Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Васильев, H -модель критической динамики: Доказательство мультипликативной ренормируемости упрощенной H_0 -модели, *ТМФ*, 2000, том 122, номер 3, 385–399

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf574>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 18:33:40

H-МОДЕЛЬ КРИТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ: ДОКАЗАТЕЛЬСТВО МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ РЕНОРМИРУЕМОСТИ УПРОЩЕННОЙ H_0 -МОДЕЛИ

Приводится доказательство мультипликативности ренормировки и ее согласованности со статикой для H_0 -модели критической динамики, получаемой из обычной модели H отбрасыванием вклада с производной скорости $\partial_t v$. При этом формулируется и используется универсальная общая схема доказательства утверждений такого типа, пригодная для любых моделей критической динамики.

1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ И РЕЗУЛЬТАТОВ

Хорошо известная [1–3] модель H используется для описания динамики (кинетические коэффициенты, времена релаксации и т.п.) в окрестности критической точки фазового перехода жидкость–газ и других систем из того же класса универсальности, в частности критической точки расслоения в бинарных смесях. Модель H задается следующей системой стохастических уравнений для зависящих от $x = (t, \mathbf{x})$ полей $\varphi = (\psi, v)$:

$$\partial_t \psi = -\lambda_0 \partial^2 H_\psi - (v \partial) \psi + \eta_\psi, \quad (1a)$$

$$\partial_t v = P \{ \eta_0 \partial^2 v + a^{-1} \psi \cdot \partial H_\psi + \eta_v \}, \quad (1б)$$

$$\langle \eta_\psi(x) \eta_\psi(x') \rangle = -2\lambda_0 \partial^2 \delta(x - x'), \quad (1в)$$

$$\langle \eta_v(x) \eta_v(x') \rangle = -2a^{-1} \eta_0 \partial^2 \delta(x - x').$$

В формулах (1a)–(1в) ψ – скалярное поле параметра порядка, v – поперечное (несжимаемость) векторное поле скорости среды, η_φ с $\varphi = (\psi, v)$ – гауссовы случайные силы (“шумы”) с $\langle \eta_\varphi \rangle = 0$ и указанными в (1в) корреляторами, P – поперечный проектор по векторным индексам, λ_0 и η_0 – затравочные коэффициенты теплопроводности и вязкости, a – дополнительный параметр статического действия (см. ниже) и

$$H_\varphi \equiv \left. \frac{\delta S^{\text{st}}(\varphi)}{\delta \varphi(\mathbf{x})} \right|_{\varphi(\mathbf{x}) \rightarrow \varphi(x)}, \quad (2)$$

* Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

где $S^{\text{st}}(\varphi)$ – статическое действие для не зависящих от времени полей $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$, в данном случае

$$S^{\text{st}}(\varphi) = -\frac{(\partial\psi)^2}{2} - \tau_0 \frac{\psi^2}{2} - g_{10} \frac{\psi^4}{24} - a \frac{v^2}{2}. \quad (3)$$

Во всех статических функционалах типа (3) подразумеваются нужные суммирования по векторным индексам и интегрирование по d -мерному аргументу $\mathbf{x}$, а в аналогичных динамических объектах – по $x = (t, \mathbf{x})$.

Запись (3) соответствует равновесному распределению $\exp S^{\text{st}}(\varphi)$ без минуса в показателе, функционал (3) считается неренормированным, а его параметры τ_0 и g_{10} – затравочными (по смыслу $\tau \sim T - T_c$, а g_1 – статический заряд). Стохастическая задача (1) эквивалентна [3, 4] квантово-полевой модели с удвоенным набором полей $\phi = (\varphi, \varphi') = (\psi, v, \psi', v')$ (v' – также поперечное векторное поле) и функционалом действия

$$S(\phi) = -\lambda_0 \psi' \partial^2 \psi' + \psi' [-\partial_t \psi - \lambda_0 \partial^2 H_\psi - v \partial \psi] - \\ - a^{-1} \eta_0 v' \partial^2 v' + v' [-\partial_t v + \eta_0 \partial^2 v + a^{-1} \psi \partial H_\psi]. \quad (4)$$

Сделав в (4) растяжение $v' \rightarrow av'$ вспомогательного поля v' и введя обозначение

$$g_{20} = (a\eta_0 \lambda_0)^{-1}, \quad (5)$$

получим следующее выражение для неренормированного динамического действия:

$$S(\phi) = -\lambda_0 \psi' \partial^2 \psi' + \psi' [-\partial_t \psi - \lambda_0 \partial^2 H_\psi - v \partial \psi] - \\ - \lambda_0^{-1} g_{20}^{-1} v' \partial^2 v' + v' [-a \partial_t v + \lambda_0^{-1} g_{20}^{-1} \partial^2 v + \psi \partial H_\psi]. \quad (6)$$

Параметр g_{20} в (5) имеет смысл затравочного заряда межмодового взаимодействия, а g_{10} в (3) – затравочный статический заряд. Оба взаимодействия логарифмичны в размерности $d = 4$, и мы будем рассматривать задачу в размерной регуляризации $d = 4 - \epsilon$ с обычной ренормировкой в схеме минимальных вычитаний (MS).

Ренормировка осуществляется применением R -операции схемы MS к диаграммам базовой теории, которая получается заменой всех затравочных параметров в (3) и (6) их “базовыми” аналогами (для τ , λ базовые параметры совпадают с ренормированными, для зарядов см. ниже). В подробной записи получаемое из (2), (3), (6) динамическое базовое действие имеет следующий вид:

$$S_B(\phi) = -\lambda \psi' \partial^2 \psi' + \psi' \left[-\partial_t \psi - \lambda \partial^2 \left(\partial^2 \psi - \tau \psi - g_{1B} \frac{\psi^3}{6} \right) - v \partial \psi \right] - \\ - \lambda^{-1} g_{2B}^{-1} v' \partial^2 v' + v' [-a \partial_t v + \lambda^{-1} g_{2B}^{-1} \partial^2 v + \psi \partial (\partial^2 \psi)], \quad (7)$$

где $g_{iB} = g_i \mu^\epsilon$ с $i = 1, 2$ – базовые заряды ($d = 4 - \epsilon$), μ – ренормировочная масса, τ , λ , a и $g_{1,2}$ – ренормированные параметры. В слагаемом $v' \psi \partial H_\psi^B$ от производной (2) статического базового действия остается лишь вклад $\partial^2 \psi$ в H_ψ^B из-за поперечности поля v' .

В критической динамике изучается инфракрасная (ИК-) асимптотика функций Грина полей ϕ при $p \rightarrow 0$, $\omega \sim p^4 \rightarrow 0$. Стандартный анализ канонических размерностей [5, 6] показывает, что в таком режиме вклад $av'\partial_t v$ в (6), (7) является ИК-несущественным по сравнению с прочими, т.е. дает лишь поправки к скейлингу, и при анализе ведущих критических сингулярностей может быть отброшен. Упрощенную модель H с $a = 0$ будем называть H_0 -моделью.

Ренормированное действие $S_R(\phi)$ полной модели H получается добавкой к ее базовому действию (7) всех необходимых для устранения ультрафиолетовых (УФ-) расходимостей (полюсов по ϵ) контрчленов. При этом вклад $-av'\partial_t v$ в (7) понимается как вставка ИК-несущественного составного оператора, и все контрчлены строятся в виде рядов по a . В работе [3] отмечалась ИК-несущественность вклада $\sim \partial_t v$, но считалось невозможным выделить его явно в виде вставки ИК-несущественного оператора в функционале действия. Именно для обеспечения такой возможности мы сделали переход от (4) к (6).

Линейные по a контрчлены соответствуют ренормировке $v'\partial_t v \rightarrow [v'\partial_t v]_R$ данного составного оператора, поэтому

$$S_R(\phi) = S_R^{(0)}(\phi) - a[v'\partial_t v]_R + \dots, \quad (8)$$

где $S_R^{(0)}(\phi)$ – вклады нулевого порядка по a , представляющие ренормированное действие H_0 -модели, $[v'\partial_t v]_R$ – ренормированный составной оператор, многоточие – поправки порядка a^2 и выше от контрчленов диаграмм со вставками двух или более таких операторов.

Теперь мы можем сформулировать основные результаты данной работы – доказательства следующих утверждений:

1. Ренормировка H_0 -модели мультипликативна, т.е. функционал $S_R^{(0)}(\phi)$ в (8) связан с ее неренормированным действием $S^{(0)}(\phi)$ (функционал (6) с $a = 0$) стандартными соотношениями мультипликативной ренормировки полей и параметров:

$$S_R^{(0)}(\phi) = S^{(0)}(Z_\phi \phi), \quad Z_\phi \phi \equiv \{Z_\psi \psi, Z_{\psi'} \psi', Z_v v, Z_{v'} v'\}, \quad (9)$$

$$\tau_0 = \tau Z_\tau, \quad \lambda_0 = \lambda Z_\lambda, \quad g_{i0} = g_i \mu^\epsilon Z_{g_i}, \quad i = 1, 2.$$

2. Эта ренормировка согласована со статикой, т.е. для всех фигурирующих в статическом действии (3) с $a = 0$ величин F динамические константы ренормировки в (9) совпадают с соответствующими статическими константами:

$$Z_F = Z_F^{\text{st}} \quad \forall F \in S^{\text{st}}(\varphi) \quad (\text{в } H_0\text{-модели } F = \psi, \tau, g_1). \quad (10)$$

3. Для констант ренормировки полей в (9) справедливы соотношения

$$Z_v = Z_{v'} = 1, \quad Z_{\psi'} = Z_\psi^{-1}. \quad (11)$$

Хотя эти утверждения считаются справедливыми и фактически используются во всех работах, имеющих отношение к H -модели, их формальные доказательства (насколько известно автору) нигде не приводятся. Поэтому мы и сочли нужным восполнить этот пробел.

Остановимся подробнее на сути проблемы. С помощью стандартного анализа размерностей 1-неприводимых функций Грина нетрудно показать [6], что все контрчлены базового функционала (7) с $a = 0$ совпадают по виду с его слагаемыми, т.е. могут быть воспроизведены введением при них различных констант ренормировки Z . При этом вклады, пропорциональные $\psi' \partial_t \psi$ и $\psi' (v \partial) \psi$, в (7) не ренормируются ($Z = 1$): первый потому, что в нем нет действующего на ψ' символа ∂ , а второй из-за отсутствия ренормировки первого вклада и галилеевой инвариантности H_0 -модели. Поясним (и это важно для дальнейшего) данное обстоятельство. Из вида вершин взаимодействия в (7) следует, что на все внешние линии вспомогательных полей $\varphi' = (\psi', v')$ в 1-неприводимых функциях Γ , следовательно, и на поля φ' в соответствующих контрчленах обязательно должен выделяться, как минимум, один “множитель” ∂ , так что поля φ' могут входить в контрчлены только в виде $\partial \varphi'$. Тем самым запрещается контрчлен $\sim \psi' \partial_t \psi$, не содержащий $\partial \psi'$. Этот вклад в H_0 -модели (7) с $a = 0$ группируется вместе с $\psi' (v \partial) \psi$ в галилеево-инвариантную комбинацию $\psi' \nabla_t \psi$ с $\nabla_t = \partial_t + (v \partial)$. Галилеева инвариантность H_0 -модели должна сохраняться ренормировкой в схеме MS, т.е. и в контрчленах операторы ∂_t и $(v \partial)$ должны группироваться в ковариантную производную ∇_t . Поэтому из отсутствия ренормировки вклада $\psi' \partial_t \psi$ следует, что вклад $\psi' (v \partial) \psi$ также не ренормируется. Отметим, что галилеева инвариантность имеет место только в H_0 -модели и нарушается вкладом $\sim av' \partial_t v$ в (7).

Таким образом, анализ размерностей и приведенные выше дополнительные соображения доказывают справедливость представления

$$S_R^{(0)} = -Z_1 \lambda \psi' \partial^2 \psi' + \psi' \left[-\partial_t \psi - \lambda \partial^2 \left(Z_2 \partial^2 \psi - Z_3 \tau \psi - Z_4 g_{1B} \frac{\psi^3}{6} \right) - v \partial \psi \right] - \\ - Z_5 \lambda^{-1} g_{2B}^{-1} v' \partial^2 v' + v' [Z_6 \lambda^{-1} g_{2B}^{-1} \partial^2 v + Z_7 \psi \partial (\partial^2 \psi)] \quad (12)$$

с некоторыми неизвестными константами ренормировки $Z_1, \dots, Z_7$.

Этих констант “слишком много”, поэтому мультипликативность ренормировки неочевидна. В H_0 -модели имеются четыре поля (ψ, ψ', v, v') и четыре параметра (λ, τ, g_1, g_2), что соответствует восьми константам мультипликативной ренормировки Z . Но между ними должны быть две связи из-за отсутствия ренормировки двух вкладов в (12), т.е. при мультипликативной ренормировке независимых констант Z должно быть только шесть, а не семь, как в (12).

Нетрудно проверить, что представление (12) совместно с соотношениями (9) тогда и только тогда, когда между константами Z в (12) имеется одна связь, а именно

$$Z_1 Z_6 Z_7 = Z_2 Z_5. \quad (13)$$

Мы будем доказывать справедливость соотношений (9)–(11), пользуясь общими принципами соответствия между динамикой и статикой и их следствиями для ренормировки в схеме MS.

2. УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА–ПЛАНКА И ИХ СЛЕДСТВИЯ ДЛЯ РЕНОРМИРОВАННОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

В общем случае произвольная модель критической динамики для некоторой системы полей $\varphi = \{\varphi_a(x)\}$ задается функционалом статического действия $S^{\text{st}}(\varphi)$ для не зависящих от времени полей $\varphi(\mathbf{x})$ и следующей системой динамических стохастических уравнений (по повторяющимся индексам здесь и далее подразумевается суммирование):

$$\partial_t \varphi_a = (\alpha_{ab} + \beta_{ab}) H_b + \eta_a, \quad \langle \eta_a(x) \eta_b(x') \rangle = 2\alpha_{ab} \delta(x - x'), \quad (14)$$

где $H_b \equiv H_{\varphi_b}$ – производные типа (2) заданного функционала $S^{\text{st}}(\varphi)$, α – не зависящая от полей симметричная матрица коэффициентов Онсагера, а β – антисимметричная матрица коэффициентов межмодовых связей. Эти коэффициенты, в отличие от α_{ab} , в общем случае могут содержать локальную зависимость от полей φ (в статической записи – от $\varphi(\mathbf{x})$, в динамической – от $\varphi(x)$) и их пространственных (но не временных) производных и должны удовлетворять следующим соотношениям (статический случай):

$$\beta_{ab} = -\beta_{ba}^{\mathbf{t}}, \quad \frac{\delta \beta_{ab}(\mathbf{x}; \varphi)}{\delta \varphi_a(\mathbf{x})} = 0. \quad (15)$$

Символ транспонирования $\mathbf{t}$ относится к возможным операциям типа ∂ в коэффициентах β , а первое равенство (15) выражает свойство антисимметричности матрицы β в целом.

Стохастической задаче (14) соответствует квантово-полевая модель для удвоенного набора полей $\phi = (\varphi, \varphi')$ с функционалом действия

$$S(\phi) = \varphi' \alpha \varphi' + \varphi' [-\partial_t \varphi + (\alpha + \beta) H_\varphi] \quad (16)$$

(интегрирование по $x = (t, \mathbf{x})$ и нужные суммирования по индексам, как обычно, подразумеваются).

Хорошо известное [2, 3] уравнение Фоккера–Планка для функции распределения $P_t(\varphi)$ полей $\varphi(\mathbf{x})$ (т.е. $\varphi(x) = \varphi(t, \mathbf{x})$ в один общий для всех полей момент времени t) для задачи (14) записывается следующим образом:

$$\left\{ \partial_t + \frac{\delta}{\delta \varphi_a} \left[(\alpha_{ab} + \beta_{ab}) H_b - \alpha_{ab} \frac{\delta}{\delta \varphi_b} \right] \right\} P_t(\varphi) = 0. \quad (17)$$

Выражение в квадратной скобке и множитель $\delta/\delta \varphi_a$ перед ней имеют аргумент $\mathbf{x}$, по которому подразумевается интегрирование.

Стационарным (не зависящим от t) решением уравнения (17) является обычная статическая функция распределения

$$P(\varphi) = \text{const} \cdot \exp S^{\text{st}}(\varphi) \quad (18)$$

с заданным (см. выше) функционалом $S^{\text{st}}(\varphi)$. При подстановке (18) в (17) вклады слагаемых с коэффициентами β исчезают в силу соотношений (15).

Таким образом, при стандартной постановке, когда задача (14) рассматривается на всей оси времени и функции Грина трансляционно-инвариантны, одновременные динамические корреляционные функции $\langle \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \rangle$ с $t_1 = t_2 = \dots = t_n \equiv t$ не зависят от общего для всех полей времени t и совпадают со статическими функциями $\langle \varphi(\mathbf{x}_1) \dots \varphi(\mathbf{x}_n) \rangle^{\text{st}}$ для равновесного распределения (18) – в этом и состоит общий принцип соответствия между динамикой и статикой. Все это верно для любого варианта теории (неренормированного, ренормированного, базового) при соответствующем выборе функционала $S^{\text{st}}(\varphi)$. Отсюда можно получать информацию о динамическом ренормированном действии $S_R(\phi)$, позволяющую доказывать мультипликативность ренормировки различных динамических моделей, в том числе и обсуждаемой в этой работе модели H_0 .

Действительно, если неренормированное и базовое действия модели имеют стандартную форму (16), то одновременные динамические функции Грина основных полей φ определяются распределением (18) с соответствующим (неренормированным или базовым) функционалом S^{st} в показателе. Если заданы базовые функции и схема ренормировки (у нас MS), то тем самым однозначно определены соответствующие ренормированные функции Грина (по базовым диаграммам с R -операцией), так что они определяются тем же распределением (18) с (считающимся известным) ренормированным статическим функционалом S_R^{st} в показателе. Это значит, что функционал $\exp S_R^{\text{st}}$ обязательно должен быть стационарным решением уравнения Фоккера–Планка (17) для ренормированной динамической модели при одинаковой (MS) в динамике и статике схеме ренормировки. Это дает полезную информацию о динамическом ренормированном функционале S_R .

Для обычных моделей критической динамики, в том числе и для нашей H_0 -модели, статический функционал S^{st} ренормируется мультипликативно. Если бы мы были уверены в мультипликативности ренормировки и соответствующей динамической модели, то из сказанного выше сразу следовало бы, что для всех входящих в S^{st} величин динамические и статические константы Z в схеме MS совпадают (а в общем случае различаются лишь некоторой УФ-конечной ренормировкой), т.е. в схеме MS справедливы соотношения (10). Как правило, в динамических моделях стандартный анализ размерностей позволяет легко доказать лишь то, что все контрчлены можно воспроизвести введением различных констант Z при слагаемых базового действия. Но этих констант обычно “слишком много”, поэтому мультипликативность ренормировки заранее неочевидна. В такой ситуации именно сформулированное выше утверждение о связи с ренормированной статикой позволяет доказать наличие тех связей между динамическими константами ренормировки Z , которые обеспечивают мультипликативную ренормируемость модели.

Поясним подробнее. Допустим, что неренормированный и базовый функционалы действия имеют стандартную форму (16), а ренормированное действие S_R представимо в виде

$$S_R(\phi) = \varphi' \alpha' \varphi' + \varphi' [-Z \partial_t \varphi + A(\varphi)], \quad (19)$$

где A – некоторый вектор, а α' и Z – не зависящие от полей матрицы по индексам φ, φ' .

Обычно по соображениям размерности очевидно, что α' и A содержат те же вклады, что и в базовом действии, только с добавочными коэффициентами Z при них. Чтобы получить уравнение Фоккера–Планка (17) для ренормированной теории, необходимо сначала привести функционал (19) к каноническому виду (16). Это можно сделать растяжением $\varphi' \rightarrow \varphi' Z^{-1} = Z^{-1\mathbf{t}} \varphi'$ вспомогательных полей, которое (как и любые растяжения коэффициентов α, β в (16)) не влияет, очевидно, на одновременное распределение полей φ . Тогда выражение (19) примет вид

$$\varphi' Z^{-1} \alpha' Z^{-1\mathbf{t}} \varphi' + \varphi' [-\partial_t \varphi + Z^{-1} A(\varphi)],$$

откуда следует, что для ренормированной теории выполняется обычное уравнение Фоккера–Планка (17) с заменами

$$(\alpha + \beta) H_\varphi \rightarrow Z^{-1} A(\varphi) \quad \text{и} \quad \alpha \frac{\delta}{\delta \varphi} \rightarrow Z^{-1} \alpha' Z^{-1\mathbf{t}} \frac{\delta}{\delta \varphi}.$$

Мы знаем (см. выше), что это уравнение должно иметь стационарным решением функционал $P_R(\varphi) \sim \exp S_R^{\text{st}}(\varphi)$, т.е. должно выполняться равенство

$$\frac{\delta}{\delta \varphi} \left\{ \left[Z^{-1} A(\varphi) - Z^{-1} \alpha' Z^{-1\mathbf{t}} \frac{\delta}{\delta \varphi} \right] \exp S_R^{\text{st}}(\varphi) \right\} = 0$$

или в подробной записи

$$\int d\mathbf{x} \frac{\delta}{\delta \varphi_a(\mathbf{x})} [B_a(\varphi) \exp S_R^{\text{st}}(\varphi)] = 0 \quad (20)$$

(напомним, что по повторяющимся индексам всегда подразумевается суммирование), где

$$B(\varphi) \equiv Z^{-1} A(\varphi) - Z^{-1} \alpha' Z^{-1\mathbf{t}} \frac{\delta S_R^{\text{st}}(\varphi)}{\delta \varphi}. \quad (21)$$

Вектор B локален относительно переменной интегрирования $\mathbf{x}$ в (20), т.е. зависит только от полей φ и их производных, взятых в одной точке. Поэтому при выполнении вариационного дифференцирования в (20) все вклады от производных B будут кратны $\delta(0)$, а вклады от производных экспоненты такого множителя не содержат. Поскольку вклады этих двух типов явно независимы, равенство (20) сводится к двум уравнениям:

$$\int d\mathbf{x} \frac{\delta B_a(\varphi)}{\delta \varphi_a} = 0, \quad (22a)$$

$$\int d\mathbf{x} B_a(\varphi) \frac{\delta S_R^{\text{st}}(\varphi)}{\delta \varphi_a} = 0. \quad (22b)$$

С помощью этих соотношений для конкретных моделей можно получать информацию о константах ренормировки в S_R , позволяющую доказать мультипликативность ренормировки динамической модели и, как следствие, равенства (10). Мы воспользуемся этим приемом для доказательства сформулированных в разделе 1 утверждений 1–3.

3. РЕНОРМИРОВКА СОСТАВНОГО ОПЕРАТОРА $v'\partial_t v$ В H_0 -МОДЕЛИ

Хотя нас интересует только ренормировка H_0 -модели, т.е. первое слагаемое в функционале (8), нам придется рассматривать этот функционал с точностью до линейных по a вкладов включительно, поскольку мы хотим воспользоваться соотношениями (22). Дело в том, что эти соотношения следуют из уравнения Фоккера–Планка для ренормированной теории, а для вывода этого уравнения необходимо присутствие в динамическом действии вкладов $\partial_t \varphi$ для всех полей (в H_0 -модели с $a = 0$ вклад $\partial_t v$ исчезает). Поэтому мы должны рассматривать и линейные по a вклады в (8), т.е. ренормировку ИК-несущественного составного оператора $v'\partial_t v \equiv F_1$ в H_0 -модели. В логарифмической теории ($d = 4$) этот оператор имеет суммарную каноническую размерность $d_F = 10$, тогда как для всех прочих слагаемых базового действия (7) $d_F = 8$ (при $d = 4$ поля ψ, ψ', v, v' имеют суммарные размерности 1, 3, 3, 3, соответственно, а для “множителей” $\partial, \partial_t, \tau$ имеем $d_F = 1, 4, 2$).

Таким образом, нам нужно проанализировать ренормировку полной модели H с точностью до членов порядка a включительно, тем самым и ренормировку составного оператора $v'\partial_t v$ в рамках H_0 -модели.

В общем случае составные операторы ренормируются со смешиванием, в частности, к интересующему нас оператору $v'\partial_t v \equiv F_1(\phi)$ могут примешиваться при ренормировке другие операторные мономы $F_k(\phi)$, $k = 2, 3, \dots$, с той же (или меньшей) канонической размерностью. Общая формула ренормировки для содержащего оператор $F_1 \equiv v'\partial_t v$ замкнутого (относительно ренормировки) семейства составных операторов имеет вид

$$[F_i(\phi)]_R = \sum_k Q_{ik} F_k(\phi), \quad v'\partial_t v \equiv F_1(\phi), \quad (23)$$

где $F_k(\phi)$ – неренормированные операторы, $[F_k(\phi)]_R$ – ренормированные, Q_{ik} – матрица смешивания.

Чтобы воспользоваться соотношениями (22) для функционала (8), нужно сначала убедиться, что он допускает представление (19) с точностью до линейных по a членов включительно, а для этого необходимо иметь информацию об операторах $F_k(\phi)$ в (23). Конечно, задача упростилась бы, если бы мы знали, что оператор $F_1 \equiv v'\partial_t v$ ренормируется без смешивания или вообще не ренормируется. Но эта проблема пока не исследована. Поэтому при определении вида операторов $F_k(\phi)$, которые могут примешиваться при ренормировке к оператору $F_1(\phi) \equiv v'\partial_t v$, мы можем руководствоваться лишь следующими общими соображениями:

1. Поскольку в действие входят операторы под знаком $\int dx \dots$, можно не рассматривать операторы типа $\partial F, \partial_t F$ с внешними производными, считая их “эквивалентными нулю”.

2. Все 1-неприводимые диаграммы со вставкой одного оператора F_1 и внешними линиями только полей $\varphi = (\psi, v)$ равны нулю из-за присутствия в них замкнутых циклов запаздывающих линий [4]. Поэтому такие диаграммы не порождают операторных

контрчленов, так что любой из них должен содержать, как минимум, один множитель $\varphi' = (\psi', v')$.

3. Из вида вершин в функционале (7) (с учетом поперечности полей v, v') следует, что на внешние линии вспомогательных полей $\varphi' = (\psi', v')$ в 1-неприводимых функциях Γ со вставкой одного оператора F_1 , а следовательно, и на поля φ' в его контрчленах должен выделяться, как минимум, один символ ∂ , т.е. поля φ' могут входить в контрчлены только в виде $\partial\varphi'$.

4. Все контрчлены должны обладать симметрией $\psi, \psi' \rightarrow -\psi, -\psi'$ модели (7), т.е. общее число множителей ψ и ψ' в них должно быть четным.

Из этих соображений с учетом размерностей всех величин при $d = 4$ ($d_F = 1, 3, 3, 3$ для полей ψ, ψ', v, v' и $d_F = 1, 4, 2$ для символов $\partial, \partial_t, \tau$) следует, что контрчленами F_1 могут быть только операторы вида $(\partial\varphi')(\partial\varphi')$ с не зависящими от полей φ' дополнительными множителями размерности 2 (например, τ , или два поля ψ , или два оператора ∂ , или поле ψ и оператор ∂) или операторы вида $\partial\varphi'$ с дополнительными множителями размерности 6. Среди них контрчленов с двумя или более символами ∂_t быть не может, а с одним ∂_t допустим лишь контрчлен $\sim (\partial\psi')(\partial_t\partial\psi) \sim \psi'(\partial^2\partial_t\psi)$. Сам оператор $F_1 = v'\partial_tv$ контрчленом быть не может из-за отсутствия в нем действующего на v' символа ∂ , поэтому в (23) $Q_{11} = 1, Q_{i1} = 0 \forall i \neq 1$.

Этот краткий качественный анализ показывает, какие именно операторы F_k могут примешиваться при ренормировке к оператору $F_1 = v'\partial_tv$ в (23). Сейчас важно лишь то, что коэффициент при F_1 не ренормируется ($Q_{11} = 1$) и что функционал (8) после подстановки в него выражения (23) для $[F_1]_R = [v'\partial_tv]_R$ оказывается представимым в форме (19), а именно

$$S_R(\phi) = \varphi'\alpha'\varphi' + \psi'[-\bar{Z}\partial_t\psi + A_\psi(\varphi)] + v'[-a\partial_tv + A_v(\varphi)]. \quad (24)$$

Входящие сюда величины $\{\alpha', \bar{Z}, A\} \equiv X$ записываются в виде суммы $X^{(0)} + X^{(1)}$, где $X^{(0)}$ – определяемое из (12) нулевое приближение, $X^{(1)}$ – поправки порядка a . При этом $\bar{Z} = 1 + \bar{Z}^{(1)}$ с $\bar{Z}^{(1)} = \text{const } \partial^2$, матрица α' в нулевом порядке по a диагональна (это следует из (12)), а в первом может содержать перекрестный член $\alpha'_{\psi v}$ и, что более необычно, явную зависимость от поля ψ .

Последнее существенно, т.к. обычно считается (и предполагалось в (19)), что матрица коэффициентов Онсагера α_{ab} , в отличие от коэффициентов межмодовых связей β_{ab} , не содержит зависимости от полей φ . На языке стохастической задачи (14) допущение зависимости α от φ представляется, конечно, неестественным. Однако если эта зависимость проявляется лишь в поправочных членах какой-либо итерационной процедуры (в данном случае – разложения по степеням параметра a), то задачу с $\alpha = \alpha(\varphi)$ можно сформулировать корректно. На языке функционального интегрирования обобщение на случай действия типа (16) с $\alpha = \alpha(\varphi)$ вообще не порождает принципиальных проблем.

Но возникает вопрос: останется ли в этом случае справедливым уравнение Фоккера–Планка (17), необходимое для получения соотношений (22)? Ответ утвердительный. Проанализировав процедуру вывода уравнения (17), можно показать, что оно остается верным и при зависящих от φ коэффициентах α (доказательство приводится в приложении).

4. РЕНОРМИРОВКА H_0 -МОДЕЛИ

Итак, рассматривается ренормировка полной модели H с точностью до линейных по a вкладов в (8) включительно. Мы хотим воспользоваться соотношениями (22) для получения информации о ренормировке H_0 -модели с $a = 0$. Известно, что статическое действие (3) ренормируется мультипликативно, т.е.

$$S_R^{\text{st}}(\varphi) = -\frac{Z_1^{\text{st}}(\partial\psi)^2}{2} - \frac{Z_2^{\text{st}}\tau\psi^2}{2} - \frac{Z_3^{\text{st}}g_{1B}\psi^4}{24} - \frac{av^2}{2}, \quad (25)$$

где $g_{1B} = g_1\mu^\epsilon$ – базовый заряд ($d = 4 - \epsilon$), μ – ренормировочная масса, g_1, τ, a – ренормированные параметры (при такой перенормировке a не меняется), все постоянные Z выражаются через считающиеся известными статические константы ренормировки поля ψ и параметров $Z_1^{\text{st}} = (Z_\psi^{\text{st}})^2$, $Z_2^{\text{st}} = (Z_\psi^{\text{st}})^2 Z_\tau^{\text{st}}$, $Z_3^{\text{st}} = (Z_\psi^{\text{st}})^4 Z_{g_1}^{\text{st}}$.

Отождествляя выражения (19) и (24), заключаем, что величина Z в формуле (19) – диагональная матрица с элементами

$$Z_\psi = \bar{Z}, \quad Z_v = a. \quad (26)$$

Отсюда для “вектора” B_φ в (22) из определения (21) получаем

$$\begin{aligned} B_\psi &= \bar{Z}^{-1} A_\psi - \bar{Z}^{-1} \left[\alpha'_{\psi\psi} \bar{Z}^{-1} H_\psi^R + \alpha'_{\psi v} a^{-1} H_v^R \right], \\ B_v &= a^{-1} A_v - a^{-1} \left[\alpha'_{vv} a^{-1} H_v^R + \alpha'_{v\psi} \bar{Z}^{-1} H_\psi^R \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

В формулах (27) величины $\bar{Z}$ и A_φ берутся из (24), а производные H_φ^R (2) ренормированного статического функционала (25) заданы соотношениями

$$H_\psi^R = c_1 \partial^2 \psi + c_2 \psi + c_3 \psi^3, \quad H_v^R = -av, \quad (28)$$

где все c_i – известные из (25), не зависящие от a коэффициенты. Уравнение (22б) в H -модели принимает вид

$$B_\psi H_\psi^R + B_v H_v^R = 0 \quad (29)$$

(интегрирование по $\mathbf{x}$ подразумевается) с B_φ из (27) и H_φ^R из (28). Все величины предполагаются выраженными в форме рядов по a , и мы хотим отобрать в соотношении (29) только вклады низшего (нулевого) порядка по a . Для входящих в (27) величин $X = \{\bar{Z}, A_\varphi\} = X^{(0)} + aX^{(1)} + \dots$ в нулевом приближении по a из сопоставления с выражением (12) получаем

$$\begin{aligned} \bar{Z}^{(0)} &= 1, \quad \alpha'_{\psi\psi}^{(0)} = -Z_1 \lambda \partial^2, \quad \alpha'_{\psi v}^{(0)} = \alpha'_{vv}^{(0)} = 0, \quad \alpha'_{vv}^{(0)} = -Z_5 \lambda^{-1} g_{2B}^{-1} \partial^2, \\ A_\psi^{(0)} &= -\lambda \partial^2 \left(Z_2 \partial^2 \psi - Z_3 \tau \psi - \frac{Z_4 g_{1B} \psi^3}{6} \right) - v \partial \psi, \\ A_v^{(0)} &= Z_6 \lambda^{-1} g_{2B}^{-1} \partial^2 v + Z_7 \psi \partial (\partial^2 \psi) \end{aligned} \quad (30)$$

с константами Z_i из (12). Из соотношений (27), (28) и (30) следует, что ряды по a для величин (27) имеют вид

$$B_\psi = B_\psi^{(0)} + aB_\psi^{(1)} + \dots, \quad B_v = a^{-1} [B_v^{(0)} + aB_v^{(1)} + \dots]. \quad (31)$$

Вклады низшего порядка определяются соотношениями

$$B_\psi^{(0)} = A_\psi^{(0)} - \alpha_{\psi\psi}^{\prime(0)} H_\psi^R, \quad B_v^{(0)} = A_v^{(0)} + \alpha_{vv}^{\prime(0)} v, \quad (32)$$

где $A_\varphi^{(0)}$ и $\alpha_{\varphi\varphi}^{\prime(0)}$ взяты из (30), а H_ψ^R — из (28). Подставляя величины (31) и (28) в соотношение (29), в нулевом приближении по a получаем

$$[A_\psi^{(0)} - \alpha_{\psi\psi}^{\prime(0)} H_\psi^R] \cdot H_\psi^R - [A_v^{(0)} + \alpha_{vv}^{\prime(0)} v] \cdot v = 0. \quad (33)$$

Соотношения типа (22), (33) понимаются как равенства для составных операторов. Поэтому в них можно приравнивать нулю коэффициент при каждом независимом составном операторе, в частности при вкладах с разными степенями поля скорости v в (33). Из соотношений (30) следует, что величины $\alpha_{\varphi\varphi}^{\prime(0)}$ и H_ψ^R в (33) от v не зависят, а величины $A_\varphi^{(0)}$ содержат вклады нулевого и первого порядков по v . Старшей степени v соответствуют квадратичные вклады во втором слагаемом (33). Приравнявая их нулю, с учетом явного вида соответствующих величин (30) получаем

$$[Z_6 \lambda^{-1} g_{2B}^{-1} \partial^2 v - Z_5 \lambda^{-1} g_{2B}^{-1} \partial^2 v] \cdot v = 0,$$

откуда следует равенство

$$Z_5 = Z_6 \quad (34)$$

для динамических констант ренормировки в (12).

Отбирая затем известные из (30) линейные по v вклады в (33), получаем

$$[-v \partial \psi] \cdot H_\psi^R - [Z_7 \psi \partial (\partial^2 \psi)] \cdot v = 0. \quad (35)$$

Подставляя сюда явное выражение (28) для H_ψ^R , с учетом поперечности поля v и подразумеваемого (см. выше) интегрирования по общему для всех величин аргументу $\mathbf{x}$ заключаем, что вклад в (35) дает только первое слагаемое $c_1 \partial^2 \psi$ в H_ψ^R (под знаком интеграла по $\mathbf{x}$ имеем $v \cdot \partial \psi \cdot \psi^3 \sim v \cdot \partial (\psi^4) \sim \psi^4 \cdot \partial v = 0$ и аналогично для вклада $\sim \psi$ в H_ψ^R). Поэтому два слагаемых в (35) являются подобными членами, и равенство (35) эквивалентно соотношению

$$Z_7 = c_1 = (Z_\psi^{\text{st}})^2, \quad (36)$$

выражающему динамическую константу ренормировки Z_7 в (12) через известную статическую константу ренормировки поля ψ .

Остается рассмотреть вклады без поля v в (33), для которых из (30) имеем

$$\left[-\lambda \partial^2 \left(Z_2 \partial^2 \psi - Z_3 \tau \psi - \frac{Z_4 g_{1B} \psi^3}{6} \right) - (-Z_1 \lambda \partial^2) \cdot H_\psi^R \right] \cdot H_\psi^R = 0. \quad (37)$$

Ясно, что это равенство возможно только при обращении в нуль выражения в квадратной скобке, откуда после сокращения “общего множителя” $\lambda \partial^2$ получаем

$$Z_1^{-1} \left(Z_2 \partial^2 \psi - Z_3 \tau \psi - \frac{Z_4 g_{1B} \psi^3}{6} \right) = H_\psi^R \quad (38)$$

с H_ψ^R из (28). Приравнявая коэффициенты при трех независимых операторах в (38) с учетом известного из (25) явного вида величин c_i в (28), приходим к следующей системе соотношений:

$$\begin{aligned} Z_1^{-1} Z_2 &= Z_1^{\text{st}} = (Z_\psi^{\text{st}})^2, \\ Z_1^{-1} Z_3 &= Z_2^{\text{st}} = (Z_\psi^{\text{st}})^2 Z_\tau^{\text{st}}, \\ Z_1^{-1} Z_4 &= Z_3^{\text{st}} = (Z_\psi^{\text{st}})^4 Z_{g1}^{\text{st}}. \end{aligned} \quad (39)$$

Легко проверить, что эти соотношения для динамических констант ренормировки Z_i в (12) вместе с равенствами (34) и (36) эквивалентны искомым равенствам (9)–(11), что и является доказательством сформулированных в разделе 1 утверждений 1–3.

В этом доказательстве мы воспользовались только соотношением (22б). Уравнение (22а), принимающее в H -модели вид $\delta B_\psi / \delta \psi + \delta B_v / \delta v = 0$, должно выполняться автоматически как следствие уже доказанных утверждений 1–3. Низшим порядком, пропорциональным a^{-1} , в (22а) является вклад $\sim \delta B_v^{(0)} / \delta v$, исчезающий в силу равенства (34).

В заключение отметим, что для приведенного выше доказательства важны лишь сама возможность написать для понимаемого в форме ряда по a функционала (8) уравнение (22б) и явный вид вкладов нулевого порядка по a в этом уравнении, который определяется лишь слагаемым $S_R^{(0)}(\phi)$ в (8) с известной из (12) общей структурой и коэффициентом $-aQ_{11} = -a$ при $F_1 \equiv v' \partial_t v$ в этом функционале (поскольку в (23) $Q_{11} = 1$, см. раздел 3). Если бы мы рассмотрели и первые поправки по a в уравнениях (22), то получили бы некоторую информацию о ренормировке составного оператора F_1 в (23). Суть ее в том, что вклады примесей в ренормировку члена $F_1 \equiv v' \partial_t v$ в (8) не должны нарушать согласованности с ренормированной статикой, т.е. должны сводиться лишь к некоторому изменению коэффициентов α_{ab} и β_{ab} и возможному растяжению поля ψ' множителем типа $\bar{Z}$ из (24). Это позволило бы, конечно, существенно сократить число неизвестных коэффициентов в (23). Но полной информации о ренормировке оператора F_1 таким путем получить нельзя, хотя ассоциированную с ним критическую размерность можно найти точно в силу равенств $Q_{11} = 1$, $Q_{i1} = 0 \forall i \neq 1$ и соотношений (11) для констант ренормировки полей v, v' . Это позволяет выразить введенный в работе [3] поправочный критический индекс ω_w через другой динамический индекс z – критическую размерность частоты ω [6].

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 99-02-16783) и Конкурсного центра фундаментального естествознания Минобразования РФ (проект № 97-0-14.1-30).

ПРИЛОЖЕНИЕ

**Вывод уравнения Фоккера–Планка для случая
зависящих от полей φ коэффициентов Онсагера α**

Обобщением уравнений (14) является стохастическая задача

$$\partial_t \varphi = U(\varphi) + \eta, \quad \langle \eta(x) \eta(x') \rangle = D(x, x') \quad (\text{П.1})$$

для произвольного поля (системы полей) $\varphi(x) \equiv \varphi(t, \mathbf{x})$ с произвольным функционалом $U(\varphi)$, не содержащим явной зависимости от t и от производных $\partial_t \varphi$, и с δ -образным по времени коррелятором

$$D(x, x') = \delta(t - t') \overline{D}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'). \quad (\text{П.2})$$

Задача (14) – частный случай задачи (П.1) с $U = (\alpha + \beta) H_\varphi$ и ядром $\overline{D}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 2\alpha \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$, возможные индексы полей и суммирования по ним подразумеваются.

Стохастической задаче (П.1) соответствует динамическая квантово-полевая модель с аналогичным (16) функционалом действия

$$S(\phi) = \frac{\varphi' D \varphi'}{2} + \varphi' [-\partial_t \varphi + U(\varphi)] \quad (\text{П.3})$$

с подразумеваемыми нужными интегрированиями по координатам $x \equiv (t, \mathbf{x})$ и суммированиями по индексам полей.

Уравнение Фоккера–Планка для функции распределения $P_t(\varphi)$ полей $\varphi(x) \equiv \varphi(t, \mathbf{x}) \equiv \varphi_t(\mathbf{x})$ в заданный момент времени t для задачи (П.1) имеет следующий вид:

$$\left\{ \partial_t + \frac{\delta}{\delta \varphi} \left[U(\varphi) - \frac{1}{2} \overline{D} \frac{\delta}{\delta \varphi} \right] \right\} P_t(\varphi) = 0, \quad (\text{П.4})$$

где $\varphi \equiv \varphi(\mathbf{x})$. По определению величина $P_t(\varphi)$ связана с производящим функционалом $g_t(a)$ одновременных корреляционных функций полей $\varphi_t(\mathbf{x}) = \varphi(t, \mathbf{x})$ соотношением

$$g_t(a) = \int D\varphi P_t(\varphi) \exp(a\varphi) \quad (\text{П.5})$$

с интегрированием по не зависящим от времени полям $\varphi \equiv \varphi(\mathbf{x})$ и соответствующим “источником” $a \equiv a(\mathbf{x})$, $\varphi a \equiv \int d\mathbf{x} \varphi(\mathbf{x}) a(\mathbf{x})$. Уравнение (П.4) эквивалентно следующему уравнению для функционала (П.5):

$$\partial_t g_t(a) = a \left[U(\varphi)|_{\varphi=\frac{\delta}{\delta a}} + \frac{1}{2} \overline{D} a \right] g_t(a). \quad (\text{П.6})$$

Подстановка (П.5) в (П.6) после переноса всех операций дифференцирования на $P_t(\varphi)$ приводит к уравнению (П.4).

Уравнения (П.4), (П.6) выводятся обычно в предположении независимости ядра $\overline{D}$ в (П.2) от полей $\phi \equiv (\varphi, \varphi')$. Сейчас мы хотим показать, что эти уравнения остаются

справедливыми и тогда, когда в корреляторе D (П.1) есть зависимость от полей φ (но не φ'), которой в ядре $\overline{D}$ из (П.2) соответствует зависимость от φ_t с тем же значением t , что и в δ -функции (П.2). Тогда в ядре $\overline{D}$ в (П.4) появляется зависимость от поля φ , переходящего в $\delta/\delta a$ в (П.6). При этом предполагается, что в $\overline{D}$ есть и не зависящий от φ вклад. Именно он входит в свободную (квадратичную по полям) часть функционала действия (П.3) и вместе с прочими квадратичными вкладами $S(\phi)$ определяет линии диаграмм теории возмущений, а все зависящие от φ поправки в $\overline{D}$ интерпретируются в (П.3) как добавочные взаимодействия с двумя (а не с одним, как обычно) полями φ' в вершинах. Сразу отметим, что появление таких “нестандартных” вершин не нарушает обычных свойств запаздывания функций отклика и тем самым тех следствий этих свойств, которые будут использоваться в излагаемом ниже выводе эквивалентного (П.4) уравнения (П.6).

Приведем, следуя работе [4], вывод уравнения (П.6), контролируя те изменения, которые вносятся допущением возможной зависимости ядра $\overline{D}$ в (П.2) от поля $\varphi(x) \equiv \varphi(t, \mathbf{x}) \equiv \varphi_t(\mathbf{x})$. В рамках динамической теории функционал (П.5) выражается соотношением

$$g_t(a) = \int D\phi \exp[S(\phi) + a\varphi_t] \equiv \langle \exp(a\varphi_t) \rangle, \quad (\text{П.7})$$

в котором $S(\phi)$ – действие (П.3), $a\varphi_t \equiv \int d\mathbf{x} a(\mathbf{x})\varphi(t, \mathbf{x})$, а $\langle F \rangle$ здесь и далее – удобное обозначение интеграла от F по ϕ с весом $\exp S(\phi)$.

Дифференцируя равенство (П.7) по t , получаем

$$\partial_t g_t(a) = \langle a \partial_t \varphi_t \cdot \exp(a\varphi_t) \rangle. \quad (\text{П.8})$$

Воспользовавшись теперь уравнением Швингера с производной по полю $\varphi'(x) \equiv \varphi'(t, \mathbf{x}) \equiv \varphi'_t(\mathbf{x})$ для функционального интеграла в (П.7), с учетом явного вида $S(\phi)$ в (П.3) получаем

$$0 = \int D\phi \frac{\delta}{\delta \varphi'(x)} \exp[S(\phi) + a\varphi_t] = \langle [\overline{D}\varphi'_t - \partial_t \varphi_t + U(\varphi_t)] \cdot \exp(a\varphi_t) \rangle. \quad (\text{П.9})$$

Находя отсюда вклад с $\partial_t \varphi_t$ и подставляя его в (П.8), имеем

$$\partial_t g_t(a) = a \langle [U(\varphi_t) + \overline{D}\varphi'_t] \cdot \exp(a\varphi_t) \rangle. \quad (\text{П.10})$$

Множитель $U(\varphi_t)$ можно вынести из-под знака $\langle \dots \rangle$ в (П.10) в виде оператора $U(\delta/\delta a)$, что дает соответствующий вклад в уравнение (П.6). Нетривиален лишь анализ вклада с φ'_t в (П.10), причем с учетом в нашем случае его возможной зависимости от полей φ_t .

Для его вычисления можно воспользоваться следующим известным [4] свойством одновременных функций Грина полей $\phi_t = (\varphi_t, \varphi'_t)$ в любой модели типа (П.3): вклады всех нетривиальных, т.е. имеющих вершины взаимодействия, диаграмм связанных функций Грина, содержащих хотя бы одно поле φ' , исчезают из-за присутствия в них замкнутых циклов запаздывающих линий $\langle \varphi \varphi' \rangle$ (появление добавочных вершин с двумя полями

φ' не нарушает справедливости этого утверждения). Поэтому единственным отличным от нуля вкладом в одновременные связанные функции Грина с полями φ' является вклад затравочной диаграммы функции отклика

$$\langle \varphi(x) \varphi'(x') \rangle \big|_{t=t'} = \frac{1}{2} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (\text{П.11})$$

Коэффициент $1/2$ в (П.11) соответствует стандартному доопределению $\Theta(t - t') = 1/2$ при $t = t'$ для разрывной при $t = t'$ функции отклика (П.11).

Введя производящий функционал $\langle \exp[a\varphi_t + b\varphi'_t] \rangle$ одновременных функций Грина полей $\phi_t = (\varphi_t, \varphi'_t)$ с двумя источниками $a(\mathbf{x})$ и $b(\mathbf{x})$, из соотношения (П.11) заключаем, что

$$\langle \exp[a\varphi_t + b\varphi'_t] \rangle = \langle \exp(a\varphi_t) \rangle \cdot \exp \frac{ab}{2}. \quad (\text{П.12})$$

С помощью этого соотношения легко вычисляется вклад слагаемого с φ'_t в уравнении (П.10): при наличии зависимости от φ_t в $\overline{D}$ имеем

$$\langle \overline{D}(\varphi_t) \varphi'_t \cdot \exp(a\varphi_t) \rangle = \overline{D} \frac{\delta}{\delta a} \langle \varphi'_t \cdot \exp(a\varphi_t) \rangle. \quad (\text{П.13})$$

Для оставшегося в правой части среднего $\langle \dots \rangle$ с помощью соотношения (П.12) получаем

$$\begin{aligned} \langle \varphi'_t \cdot \exp(a\varphi_t) \rangle &= \langle \varphi'_t \cdot \exp[a\varphi_t + b\varphi'_t] \rangle \big|_{b=0} = \frac{\delta}{\delta b} \langle \exp[a\varphi_t + b\varphi'_t] \rangle \big|_{b=0} = \\ &= \frac{\delta}{\delta b} \left[\langle \exp(a\varphi_t) \rangle \cdot \exp \left(\frac{ab}{2} \right) \right] \bigg|_{b=0} = \frac{1}{2} a \langle \exp(a\varphi_t) \rangle. \end{aligned}$$

Таким образом, множитель φ'_t в (П.10) можно заменить на $a/2$, а коэффициент $\overline{D}(\varphi_t)$ перед ним – на $\overline{D}(\delta/\delta a)$ согласно (П.13). Это и приводит к искомому обобщению уравнения (П.6) и его эквивалента – уравнения Фоккера–Планка (П.4).

Список литературы

- [1] *E. D. Siggia, B. I. Halperin, P. C. Hohenberg.* Phys. Rev. B. 1976. V. 13. P. 2110.
- [2] *P. C. Hohenberg, B. I. Halperin.* Rev. Mod. Phys. 1977. V. 49. P. 435.
- [3] *C. De Dominicis, L. Peliti.* Phys. Rev. B. 1978. V. 18. P. 353.
- [4] *Л. Ц. Аджемян, А. Н. Васильев, Ю. М. Письмак.* ТМФ. 1983. Т. 57. С. 268.
- [5] *Л. Ц. Аджемян, А. Н. Васильев.* ТМФ. 1998. Т. 117. С. 140.
- [6] *Л. Ц. Аджемян, А. Н. Васильев, Ю. С. Кабриц, М. В. Компаниец.* ТМФ. 1999. Т. 119. С. 73.

Поступила в редакцию 26.IV.1999 г.