b}_{n+1}$ в точке t_1 . Прежде всего заметим, что при $t \rightarrow t_1$ и $s \rightarrow t_1$

$$r(s, t) = \sqrt{t-t_1} \sum_{k \geq 0} u_k(t-t_1)^k - \sqrt{s-t_1} \sum_{k \geq 0} u_k(s-t_1)^k. \quad (56)$$

Решения однородной системы — слагаемые, пропорциональные N_{n+1} в (53) и (54), — суть гладкие функции в точке t_1 . Гладкость первого интеграла в (53) очевидна из (56), если учесть, что $\operatorname{ch} x$ — четная функция. Что касается второго интеграла, то с учетом поведения функции l при $t \rightarrow t_1$, нечетности функции $\operatorname{sh} x$ и представления (55) при $t \rightarrow t_1$ для подынтегрального выражения имеем

$$\frac{1}{l} \beta_n \operatorname{sh}(r(s, t)) = \frac{\sqrt{t-t_1} - \sqrt{s-t_1}}{C_2 \sqrt{s-t_1}} + \sum_{\substack{n \geq 0, k \geq 0 \\ n+k=2m \geq 2}} v_{n,k}(t-t_1)^{\frac{n}{2}}(s-t_1)^{\frac{k}{2}-\frac{1}{2}}. \quad (57)$$

Интегрируя это выражение по s на интервале $[t_1, t]$, очевидно, получим ряд по целым степеням $t - t_1$ (разложение в ряд Тейлора) в точке t_1 для исследуемого интеграла, что доказывает требуемую гладкость a_{n+1} . Аналогично доказывается гладкость при $t \rightarrow t_1$ второго и третьего слагаемых в правой части (54). В итоге получим, что $\tilde{b}_{n+1}$ — гладкая в точке t_1 функция.

Таким образом, все элементы, необходимые для построения T_{n+1} , найдены. Теорема доказана. Искомый оператор T найден с точностью до множителя N вида

$$N = \sum_{n \leq 0} N_n (i\varepsilon)^n. \quad (58)$$

Для интервала Δ , содержащего параболическую точку поворота, множество гладких решений уравнения (15) вида (16) одномерно.

4. ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ ТОЧКА ПОВОРОТА

Более сложным является построение оператора T для случая гиперболической (двойной) точки поворота, т.е. для случая, когда на рассматриваемом интервале Δ собственные значения $k_1(t)$ и $k_2(t)$ совпадают в двух точках t_1 и t_2 , $t_1 < t_2$. Решение уравнения (15) должно быть гладким в точках t_1 и t_2 . При построении решения в виде (16) мы снова приходим к рекуррентной схеме (42), (43), однако функция l^2 (коэффициент перед $\tilde{b}'_n$) имеет корни на этот раз в двух точках t_1, t_2 , и, чтобы избежать сингулярности, надо требовать выполнения условия типа (45) уже в двух точках. На подынтервалах $\alpha < t < t_2$ и $t_1 < t < \beta$, содержащих по одной параболической точке поворота, мы можем построить одномерные пространства $\mathcal{X}_{t_1}$ и $\mathcal{X}_{t_2}$ решений, гладких в точках t_1 и t_2 , соответственно. В общем случае $\mathcal{X}_{t_1} \neq \mathcal{X}_{t_2}$, т.е. мы не можем построить решение уравнения (15), гладкое в точках t_1 и t_2 одновременно.

Мы получили задачу, похожую на однородную граничную задачу, следовательно, необходимо ввести в спектральную модель H (9) “спектральный” параметр. Таким образом, в модельном уравнении (12) спектральную модель выбираем в виде

$$M = H + i\varepsilon\lambda\sigma, \quad (59)$$

где σ — заданная матрично-значная функция, $\text{tr } \sigma = 0$, а параметр λ определяется формулой

$$\lambda = \sum_{n \leq 0} \lambda_n (i\varepsilon)^n. \quad (60)$$

Параметр λ найдем из условия гладкости оператора T в точках t_1 и t_2 одновременно. Идея спектрального параметра λ заимствована из работы [4].

Оператор T мы ищем в виде разложения (16), каждый порядок этого разложения имеет вид (44). С учетом (59) рекуррентная схема (42), (43) принимает вид

$$S_n = -\frac{1}{2}W[\gamma_1\sigma_- + \gamma_2\mathcal{X}_o]H + \Gamma P_1 \left(W'(a_n I + \tilde{b}_n H) + S'_{n-1} - \sum_{k=0}^n \lambda_k S_{n-1-k} \sigma \right), \quad (61)$$

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{\text{tr}[W^{-1}(W(a_n I + \tilde{b}_n H)S_{n-1})' + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k W^{-1}S_{n-1-k} \sigma \sigma_-]}{4m_{12}^2}, \\ \gamma_2 &= \frac{\text{tr}[W^{-1}(W(a_n I + \tilde{b}_n H)S_{n-1})' + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k W^{-1}S_{n-1-k} \sigma \mathcal{X}_o]}{4m_{12}^2}, \\ \begin{cases} 2a'_n + \tilde{b}_n \text{tr}[(K - \lambda_0 \sigma)H] = \tilde{b}_0 \lambda_n \text{tr}(\sigma H) + \alpha_n, \\ 2l^2 \tilde{b}'_n + (l^2)' \tilde{b}_n + a_n \text{tr}[(K - \lambda_0 \sigma)H] = a_0 \lambda_n \text{tr}(\sigma H) + \beta_n, \end{cases} \end{aligned} \quad (62)$$

$$\alpha_n = \sum_{k=1}^{n-1} \tilde{b}_k \lambda_{n-k} \text{tr}(\sigma H) - \text{tr}(W^{-1}S'_{n-1}) + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \text{tr}(W^{-1}S_{n-1-k} \sigma), \quad (63)$$

$$\beta_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k \lambda_{n-k} \text{tr}(\sigma H) - \text{tr}(W^{-1}S'_{n-1}H) + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \text{tr}(W^{-1}S_{n-1-k} \sigma H). \quad (64)$$

Так как мы ищем гладкое в точках t_1 и t_2 решение, полученную рекуррентную схему дополняем двумя условиями

$$(l^2)' \tilde{b}_n + a_n \operatorname{tr}[(K - \lambda_0 \sigma)H] + \operatorname{tr}(W^{-1} S'_{n-1} H) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda_{n-k} \operatorname{tr}(\sigma H) + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \operatorname{tr}(W^{-1} S_{n-1-k} \sigma H) \Big|_{t_1, t_2} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (65)$$

Прежде всего построим член T_0 старшего порядка разложения (16). Согласно (44)

$$T_0 = W(a_0 I + \tilde{b}_0 H), \quad (66)$$

где a_0 и $\tilde{b}_0$ – решения однородной системы (62), дополняемой условиями (65) при $n = 0$. Эту систему решаем, как в случае параболической точки поворота, и аналогично строим решение, гладкое в точке t_1 :

$$a_0 = N_0 \operatorname{ch} \left(\frac{1}{2} \int_{t_1}^t \operatorname{tr}[(K - \lambda_0 \sigma)H] \frac{dt'}{l} \right), \quad (67)$$

$$\tilde{b}_0 = -\frac{N_0}{l} \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2} \int_{t_1}^t \operatorname{tr}[(K - \lambda_0 \sigma)H] \frac{dt'}{l} \right). \quad (68)$$

Так как в точке t_2 выполняется условие $l^2(t_2) = 0$, то выражение под знаком sh в формуле (68) должно стремиться к нулю при $t \rightarrow t_2$, следовательно, должно выполняться

$$\int_{t_1}^{t_2} \operatorname{tr}[(K - \lambda_0 \sigma)H] \frac{dt}{l} = 2\pi i m, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (69)$$

Вид спектральной модели H диктует вид матрицы σ , так как уравнение (12) должно оставаться явно интегрируемым (хотя бы формально). При переходе к модели (59) следует взять

$$\sigma = \zeta' \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (70)$$

Таким образом, $\operatorname{tr}(\sigma H) = -\mu^2 \zeta'^2$, тогда (69) можно переписать в виде

$$\lambda_0 \mu \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}} = - \int_{t_1}^{t_2} \operatorname{tr}(KH) \frac{dt}{l} + 2\pi i m. \quad (71)$$

На интервале $[t_1, t_2]$

$$|\operatorname{tr}(KH)| \leq C\mu, \quad (72)$$

следовательно, чтобы параметр λ_0 оставался ограниченным при $\mu \rightarrow 0$, положим в (71) $m = 0$, получим

$$\lambda_0 = -\frac{1}{\mu\pi} \int_{-\mu}^{\mu} \frac{\operatorname{tr}(KH)}{\zeta'^2} \frac{d\zeta}{\sqrt{\mu^2 - \zeta^2}}. \quad (73)$$

Покажем, что благодаря выбору λ_0 построенные a_0 и $\tilde{b}_0$ являются гладкими в точке t_2 . Представим интегралы из (67) и (68) в виде

$$\int_{t_1}^t \operatorname{tr}[(K - \lambda_0 \sigma)H] \frac{dt}{l} = \int_{t_1}^{t_2} \operatorname{tr}[(K - \lambda_0 \sigma)H] \frac{dt}{l} - \int_t^{t_2} \operatorname{tr}[(K - \lambda_0 \sigma)H] \frac{dt}{l}. \quad (74)$$

Согласно выбору λ_0 первый интеграл в (74) равен нулю. Тогда с учетом того, что $\operatorname{tr}[(K - \lambda_0 \sigma)H]$ является гладкой функцией t , а $l^2 = C_2 \sqrt{t_2 - t}$ в окрестности точки t_2 , получаем при $t \rightarrow t_2$

$$\int_{t_2}^t \operatorname{tr}[(K - \lambda_0 \sigma)H] \frac{dt}{l} = C_3 \sqrt{t_2 - t} \sum_{n \geq 0} e_n (t_2 - t)^n. \quad (75)$$

С использованием (75) требуемая гладкость в точке t_2 проверяется так же, как и в случае параболической точки поворота. Таким образом, построен член T_0 старшего порядка, гладкий по t на интервале Δ .

Зная a_0 и $\tilde{b}_0$, мы строим S_0 согласно (61); S_0 , очевидно, гладко зависит от t . Для a_1 и $\tilde{b}_1$ получим неоднородную систему типа (62) с гладкой правой частью, содержащей неопределенную величину λ_1 . Выбором λ_1 достигается гладкость в точке t_2 . Найдя гладкие a_1 и $\tilde{b}_1$, тем самым построим член T_1 следующего порядка разложения (16). Нахождение λ_1 несколько отличается от способа определения λ_0 . Как найти λ_1 и следующие порядки параметра λ , будет описано в ходе доказательства следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2. *На интервале Δ , содержащем гиперболическую (двойную) точку поворота (t_1, t_2) , существует оператор T вида (16), удовлетворяющий уравнению (15), гладкий по t .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение (61), система (62) и условия (65) образуют рекуррентную схему построения оператора T , являющегося решением уравнения (15) со спектральной моделью (59), в виде разложения (16). Член T_0 старшего порядка найден, и база индукции тем самым установлена. Сделаем предположение индукции: пусть построен член T_n n -го порядка разложения вида (44), гладкий при $t \in \Delta$, т.е. известны λ_k, a_k, b_k , $k = 0, 1, \dots, n$, и S_k , $k = 0, 1, \dots, n-1$, гладкие по t . На основании сделанного предположения построим по схеме (61)–(65) член T_{n+1} $(n+1)$ -го порядка также вида (44):

$$T_{n+1} = W(a_{n+1}I + \tilde{b}_{n+1}H) + S_n, \quad (76)$$

и установим, что он обладает требуемыми свойствами гладкости.

Оператор S_n определяется формулами (61) и (19), он гладко зависит от t по построению. Теперь построим a_{n+1} и $\tilde{b}_{n+1}$, гладкие по t , составив для них систему типа (62)

$$\begin{cases} 2a'_{n+1} + \tilde{b}_{n+1} \operatorname{tr}[(K - \lambda_0 \sigma)H] = \tilde{b}_0 \lambda_{n+1} \operatorname{tr}(\sigma H) + \alpha_{n+1} \equiv \mathcal{A}_{n+1}, \\ 2l^2 \tilde{b}'_{n+1} + (l^2)' \tilde{b}_{n+1} + a_{n+1} \operatorname{tr}[(K - \lambda_0 \sigma)H] = a_0 \lambda_{n+1} \operatorname{tr}(\sigma H) + \beta_{n+1} \equiv \mathcal{B}_{n+1} \end{cases} \quad (77)$$

при условиях типа (65). Система (77), кроме неизвестных a_{n+1} и $\tilde{b}_{n+1}$, содержит неопределенный параметр λ_{n+1} . С помощью этого параметра мы добьемся требуемой

гладкости в точке t_2 . Правые части уравнений системы (77) являются гладкими по t согласно предположению индукции и гладкости F_n и S_n .

Решая эту систему, находим

$$a_{n+1} = N_{n+1} \operatorname{ch} \left(\frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \operatorname{tr}[(K - \lambda_0)\sigma H] \frac{dy}{l} \right) + \\ + \frac{1}{2} \int_{t_1}^t \mathcal{A}_{n+1} \operatorname{ch} \left[\frac{1}{2} g(s, t) \right] ds - \frac{1}{2} \int_{t_1}^t \frac{\mathcal{B}_{n+1}}{l} \operatorname{sh} \left[\frac{1}{2} g(s, t) \right] ds, \quad (78)$$

$$\tilde{b}_{n+1} = -\frac{N_{n+1}}{l} \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \operatorname{tr}[(K - \lambda_0)\sigma H] dt \right) - \\ - \frac{1}{2l} \int_{t_1}^t \mathcal{A}_{n+1} \operatorname{sh} \left[\frac{1}{2} g(s, t) \right] ds + \frac{1}{2l} \int_{t_1}^t \frac{\mathcal{B}_{n+1}}{l} \operatorname{ch} \left[\frac{1}{2} g(s, t) \right] ds, \quad (79)$$

где

$$g(s, t) = \int_s^t \operatorname{tr}[(K - \lambda_0)\sigma H] \frac{dy}{l}. \quad (80)$$

Для функции $g(s, t)$ при $s \rightarrow t_1$ и $t \rightarrow t_1$ справедливо представление

$$g(s, t) = (\sqrt{t - t_1} - \sqrt{s - t_1}) + \sum_{k \leq 1} w_k \left((t - t_1)^{\frac{k}{2}} - (s - t_1)^{\frac{k}{2}} \right), \quad (81)$$

аналогично при $s \rightarrow t_2$ и $t \rightarrow t_2$ с учетом выбора λ_0

$$g(s, t) = (\sqrt{t_2 - t} - \sqrt{t_2 - s}) + \sum_{k \leq 1} h_k \left((t_2 - t)^{\frac{k}{2}} - (t_2 - s)^{\frac{k}{2}} \right). \quad (82)$$

Гладкость построенных согласно (78) и (79) a_{n+1} и $\tilde{b}_{n+1}$ в точке t_1 очевидна. В точке t_2 вклад слагаемых, пропорциональных N_{n+1} , благодаря выбору λ_0 является гладким. Таким образом, для гладкости в точке t_2 необходимо, чтобы выполнялось

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\mathcal{A}_{n+1} + \frac{1}{l} \mathcal{B}_{n+1} \right) (s) e^{-\frac{1}{2} g(s, t_2)} ds = \int_{t_1}^{t_2} \left(\mathcal{A}_{n+1} - \frac{1}{l} \mathcal{B}_{n+1} \right) (s) e^{\frac{1}{2} g(s, t_2)} ds. \quad (83)$$

Это требование мы удовлетворим выбором λ_{n+1} . Для этого представим $\mathcal{A}_{n+1}$ и $\mathcal{B}_{n+1}$ в виде сумм согласно (77) и перепишем (83) в виде

$$\lambda_{n+1} N_0 \int_{t_1}^{t_2} \operatorname{tr}(\sigma H) \frac{dt}{l} = 2 \int_{t_1}^{t_2} \alpha_{n+1} \operatorname{sh} \left[\frac{1}{2} g(s, t_2) \right] ds - \\ - 2 \int_{t_1}^{t_2} \frac{\beta_{n+1}}{l} \operatorname{ch} \left[\frac{1}{2} g(s, t_2) \right] ds, \quad (84)$$

$g(s, t_2)$ определяется выражением (80).

Чтобы уравнение (84) корректно определяло λ_{n+1} , его правая часть должна быть пропорциональна N_0 и ограничена по μ с тем, чтобы λ_{n+1} оставалось ограниченным при

$\mu \rightarrow 0$. Пропорциональность N_0 коэффициентов α_n и β_n следует из способа их определения и элементарно доказывается индукцией. Ограниченность правой части по μ также доказывается элементарно, если учесть, что μ связано с расстоянием между точками t_1 и t_2 .

При выборе λ_{n+1} согласно (84) достигается гладкость в точке t_2 функций $a_{n+1}, \tilde{b}_{n+1}$, определяемых формулами (78), (79). Решения однородной системы – слагаемые, пропорциональные N_{n+1} , – суть гладкие функции в точках t_1 и t_2 : в точке t_1 это очевидно, в точке t_2 это достигается благодаря выбору λ_0 . Гладкость интегральных слагаемых в точке t_1 доказывается так же, как и в случае параболической точки поворота. В точке t_2 требуемую гладкость получаем благодаря выбору λ_{n+1} согласно (84). При таком выборе λ_{n+1} сумма второго и третьего слагаемых в правой части (79) в точке t_2 равна нулю, следовательно, при $t \rightarrow t_2$ эта сумма (без учета множителей $1/l$) имеет вид

$$\begin{aligned} & - \int_{t_1}^t \mathcal{A}_{n+1} \operatorname{sh} \left[\frac{1}{2} g(s, t) \right] ds + \int_{t_1}^t \frac{\mathcal{B}_{n+1}}{l} \operatorname{ch} \left[\frac{1}{2} g(s, t) \right] ds = \\ & = - \int_t^{t_2} \mathcal{A}_{n+1} \operatorname{sh} \left[\frac{1}{2} g(s, t_2) \right] ds + \int_t^{t_2} \frac{\mathcal{B}_{n+1}}{l} \operatorname{ch} \left[\frac{1}{2} g(s, t) \right] ds. \end{aligned} \quad (85)$$

Интегралы в правой части (85) исследуются в окрестности точки t_2 так же, как аналогичные интегралы в окрестности точки t_1 в случае параболической точки поворота. В результате получаем требуемую гладкость a_{n+1} и $\tilde{b}_{n+1}$ в окрестности точек t_1 и t_2 .

Все элементы, необходимые для построения T_{n+1} , найдены. Теорема доказана. Искомый оператор T найден с точностью до множителя

$$N = \sum_{n \leq 0} N_n (i\varepsilon)^n. \quad (86)$$

Таким образом, множество гладких решений уравнения (15) вида (16) в случае интервала Δ , содержащего гиперболическую точку поворота, одномерно.

Благодарности. Автор выражает свою искреннюю благодарность профессору В. С. Буслаеву за полезные обсуждения и помощь в решении задачи.

Список литературы

- [1] V. Buslaev, A. Grigis. Turning points. Preprint № 98-21. Mathemetiques de l'Universite Paris-Nord, 1998.
- [2] Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1972.
- [3] С. Г. Крейн. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1969.
- [4] В. С. Булдырев, С. Ю. Славянов. Регуляризация фазовых интегралов вблизи вершины барьера. В сб.: Проблемы математической физики. Вып. 10. Спектральная теория. Волновые процессы. Ред. М. Ш. Бирман и др. Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1982. С. 50–70.

Поступила в редакцию 15.IV.1999 г.,
после доработки 16.IX.1999 г.