Общероссийский математический портал

Д. А. Славнов, Гибридная перенормировка, *ТМФ*, 2000, том 122, номер 3, 400–416

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf575>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 17:38:06

© 2000 г.

Д. А. Славнов*

ГИБРИДНАЯ ПЕРЕНОРМИРОВКА

Предложена перенормировочная схема, сочетающая элементы регуляризации с помощью высших производных и размерной регуляризации. В схеме, с одной стороны, используются только четырехкомпонентные спиноры и поэтому отсутствует “проблема γ_5 -матрицы”, а с другой стороны, возможна процедура минимальных вычитаний. Предлагаемая схема может оказаться полезной в суперсимметричных киральных калибровочных моделях.

1. ВВЕДЕНИЕ

Перенормировочная процедура является одной из важнейших составных частей лагранжева метода в квантовой теории поля. Этой процедуре посвящено огромное количество работ. Тем не менее некоторые проблемы, связанные с ней, до сих пор остаются не до конца решенными. Одной из таких проблем является вопрос о сохранении при перенормировке тех или иных симметрий, которыми формально обладает неперенормированная теория. Наиболее трудным в этом плане оказался вопрос совмещения калибровочной и киральной симметрий, а также проблема суперсимметрии.

В разных вариантах перенормировочной процедуры данные задачи решались с большим или меньшим успехом. Ниже будет показано, что для решения этих задач очень удобна так называемая “размерная перенормировка по линиям”. Один вариант такой перенормировки построен в статьях [1, 2]. В данной статье предлагается некоторое обобщение этого варианта, названное “гибридной перенормировкой”, поскольку оно содержит как элементы размерной регуляризации, так и элементы регуляризации с помощью высших производных [3]. Характерной чертой рассматриваемой перенормировки является то, что в ней можно ограничиться четырехкомпонентными спинорами. Поэтому неразрешимая для размерной регуляризации “проблема γ_5 -матрицы” не возникает.

Предлагаемая перенормировочная схема представляется перспективной для суперсимметричных киральных калибровочных моделей. В качестве иллюстраций будет приведена схема вывода тождеств Уорда в простой модели с суперсимметрией, а также в модели с калибровочной и киральной симметриями.

*Московский государственный университет, Москва, Россия

2. ПРОИЗВОДЯЩИЙ ФУНКЦИОНАЛ ДЛЯ ПЕРЕНОРМИРОВАННЫХ ФУНКЦИЙ ГРИНА

Как показано в статье [2], в рамках размерной перенормировки по линиям функции Грина могут быть заданы с помощью следующего производящего функционала:

$$Z(j) = \mathcal{N}^{-1} \exp[\Delta_r^g] \exp[\Delta_r^s] \exp[iW(\varphi)] C(j, \varphi) \Big|_{\varphi=0}, \quad (1)$$

где $\mathcal{N}$ – нормировочный множитель, а

$$C(j, \varphi) = \exp \left[i \int dp j_u(p) \varphi_u(p) \right].$$

Здесь для определенности считается, что вся совокупность $\varphi = \{\varphi_u\}$ полей, которые фигурируют в рассматриваемой модели, подразделена на два типа: $\varphi^h = \{\varphi^g, \varphi^s\}$. Через $j = \{j_u\}$ обозначена соответствующая совокупность токов. Считается, что классическое (эффективное) действие имеет структуру

$$S(\varphi) = I(\varphi) + W(\varphi), \quad (2)$$

где $I(\varphi)$ определяет пропагаторы $D_{uv}^h(p)$ и имеет вид

$$I(\varphi) = -\frac{1}{2} \sum_{h=g,s} \int dp \varphi_u^h(-p) D_{uv}^h(p)^{-1} \varphi_v^h(p), \quad (3)$$

причем

$$D_{uv}^h(p)^{-1} D_{vt}^h(p) = \delta_{ut}.$$

В формуле (3) и везде далее по повторяющимся индексам u и v подразумевается суммирование.

Фигурирующие в формуле (1) операторы Δ_r^h выражаются через пропагаторы следующим образом:

$$\Delta_r^h = -\frac{i}{2} \int d\mu_r(p) \frac{\delta}{\delta \varphi_u^h(p)} D_{uv}^h(p) \frac{\delta}{\delta \varphi_v^h(-p)}, \quad (4)$$

где $\int d\mu_r(p) \dots$ – операция “перенормированного интегрирования”, вариант которой, предложенный в статье [2], задается формулами

$$\int d\mu_r(p) F(p^2, pq_i) = \mathcal{L}(\varepsilon \downarrow 0) \int d\mu(p; \varepsilon) F(p^2, pq_i), \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \int d\mu(p; \varepsilon) F(p^2, pq_i) &= (-1)^{\zeta-2} (\mu^2)^{-\varepsilon} \pi^{\varepsilon-\zeta} \Gamma^{-1}(\varepsilon) \times \\ &\times \lim_{\beta \rightarrow 0} \int d^{2(2+\zeta)} p (\mu^2 - p^2)^{-\beta} \int_0^\infty d\omega^2 (\omega^2)^{\varepsilon-1} \left(\frac{\partial}{\partial \omega^2} \right)^\zeta F(p^2 - \omega^2, pq_i). \end{aligned} \quad (6)$$

Операция $\int d\mu(p; \varepsilon) \dots$ далее будет называться “регуляризованным интегрированием”.

Оператор $\mathcal{L}(\varepsilon \downarrow 0)$ в формуле (5) означает, во-первых, разложение в ряд Лорана по ε , во-вторых, отбрасывание полюсных членов, в-третьих, устремление ε сверху к нулю. В формуле (6) нефизическая размерность 2ζ может быть выбрана настолько большой, что правая часть (6) перестает от нее зависеть. Полагается, что приведенное определение операции перенормированного интегрирования справедливо тогда, когда импульс p является петлевым. Если импульс p распространяется по незамкнутой линии, то перенормированное интегрирование следует считать совпадающим с обычным.

Как показано в статьях [1,2], применение в производящем функционале операции перенормированного интегрирования $\int d\mu_r(p) \dots$ (не только в виде (5), (6)) приводит к тому же результату, что и R -операция Боголюбова–Парасюка [4], в которой, помимо вычитательной процедуры, осуществляемой с помощью оператора $M(G_m)$ (например, разложение в ряд Маклорена по внешним импульсам диаграммы G_m), используется специальным образом подобранная конечная перенормировка. Именно пусть $\mathcal{G}_m((p)_m^{\text{out}})$ – амплитуда Фейнмана, соответствующая сильно связанной диаграмме G_m с внешними импульсами $(p)_m^{\text{out}}$. Тогда полином конечной перенормировки, отвечающий этой диаграмме, определяется формулой

$$Q_m((p)_m^{\text{out}}) = |L_m|^{-1} \int d\mu_r(p) M(G_m) \sum_{l \in G_m} \mathcal{G}_{m/l}((p)_m^{\text{out}}, p, -p) D_l(p). \quad (7)$$

Здесь $D_l(p)$ – пропагатор, соответствующий линии l , а $\mathcal{G}_{m/l}((p)_m^{\text{out}}, p, -p)$ – перенормированная амплитуда Фейнмана, соответствующая диаграмме $G_{m/l}$, которая получается из диаграммы G_m разрывом внутренней линии l . В правой части (7) суммирование проводится по всем $|L_m|$ внутренним линиям диаграммы G_m определенного типа.

Формулы (5) и (6) для перенормированного интегрирования могут быть обобщены в двух направлениях. Первое связано со структурой $2(2+\zeta)$ -мерного ($\zeta \rightarrow \infty$) импульсного пространства, второе – с предельным переходом по ε .

Обсудим первое направление. В формулах (5) и (6) $2(2+\zeta)$ -мерное пространство трактуется как единое целое. Соответственно этому в качестве подынтегральных функций F рассматриваются функции аргументов, которые являются скалярами в этом пространстве. Однако в действительности это не обязательное требование. В качестве полного импульсного пространства можно взять прямую ортогональную сумму четырехмерного физического пространства (метрика псевдоевклидова) и 2ζ -мерного ($\zeta \rightarrow \infty$) теневого пространства (метрика евклидова, причем свертка метрического тензора равна нулю). Далее векторы в физическом пространстве будут обозначаться символами типа $\vec{p}$, в теневом пространстве $\mathbf{p}$ и в полном пространстве $p = (\vec{p}, \mathbf{p})$. Соответственно в перенормированном интегрировании будем рассматривать функции F , аргументы которых являются скалярами в физическом и теневом пространствах по отдельности. Это позволит заменить формулу (6) более общей, в которой регуляризованное интегрирование осуществляется в два этапа (сначала по теневому пространству, затем по

физическому):

$$\begin{aligned} \int d\mu(\vec{p}, \mathbf{p}; \varepsilon) F(\vec{p}^2, \mathbf{p}^2, \vec{p}\vec{q}_i, \mathbf{p}\mathbf{q}_j) &= (-1)^\zeta (\mu^2)^{-\varepsilon} \pi^{\varepsilon-\zeta} \Gamma^{-1}(\varepsilon) \times \\ &\times \lim_{\beta \rightarrow 0} \int d^4 \vec{p} (\mu^2 - \vec{p}^2)^{-\beta} \lim_{\beta' \rightarrow 0} \int d^{2\zeta} \mathbf{p} (\mathbf{p}^2 - \vec{p}^2)^{-\beta'} \times \\ &\times \int_0^\infty d\omega^2 (\omega^2)^{\varepsilon-1} \left(\frac{\partial}{\partial \omega^2} \right)^\zeta F(\vec{p}^2, \mathbf{p}^2 + \omega^2, \vec{p}\vec{q}_i, \mathbf{p}\mathbf{q}_j). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь вместо одной промежуточной регуляризации с помощью параметра β используются две (параметры β и β'). Впрочем, в перенормируемых моделях используемые функции F обычно таковы, что вторая регуляризация (параметр β') оказывается излишней, и с самого начала можно положить $\beta' = 0$. Конечно, приведенная промежуточная регуляризация не является единственно возможной.

Для регуляризованного интегрирования $\int d\mu(\vec{p}, \mathbf{p}; \varepsilon) \dots$ можно повторить рассуждения, которые в статье [2] проведены для $\int d\mu(p; \varepsilon) \dots$, и показать, что операция $\int d\mu(\vec{p}, \mathbf{p}; \varepsilon) \dots$ эквивалентна размерной регуляризации Вильсона [5]. Как следствие эта операция обладает свойствами [6]

$$\int d\mu(\vec{p}, \mathbf{p}; \varepsilon) = 0, \quad (9)$$

$$\int d\mu(\vec{p}, \mathbf{p}; \varepsilon) \int d\mu(\vec{q}, \mathbf{q}; \varepsilon) \dots = \int d\mu(\vec{q}, \mathbf{q}; \varepsilon) \int d\mu(\vec{p}, \mathbf{p}; \varepsilon) \dots, \quad (10)$$

$$\int d\mu(\vec{p}, \mathbf{p}; \varepsilon) F(p + k; q_1, \dots) = \int d\mu(\vec{p}, \mathbf{p}; \varepsilon) F(p; q_1, \dots). \quad (11)$$

Хотя регуляризованное интегрирование по своему результату эквивалентно размерной регуляризации, эти две операции технически различаются. В регуляризованном интегрировании нет аналитического продолжения по размерности пространства. Вместо этого в нем эффективно содержится [2] вычитание “плохих” ультрафиолетовых асимптот по импульсам интегрирования. При этом, к сожалению, возникают инфракрасные особенности, регуляризовать которые призвано дополнительное интегрирование по дополнительному параметру ω . Именно для однозначности способа введения ω приходится использовать теневые размерности.

Поскольку в операции $\int d\mu(\vec{p}, \mathbf{p}; \varepsilon) \dots$ физические $\vec{p}$ и теневые $\mathbf{p}$ компоненты импульса интегрирования p связаны менее жестко, чем в операции $\int d\mu(p; \varepsilon) \dots$, фигурирующей в формуле (6), операция $\int d\mu(\vec{p}, \mathbf{p}; \varepsilon) \dots$ представляет больше свободы действия. Можно, например, теневые компоненты импульса объединить не с физическими, а с массами. В частности, для пропагатора спинорного поля в полном пространстве можно принять выражение

$$S(p) = S(\vec{p}, \mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{m + \frac{\mathbf{p}_M^2}{M} + \hat{p}}{(m + \frac{\mathbf{p}_M^2}{M})^2 - \vec{p}^2}.$$

Здесь

$$\hat{p} = \sum_{\mu=0}^3 p_{\mu} \gamma^{\mu},$$

т.е. спинорное поле описывается четырехкомпонентным спинором. В этом случае естественно никаких проблем с определением γ_5 -матрицы и с тождествами Фирца [7] не возникает.

Перейдем теперь ко второму направлению обобщения формул (5) и (6), связанному с порядком предельных переходов по ε . Формула (5) соответствует ситуации, когда для каждого перенормированного интегрирования вводится свой параметр ε и по нему совершается предельный переход к нулю. Однако можно всем линиям типа h ($h = g, s$) сопоставить единый параметр ε_h и вместо формулы (5) использовать формулу

$$\int d\mu_r(p; \varepsilon_h) F(p^2, pq_i; \varepsilon_g, \varepsilon_s) = \mathcal{L}(\varepsilon_h) \int d\mu(p; \varepsilon_h) F(p^2, pq_i; \varepsilon_g, \varepsilon_s) \equiv \Phi(q_i; \varepsilon_g, \varepsilon_s).$$

Здесь оператор $\mathcal{L}(\varepsilon_h)$ определяется так же, как оператор $\mathcal{L}(\varepsilon \downarrow 0)$, только без предельного перехода $\varepsilon \rightarrow 0$. Кроме того, допускается, что подынтегральная функция F возникла в результате аналогичной операции перенормированного интегрирования. Поэтому она также может зависеть от ε_g и ε_s . Однако благодаря операторам $\mathcal{L}(\varepsilon_h)$ ни у функции F , ни у функции $\Phi(q_i; \varepsilon_g, \varepsilon_s)$ полюсов по $\varepsilon_g, \varepsilon_s$ нет.

Для операции $\int d\mu_r(p; \varepsilon_h) \dots$ проходит приведенное в статье [1] доказательство эквивалентности перенормировки с помощью перенормированного интегрирования R -операции Боголюбова–Парасюка. Только в этом случае полином конечной перенормировки $Q_m((p)_m^{\text{out}}; \varepsilon_g, \varepsilon_s)$ будет определяться формулой (7), в которой операция $\int d\mu_r(p) \dots$ заменена на $\int d\mu_r(p; \varepsilon_h) \dots$. Конечно, в этом случае подынтегральная функция $\mathcal{G}_{m/l}$ также может зависеть от $\varepsilon_g, \varepsilon_s$, но опять-таки полюсов по $\varepsilon_g, \varepsilon_s$ ни у Q_m , ни у $\mathcal{G}_{m/l}$ нет. Эти величины могут рассматриваться как перенормированные, но в которых “размерная” регуляризация еще не снята.

В операции интегрирования $\int d\mu_r(p) \dots$, а значит, и в операторе $\exp[\Delta_r]$, фигурирующем в формуле (1), содержится вычитание полюсных по ε членов. Данную вычитательную процедуру можно заменить введением подходящих контрчленов. Эта возможность основывается на том [4], что изменение полиномов конечной перенормировки в R -операции эквивалентно прибавлению к лагранжиану соответствующих контрчленов.

Если в формуле (7) (точнее, ее обобщении), задающей полиномы конечной перенормировки $Q_m((p)_m^{\text{out}}; \varepsilon_g, \varepsilon_s)$, заменить перенормированное интегрирование $\int d\mu_r(p; \varepsilon_h) \dots$ на регуляризованное $\int d\mu(p; \varepsilon_h) \dots$, то к каждому полиному Q_m прибавится полином

$$\begin{aligned} Q_m^{(c)}((p)_m^{\text{out}}; \varepsilon_g, \varepsilon_s) &= |L_m^h|^{-1} (1 - \mathcal{L}(\varepsilon_h)) \times \\ &\times \int d\mu_r(p; \varepsilon_h) M(G_m) \sum_{l \in G_m} \mathcal{G}_{m/l}((p)_m^{\text{out}}, p, -p; \varepsilon_g, \varepsilon_s) D_l(p), \end{aligned}$$

в котором все коэффициенты имеют полюсную зависимость от ε_h . Совокупности этих полиномов однозначно соответствует совокупность локальных контрчленов $\{Q_m^{(c)}\} \rightarrow \{\Lambda_m(\varphi)\}$ [4]. Поэтому результат вычисления амплитуд Фейнмана или функций Грина не изменится, если мы одновременно с заменой $\int d\mu_r(p; \varepsilon_h) \dots \rightarrow \int d\mu(p; \varepsilon_h) \dots$ прибавим к действию сумму $\Lambda(\varphi)$ соответствующих контрчленов.

Таким образом, производящий функционал $Z(j; \varepsilon_g, \varepsilon_s)$ для перенормированных функций Грина, в которых предельный переход по $\varepsilon_g, \varepsilon_s$ еще не совершен, может быть записан в любом из двух видов:

$$Z(j; \varepsilon_g, \varepsilon_s) = \mathcal{N}^{-1} \exp[\Delta_r^g(\varepsilon_g)] \exp[\Delta_r^s(\varepsilon_s)] \exp[iW(\varphi)] C(j, \varphi)|_{\varphi=0}, \quad (12)$$

$$Z(j; \varepsilon_g, \varepsilon_s) = \mathcal{N}^{-1} \exp[\Delta^g(\varepsilon_g)] \exp[\Delta^s(\varepsilon_s)] \exp[iW_\Lambda(\varphi)] C(j, \varphi)|_{\varphi=0}. \quad (13)$$

В (12) оператор $\Delta_r^h(\varepsilon_h)$ определяется формулой (4), в которой сделана замена $\int d\mu_r(p) \dots \rightarrow \int d\mu_r(p; \varepsilon_h) \dots$. В формуле (13) сделана дальнейшая замена $\int d\mu_r(p; \varepsilon_h) \dots \rightarrow \int d\mu(p; \varepsilon_h) \dots$, одновременно с этим действие $W(\varphi)$ заменено перенормированным действием $W_\Lambda(\varphi) = W(\varphi) + \Lambda(\varphi)$.

3. ТОЖДЕСТВА УОРДА ДЛЯ ПРОИЗВОДЯЩЕГО ФУНКЦИОНАЛА

Будем считать, что классическое (эффе́ктивное) действие имеет структуру, описываемую формулами (2), (3). Рассмотрим некоторое инфинитезимальное преобразование полей

$$\varphi_v(p) \rightarrow \varphi_v(p) + \delta\varphi_v(p) = \varphi_v(p) + f_v(p, \varphi)\delta\lambda. \quad (14)$$

Это может быть, например, преобразование БРСТ [8, 9], локальное калибровочное или киральное.

Преобразование (14) индуцирует вариацию действия

$$\delta S(\varphi) = \int dp \left\{ \varphi_u(-p) D_{uv}(p)^{-1} + \frac{\delta W(\varphi)}{\delta \varphi_v(p)} \right\} \delta \varphi_v(p). \quad (15)$$

Если $\delta S(\varphi) = 0$, то действие сохраняется. На формальном уровне отсюда следуют обобщенные тождества Уорда. Однако, как хорошо известно, эти тождества могут оказаться нарушенными. Дело в том, что в классическом действии поля считаются достаточно “хорошими” функциями такими, что интеграл в правой части равенства (15) существует. В противоположность этому в квантовом случае мы имеем дело с функциями Грина, в которых классические поля заменены на пропагаторы, имеющие значительно более “плохое” поведение. Некоторые соотношения, справедливые для классических полей, оказываются нарушенными для пропагаторов. В рассматриваемой схеме перенормировок это проявляется особенно наглядно.

Производящий функционал для перенормированных функций Грина задается либо формулой (1), либо формулами (12) и (13), в которых, с одной стороны, фигурируют

классические поля φ (в множителях $\exp\{iW(\varphi)\}$ и $C(j, \varphi)$), а с другой, имеются операторы $\Delta_r^h(\varepsilon_h)$, $\Delta^h(\varepsilon_h)$, которые заменяют классические поля на пропагаторы. Параллельно с этим обычные импульсные интегралы заменяются перенормированными или регуляризованными. Рядом свойств обычных интегралов последние не обладают, что может привести к возникновению аномалий в тождествах Уорда.

Приступим к получению тождеств Уорда в рамках предлагаемой схемы перенормировок. Начнем с некоторого обобщения формул (12) и (13) для производящего функционала $Z(j; \varepsilon_g, \varepsilon_h)$. Величины $f_v(p; \varphi)$, определяющие инфинитезимальные преобразования (14) полей φ , могут быть линейными по полям φ , а могут быть и нелинейными. Соответственно $f_v(p; \varphi)$ есть либо $f_v^1(p; \varphi)$, либо $f_v^{nl}(p; \varphi)$. Если $f_v^{nl}(p; \varphi) \neq 0$, то добавим к действию $W(\varphi)$ слагаемое

$$W(\varphi; J) = \int dp J_v(p) f_v^{nl}(p; \varphi), \quad (16)$$

где $J_v(p)$ — источники составных полей $f_v^{nl}(p; \varphi)$. Производящий функционал, получающийся при замене в правой части формулы (12) действия $W(\varphi)$ на $W(\varphi) + W(J; \varphi)$, обозначим через $Z(j, J; \varepsilon_g, \varepsilon_h)$. Если мы теперь захотим задать функционал $Z(j, J; \varepsilon_g, \varepsilon_h)$ с помощью операторов $\Delta^h(\varepsilon_h)$, то нам нужно будет воспользоваться формулой (13), в которой действие $W_\Lambda(\varphi)$ заменено на $W_\Lambda(\varphi) + W_\Lambda(J, \varphi)$. В слагаемом $W_\Lambda(J, \varphi)$, помимо $W(J, \varphi)$, собраны все контрчлены, которые компенсируют сингулярные по ε_g и ε_h члены, возникающие от дополнительных вершин $W(J, \varphi)$.

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} T(j; \varepsilon_g, \varepsilon_h) = & \mathcal{N}^{-1} \left[\int d\mu(p; \varepsilon_g) \exp[\Delta^g(\varepsilon_g)] \exp[\Delta^s(\varepsilon_h)] \times \right. \\ & \times \varphi_u^g(-p) D_{uv}^g(p)^{-1} f_{v\Lambda}(p; \varphi) + \exp[\Delta^g(\varepsilon_g)] \int d\mu(p; \varepsilon_h) \times \\ & \times \exp[\Delta^s(\varepsilon_h)] \varphi_u^s(-p) D_{uv}^s(p)^{-1} f_{v\Lambda}(p; \varphi) \left. \right] \times \\ & \times \exp[iW_\Lambda(\varphi)] C(j, \varphi) \Big|_{\varphi=0}, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$f_{v\Lambda}^1(p; \varphi) = f_v(p; \varphi), \quad f_{v\Lambda}^{nl}(p; \varphi) = \frac{\delta W_\Lambda(J, \varphi)}{\delta J_v(p)} \Big|_{J=0}.$$

Так как в правой части (17) после всех выкладок следует положить $\varphi = 0$, то одна из вариационных производных, содержащаяся в некотором операторе $\Delta^h(\varepsilon_h)$, должна подействовать на явно выписанное поле $\varphi_u^h(-p)$. При этом множитель D_{uv}^h , фигурирующий в этом операторе Δ^h , компенсируется множителем $D_{uv}^h(p)^{-1}$. Остальные операторы $\Delta(\varepsilon)$ снова можно будет собрать в экспоненту. В результате равенство (17) при-

обретет вид

$$\begin{aligned}
 T(j; \varepsilon_g, \varepsilon_s) = \mathcal{N}^{-1} & \left\{ \int d\mu(p; \varepsilon_g) \exp[\Delta^g(\varepsilon_g)] \exp[\Delta^s(\varepsilon_s)] \times \right. \\
 & \times \left[C(j, \varphi) \frac{\delta W_\Lambda(\varphi)}{\delta \varphi_v^g(p)} f_{v\Lambda}(p; \varphi) - i \frac{\delta}{\delta \varphi_v^g(p)} (C(j, \varphi) f_{v\Lambda}(p; \varphi)) \right] + \\
 & + \exp[\Delta^g(\varepsilon_g)] \int d\mu(p; \varepsilon_s) \exp[\Delta^s(\varepsilon_s)] \left[C(j, \varphi) \frac{\delta W_\Lambda(\varphi)}{\delta \varphi_v^s(p)} f_{v\Lambda}(p; \varphi) - \right. \\
 & \left. \left. - i \frac{\delta}{\delta \varphi_v^s(p)} (C(j, \varphi) f_{v\Lambda}(p; \varphi)) \right] \right\} \exp[iW_\Lambda(\varphi)] \Big|_{\varphi=0}.
 \end{aligned}$$

Ограничимся случаем, когда $f_{v\Lambda}(x; \varphi)$ локально выражается через $\varphi_v(x)$. Тогда $\delta f_{v\Lambda}(p; \varphi) / \delta \varphi_v(p)$ не зависит от p , и в силу (9) имеем

$$\int d\mu(p) \frac{\delta f(p; \varphi)}{\delta \varphi_v^h(p)} = 0.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
 \delta T(j; \varepsilon_g, \varepsilon_s) = \mathcal{N}^{-1} & \left\{ \int d\mu(p; \varepsilon_g) \exp[\Delta^g(\varepsilon_g)] \exp[\Delta^s(\varepsilon_s)] \times \right. \\
 & \times \left[\frac{\delta W_\Lambda(\varphi)}{\delta \varphi_v^g(p)} + j_v^g(p) \right] f_{v\Lambda}(p; \varphi) + \exp[\Delta^g(\varepsilon_g)] \int d\mu(p; \varepsilon_s) \times \\
 & \times \exp[\Delta^s(\varepsilon_s)] \left[\frac{\delta W_\Lambda(\varphi)}{\delta \varphi_v^s(p)} + j_v^s(p) \right] f_{v\Lambda}(p; \varphi) \left. \right\} \exp[iW_\Lambda(\varphi)] C(j, \varphi) \Big|_{\varphi=0}. \quad (18)
 \end{aligned}$$

Сравнивая формулы (17) и (18), получаем

$$\begin{aligned}
 \mathcal{N}^{-1} & \left\{ \int d\mu(p; \varepsilon_g) \exp[\Delta^g(\varepsilon_g)] \exp[\Delta^s(\varepsilon_s)] j_v^g(p) f_{v\Lambda}(p; \varphi) + \right. \\
 & + \exp[\Delta^g(\varepsilon_g)] \int d\mu(p; \varepsilon_s) \exp[\Delta^s(\varepsilon_s)] j_v^s(p) f_{v\Lambda}(p; \varphi) \left. \right\} \times \\
 & \times \exp[iW_\Lambda(\varphi)] C(j, \varphi) \Big|_{\varphi=0} = R, \quad (19)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 R = \mathcal{N}^{-1} & \left\{ \int d\mu(p; \varepsilon_g) \exp[\Delta^g(\varepsilon_g)] \exp[\Delta^s(\varepsilon_s)] \times \right. \\
 & \times f_{v\Lambda}(p; \varphi) \left[\varphi_u^g(-p) D_{uv}^g(p)^{-1} - \frac{\delta W_\Lambda(\varphi)}{\delta \varphi_v^g(p)} \right] + \\
 & + \exp[\Delta^g(\varepsilon_g)] \int d\mu(p; \varepsilon_s) \exp[\Delta^s(\varepsilon_s)] f_{v\Lambda}(p; \varphi) \times \\
 & \times \left[\varphi_u^s(-p) D_{uv}^s(p)^{-1} - \frac{\delta W_\Lambda(\varphi)}{\delta \varphi_v^s(p)} \right] \left. \right\} \exp[iW_\Lambda(\varphi)] C(j, \varphi) \Big|_{\varphi=0}. \quad (20)
 \end{aligned}$$

В левой части формулы (19) импульс p не является петлевым. Его можно считать вытекающим из источника j , который, в свою очередь, всегда можно считать достаточно “хорошей” функцией импульса p . Поэтому регуляризованное интегрирование, во-первых, можно заменить обычным, во-вторых, совершить это интегрирование в самую последнюю очередь. В результате, если $R = 0$, то соотношение (19) превращается в тождество Уорда, точнее в производящее уравнение

$$\int dp j_v(p) \left[f_v^1 \left(p; \frac{\delta}{i\delta j} \right) + \frac{\delta}{i\delta J_v(p)} \right] Z(j, J; \varepsilon_g, \varepsilon_s) \Big|_{J=0} = 0, \quad (21)$$

из которого различные тождества Уорда могут быть получены варьированием по токам j . В этом соотношении для $Z(j, J; \varepsilon_g, \varepsilon_s)$ можно уже пользоваться представлением (12), т.е. использовать неперенормированное действие $W(\varphi) + W(J, \varphi)$ и перенормированные интегрирования $\int d\mu_r(p; \varepsilon_h) \dots$

Таким образом, проверка выполнимости в рассматриваемой модели тождества Уорда сводится к проверке равенства нулю выражения R , задаваемого формулой (20). Часто такую проверку можно свести к исследованию инвариантности перенормированного действия относительно соответствующих преобразований.

Свойство (10) коммутативности операций регуляризованного интегрирования позволяет менять местами операции $\int d\mu(p; \varepsilon) \dots$ и $\Delta(\varepsilon)$, если они зависят от одного и того же параметра ε . Поэтому во втором слагаемом в фигурных скобках правой части формулы (20) операцию $\int d\mu(p; \varepsilon_s) \dots$ можно выполнять сразу же после суммирования по v . В этом случае импульс p не будет петлевым, поэтому регуляризованное интегрирование $\int d\mu(p; \varepsilon_s) \dots$ можно заменить на обычное $\int dp \dots$. Интеграл по p от фигурирующей в этом слагаемом суммы по v есть не что иное, как вариация перенормированного действия при преобразовании полей φ_v^s . Это значит, что если все поля отнесены к одному типу (поля φ_v^g отсутствуют), то инвариантность перенормированного действия является достаточным условием обращения R в нуль.

В случае двух (или большего числа) типов полей дело обстоит сложнее. В общем случае операции $\int d\mu(p; \varepsilon_g) \dots$ и $\Delta^s(\varepsilon_s)$ нельзя менять местами. Однако иногда такая возможность существует. Тогда оператор $\int d\mu(p; \varepsilon_g) \dots$ можно перенести на место непосредственно левее суммы по v и заменить на $\int dp \dots$. В этом случае интегралы по p в обоих слагаемых можно объединить вместе и получить вариацию действия при преобразовании всех полей. Равенство нулю такой вариации действия опять-таки является достаточным условием обращения R в нуль.

4. ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ГИБРИДНОЙ ПЕРЕНОРМИРОВКИ

Наиболее перспективной областью применения гибридной перенормировки представляется суперсимметричная киральная калибровочная теория. Сколько-нибудь серьезное рассмотрение такой модели требует специального исследования. В данной статье предполагается показать на простых примерах, что предлагаемая перенормировочная схема может успешно справиться с рядом возникающих в такой теории проблем.

Применим предложенную схему получения тождеств Уорда к суперсимметричной модели Весса–Зумино [10, 11]. Модель задается лагранжианом $L = L_0 + L_m + L_g$, где

$$L_0 = \frac{1}{2}[\partial_\nu A \partial^\nu A + \partial_\nu B \partial^\nu B + i\bar{\psi}\gamma_\nu \partial^\nu \psi + F^2 + G^2], \quad (22)$$

$$L_m = m \left[FA - GB - \frac{1}{2}\bar{\psi}\psi \right], \quad (23)$$

$$L_g = [FA^2 - FB^2 - 2GAB - \bar{\psi}\psi A - i\bar{\psi}\gamma_5 \psi B]. \quad (24)$$

Поле A – скалярное, поле B – псевдоскалярное, поля F и G – вспомогательные (выражаются через A и B), ψ – майорановский спинор.

Каждая из частей S_0, S_m, S_g действия, определяемая соответствующей составляющей (22), (23), (24) лагранжиана L , инвариантна относительно следующего линейного глобального суперсимметричного преобразования:

$$\begin{aligned} \delta A &= \delta\bar{\lambda}\psi, & \delta B &= -i\delta\bar{\lambda}\gamma_5\psi, & \delta F &= -i\delta\bar{\lambda}\gamma^\nu\partial_\nu\psi, \\ \delta G &= \delta\bar{\lambda}\gamma_5\gamma^\nu\partial_\nu\psi, & \delta\bar{\psi} &= i\delta\bar{\lambda}\gamma^\nu\partial_\nu(A + i\gamma_5 B) + \delta\bar{\lambda}(F + i\gamma_5 G), \end{aligned}$$

где $\delta\lambda$ – постоянный майорановский спинор. Инвариантность действия легко доказывается с использованием тождества Фирца и трансляционной инвариантности импульсного интегрирования.

Инвариантность сохраняется при переходе к перенормированному действию

$$S_0^r = \int d\vec{p} \int d\mathbf{p} z^{-1} L_0(\vec{p}, \mathbf{p}), \quad (25)$$

$$S_m^r = \int d\vec{p} \int d\mathbf{p} z [m + (z_M M)^{-1} \mathbf{p}^2 + \delta m] m^{-1} L_m(\vec{p}, \mathbf{p}), \quad (26)$$

$$S_g^r = \int d\vec{p} \int d\mathbf{p} z_g L_g(\vec{p}, \mathbf{p}). \quad (27)$$

Здесь $L_0(\vec{p}, \mathbf{p})$, $L_m(\vec{p}, \mathbf{p})$, $L_g(\vec{p}, \mathbf{p})$ – фурье-образы величин L_0, L_m, L_g , задаваемых формулами (22), (23), (24). При этом предполагается, что поля зависят от координат как физического, так и теневого пространств, но индекс ν пробегает только физические значения 0, 1, 2, 3. В действительности нужно еще убедиться, что для превращения неперенормированного действия в перенормированное достаточно ввести перенормировочные константы $z^{-1}, z, z_M, z_g, \delta m$.

Из формулы (26) следует, что во всех пропагаторах вместо массы m будет фигурировать величина $m + M^{-1} \mathbf{p}^2$ (предполагается, что $z_M = 1$ и $\delta m = 0$ при $g = 0$). Иными словами, мы имеем дело с моделью с высшими производными, но это – производные по теневым координатам. Они призваны сыграть роль, отличающуюся от их роли в стандартном подходе [3]. Непосредственно эти высшие производные не обеспечивают регуляризацию, но совместно с заменой обычного интегрирования регуляризованным имитируют переход от четырехмерного пространства к пространству размерности $4 + 2\varepsilon$.

Вместе с тем многие результаты, полученные в стандартном методе высших производных, можно использовать и в рассматриваемом подходе.

Для получения тождеств Уорда воспользуемся обычным методом индукции по числу петель [7], адаптированным к данному случаю. Нужно показать, что величина R , определяемая формулой (20), равна нулю. Будем считать, что фигурирующее в формуле (20) перенормированное действие $W_\Lambda(\varphi)$ содержит контрчлены до n -петлевого порядка включительно и что эти контрчлены имеют структуру, соответствующую формулам (25)–(27). В этом случае R обращается в нуль, т.к. оператор $\exp[\Delta(\varepsilon)]$, действуя на операторы поля, стоящие под знаком суммы в правой части формулы (20), превращает их в комбинацию пропагаторов, которая равна нулю в силу инвариантности действия. Это происходит потому, что, во-первых, регуляризованное интегрирование, так же как обычное, обладает свойством трансляционной инвариантности (11), во-вторых, для спинорных пропагаторов справедливы те же тождества Фирца, что и для полей.

Из равенства $R = 0$ следует, что производящий функционал $Z_n(j; \varepsilon)$ (индекс n означает, что в Z учтены контрчлены до n -петлевого порядка) удовлетворяет равенству (21). От функционала $Z_n(j; \varepsilon)$ стандартным образом [7] перейдем к $\Gamma_n(\varphi; \varepsilon)$ – производящему функционалу сильно связанных функций Грина. Этот функционал будет удовлетворять равенству

$$\int dp \frac{\delta \Gamma_n(\varphi; \varepsilon)}{\delta \varphi_v(p)} f_v(p; \varphi) = 0. \quad (28)$$

Варьируя это равенство по полям и полагая после этого поля равными нулю, получим систему соотношений между сильно связанными функциями Грина. Ограничимся в этих функциях $(n+1)$ -петлевым приближением. Так как в $\Gamma_n(\varphi; \varepsilon)$ учтены все контрчлены до n -петлевого порядка, то в функциях Грина все полюсы по ε , которые обязаны своим происхождением поддиаграммам, будут скомпенсированы. Останутся только полюсы, соответствующие поверхностным расходимостям.

Каждое соотношение для функций Грина, которое получается из (28), распадется на два соотношения: для регулярных и сингулярных по ε частей функций Грина. Соотношения для регулярных частей – это тождества Уорда для перенормированных функций Грина в $(n+1)$ -петлевом приближении. Соотношения для сингулярных частей связывают между собой контрчлены $\Lambda_m^{(n+1)}(\varphi)$, соответствующие поверхностным расходимостям $(n+1)$ -петлевых сильно связанных диаграмм. Вспомним, что все коэффициенты в контрчленах, которые нужно ввести при переходе от перенормированных операторов $\Delta_r(\varepsilon)$ к регуляризованным операторам $\Delta(\varepsilon)$, т.е. от формулы (12) к формуле (13), имеют чисто полюсную зависимость от ε . Поэтому в $(n+1)$ -петлевом приближении эти контрчлены совпадают с $\Lambda_m^{(n+1)}(\varphi)$.

Повторяя для этих контрчленов рассуждения, которые проведены для соответствующих величин в статье [12], можно убедиться, что в $(n+1)$ -петлевом приближении перенормированное действие имеет структуру, описываемую формулами (25)–(27). Этим замыкаются рассуждения метода индукции, которые действительно оказываются очень похожими на соответствующие рассуждения работы [12], в которой авторы использовали стандартную схему регуляризации с помощью высших производных в обычном четырехмерном пространстве.

Следует подчеркнуть, что для практического нахождения производящего функционала $Z(j)$ вычислять контрчлены $\Lambda_m(\varphi)$ не нужно. Достаточно воспользоваться формулой (12), в которой фигурируют перенормированное действие $W(\varphi)$ и перенормированный оператор $\Delta_r(\varepsilon)$.

То, что гибридная перенормировка успешно “справляется” с проблемами калибровочной и киральной инвариантностей, можно убедиться на примере модели Янга–Милса. Поскольку эта модель хорошо изучена, ограничимся только выписыванием лагранжиана и кратким комментарием.

В качестве обобщенного лагранжиана модели возьмем выражение

$$L(\varphi) = -\frac{1}{4}F_{\tau\sigma}^a F^{a\tau\sigma} - \frac{1}{2\xi}\partial^\tau A_\tau^a \partial^\sigma A_\sigma^a + \partial_\tau \bar{c}^a D^\tau c^a + \sum_j \bar{\psi}_j (i\hat{D} - m)\psi_j + \frac{i}{M} \sum_j \mathcal{M}_j^{-\frac{1}{\varepsilon_s}} (D_\alpha \psi_j)^+ \gamma_0 \gamma_5 (D^\alpha \psi_j). \quad (29)$$

Здесь φ – единое обозначение для всех полей, τ, σ – лоренцевские индексы полного пространства, μ и α – то же самое соответственно для физического и теневого пространств, D – ковариантные производные ($\hat{D} = \gamma_\mu D^\mu$), M – массовый параметр, параметры $\mathcal{M}_j$ безразмерны.

Совокупность всех полей φ предлагается распределить по двум типам: спинорные $\varphi^s = \{\bar{\psi}_j \psi_j\}$ и калибровочные $\varphi^g = \{A_\tau^a, c^a, \bar{c}^a\}$. Из всех спинорных полей $\bar{\psi}_j, \psi_j$ ($j = 1, 2, 3$) только поля $\bar{\psi}_1, \psi_1$ физические, а остальные спинорные поля вспомогательные. Некоторые из полей $\bar{\psi}_j, \psi_j$ являются фермионными, они характеризуются параметром $\mathcal{C} = +1$. Другие поля – бозонные, для них $\mathcal{C} = -1$. При этом $\mathcal{C}_j$ и $\mathcal{M}_j$ подчиняются дополнительным условиям

$$\sum_j \mathcal{C}_j = 1, \quad \sum_j \mathcal{C}_j \mathcal{M}_j = 1. \quad (30)$$

Каждый из типов полей снабжается своим параметром ε ($\varepsilon = \{\varepsilon_s, \varepsilon_g\}$), и все операции со спинорными полями совершаются раньше операций с калибровочными полями. Соответственно этому производящий функционал представляется в виде

$$Z(j, J) = \lim_{\varepsilon_g \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon_s \rightarrow \infty} Z(j, J; \varepsilon_g, \varepsilon_s), \quad (31)$$

$$\begin{aligned} Z(j, J; \varepsilon_g, \varepsilon_s) &= \mathcal{N}^{-1} \exp[\Delta_r^g(\varepsilon_g)] \lim_{\{\mathcal{M}_j\} \rightarrow \infty} \exp[\Delta_r^s(\varepsilon_s)] \times \\ &\quad \times \exp[iW(\varphi) + iW(\varphi, J)] C(j, \varphi) \Big|_{\varphi=0} = \\ &= \mathcal{N}^{-1} \exp[\Delta^g(\varepsilon_g)] \lim_{\{\mathcal{M}_j\} \rightarrow \infty} \exp[\Delta^s(\varepsilon_s)] \times \\ &\quad \times \exp[iW_\Lambda(\varphi) + iW_\Lambda(\varphi, J)] C(j, \varphi) \Big|_{\varphi=0}. \end{aligned} \quad (32)$$

Из инвариантности действия, определяемого лагранжианом (29), относительно калибровочных БРСТ-преобразований можно получить, что величина R , задаваемая формулой (20), дополненной операцией предела по $\mathcal{M}_j$, равна нулю.

Так же как в случае модели Весса–Зумино, это можно сделать с помощью индукции по числу петель, повторяя с небольшими изменениями приведенные во втором томе монографии [7] рассуждения, которые используются при доказательстве в рамках схемы минимальных вычитаний тождеств Уорда для модели с неабелевыми калибровочными полями.

Конечно, для модели Янга–Миллса хорошо работает размерная регуляризация в сочетании со схемой минимальных вычитаний. Однако и здесь гибридная перенормировка имеет свои преимущества, которые проявляются при рассмотрении локальных (в физическом пространстве) киральных преобразований

$$\delta\psi_j(\vec{p}, \mathbf{p}) = ig \int d\vec{q} \gamma_5 \psi_j(\vec{p} - \vec{q}, \mathbf{p}) \delta\lambda(\vec{q}).$$

Во-первых, здесь полностью отсутствует проблема с определением γ_5 -матрицы. Во-вторых, не возникают паразитные (spurious) аномалии. Слагаемые в лагранжиане (29), пропорциональные m , нарушают киральную инвариантность уже на классическом уровне и “вымирают” при $m \rightarrow 0$. За квантовые аномалии ответственны слагаемые, пропорциональные M^{-1} , которые обязаны своим происхождением теневому пространству, т.е. непосредственно связаны с процессом перенормировки. Именно они дают отличный от нуля (при $m \rightarrow 0$) вклад в величину R (формула (20)).

Поскольку в данном случае в R , так же как в Z , все операции со спинорными полями совершаются до операций с калибровочными полями и до предельного перехода по M_j , этот вклад целиком обуславливается однопетлевыми спинорными циклами, в которых имеются ультрафиолетовые расходимости.

5. ОБСУЖДЕНИЕ

Конечно, указанные в предыдущем разделе при обсуждении модели Янга–Миллса преимущества гибридной перенормировки вряд ли позволят ей вытеснить в этой модели ставшую уже привычной размерную регуляризацию. Пример с моделью Янга–Миллса приведен с другой целью – показать, что одна и та же перенормировочная процедура может достаточно успешно работать в моделях, в которых исследуется суперсимметрия, калибровочная и киральная симметрии. Это свидетельствует о большой гибкости гибридной перенормировки и позволяет надеяться, что эта перенормировочная схема окажется успешной в моделях, в которых имеется несколько типов симметрий.

Надо иметь в виду, что до сих пор не найдена регуляризация, сохраняющая калибровочную инвариантность, унитарность и суперсимметрию. К настоящему времени существует несколько подходов к решению этой проблемы. Ясно, что размерная регуляризация [13], оказавшаяся весьма успешной при рассмотрении калибровочных моделей, плохо приспособлена для суперсимметричных моделей, поскольку необходимое в них равенство числа фермионных и бозонных степеней свободы нарушается при выходе за рамки четырехмерного пространства.

Большие надежды возлагались на схему размерной редукции. Но выяснилось, что в своем первоначальном варианте [14] эта схема внутренне противоречива [15]. В принципе внутреннюю согласованность можно восстановить [16]. Однако при этом приходится

жертвовать тождествами Фирца, без которых суперсимметричное действие теряет инвариантность.

Другая возможная схема – метод высших ковариантных производных [3, 17] – позволяет сохранить суперсимметрию в суперпространстве. Однако в этом подходе приходится вводить новые вершины. Они приводят к дополнительным однопетлевым расходимостям, которые требуют отдельных регуляризационных методов. Здесь вновь встает проблема совместимости этих методов с требованиями суперсимметрии.

Наконец, для суперсимметричных моделей можно использовать R -операцию Боголюбова–Парасюка [18]. Но проблему калибровочной инвариантности здесь решить не удастся. Конечно, в принципе можно использовать неинвариантные регуляризации и пытаться затем так подобрать конечные контрчлены, чтобы добиться инвариантности перенормированных выражений. Однако надежд на реальное осуществление этой программы мало.

Посмотрим, какие особенности предлагаемой гибридной перенормировки позволяют рассчитывать, что она может оказаться успешной в моделях с калибровочной и суперсимметриями.

В этой перенормировке нецелый параметр ε четко отделен от размерностей пространств. Используются только пространства с целыми положительными размерностями: физическое пространство, имеющее нормальную размерность, равную четырем, и теневое пространство, которое бесконечномерно. Причем в каждом конкретном случае его можно считать конечномерным (размерности 2ζ , но ζ может быть любым целым положительным числом). Нецелый параметр ε нужен для определения функционалов (регуляризованного интегрирования) и к размерностям пространств отношения не имеет. По большому счету в размерной регуляризации “нецелая размерность” также нужна только для определения функционалов, но там проблема запутывается попыткой ввести понятие поля с нецелым числом компонент. Для суперсимметрии это оказывается неразрешимым противоречием.

В методе размерной редукции пространство полей имеет целую размерность, но считается, что пространство импульсов имеет размерность нецелую и является подпространством пространства полей. Это предположение внутренне противоречиво [16].

В гибридной перенормировке все пространства имеют целую размерность, причем размерность импульсного пространства не меньше размерности пространства полей, т.е. положение прямо противоположно тому, которое имеет место в размерной редукции. Кроме того, спинорное пространство в предлагаемой схеме четырехмерно. Поэтому никаких проблем с определением γ_5 -матрицы, полностью антисимметричного тензора $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и тождествами Фирца не возникает. Правда, в гибридной перенормировке теряется релятивистская инвариантность в полном пространстве. Но, во-первых, такая инвариантность не является физически обязательной, во-вторых, когда в размерной регуляризации или размерной редукции γ_5 -матрица определяется как произведение первых четырех матриц Дирака, такая инвариантность все равно теряется.

Обратим внимание на то, что в схему гибридной перенормировки фактически включен аппарат размерной редукции. В формуле (8), определяющей регуляризованное ин-

тегрирование, каждое добавочное интегрирование по дополнительной теневой компоненте импульса уравнивается соответствующим дифференцированием по параметру ω . Поэтому эффективно интегрирование по полному (физическому и теневому) пространству всегда остается четырехмерным вне зависимости от того, какая размерность 2ζ теневого пространства используется. С другой стороны, использование на промежуточном этапе 2ζ -мерного интегрирования позволяет однозначно выделить квадрат импульса, к которому следует добавить ω^2 , чтобы получить тот же функционал, что и в методе размерной регуляризации. Именно с удачным определением линейного функционала, с помощью которого вычисляются функции Грина, связаны огромные успехи, достигнутые размерной регуляризацией в калибровочных моделях. В гибридной перенормировке эти положительные качества размерной регуляризации полностью сохраняются.

Может показаться, что операция перенормированного интегрирования очень громоздка, но это не так. Благодаря эквивалентности регуляризованного интегрирования размерной регуляризацией правую часть формулы (8) можно формально представить в виде

$$\int d^4\vec{p} \int d^{2\varepsilon}\mathbf{p} F(\vec{p}, \mathbf{p}, \vec{q}_i, \mathbf{q}_j)$$

и использовать для вычисления $\int d^{2\varepsilon}\mathbf{p} \dots$ обычные формулы интеграла с нецелой размерностью.

Гибридная перенормировка во многом похожа на регуляризацию с помощью высших производных. Это имеет как положительные, так и отрицательные стороны. Первой положительной общей чертой является то, что в обоих подходах спиноры принадлежат четырехмерному физическому пространству. Это свойство решающее при рассмотрении суперсимметричных и киральных моделей. По сравнению с моделью высших производных гибридная перенормировка имеет то преимущество, что она может использоваться и на однопетлевом уровне. Известно, что именно однопетлевые диаграммы не позволяют добиться полного успеха при использовании метода высших ковариантных производных в суперсимметричных моделях. Правда, и в гибридной перенормировке на однопетлевом уровне могут возникнуть дополнительные трудности. Например, в приведенном примере с перенормировкой модели Янга–Миллса в спинорных циклах появляются дополнительные вершины, которые могли бы привести к неперенормируемости теории. В данном случае эту трудность удастся обойти с помощью введения дополнительных нефизических спинорных полей и предельного перехода по параметрам M_j . Этот прием похож на тот, который используется в методе высших производных, но не совпадает с ним. В гибридной перенормировке данный “трюк” не является дополнительной промежуточной регуляризацией, а служит средством избавления от нежелательных вершин. Однако в принципе это место в гибридной перенормировке потенциально опасное.

В отличие от метода высших производных импульсное и координатное пространства в гибридной перенормировке являются не четырехмерными, а бесконечномерными. Это также имеет как положительные, так и отрицательные стороны. Отрицательная сторона понятна — введение нефизических объектов всегда нежелательно. Положительным моментом является то, что в гибридной перенормировке высшие производные можно не

вводить в физическом пространстве, а только в теневом. Поэтому отпадает необходимость избавляться от паразитных степеней свободы в физическом пространстве.

Теневые степени свободы ликвидируются с помощью редукции теневого пространства, которая складывается из двух составляющих. Первая – это уже упоминавшаяся структура регуляризованного интегрирования, в котором все интегрирования по теневым компонентам импульса компенсируются дифференцированием по ω^2 . Вторая – это возможность в бесконечномерном теневом пространстве определить ковариантный метрический тензор не покомпонентно, а как линейный функционал над контравариантными тензорами таким образом, что свертка контравариантного метрического тензора равнялась бы нулю.

Особенностью регуляризации с помощью высших производных является то, что регуляризация осуществляется на уровне действия, и поэтому удобно проводить общие исследования. Кроме того, появление большого количества дополнительных вершин очень затрудняет использование этого метода в практических расчетах.

В этом плане гибридная перенормировка, наследуя положительные свойства, в большой мере избавлена от отрицательных. Это связано с возможностью в гибридной перенормировке представить производящий функционал Z в двух формах: либо в виде (12), либо в виде (13). Вид (13) и формула (20) удобны для общих исследований, поскольку в их правых частях фигурирует перенормированное действие $W_\Lambda(\varphi)$ и проверка сохранения симметрии практически сводится к проверке инвариантности перенормированного действия. Так же как в методе высших производных, в перенормированном действии может появиться много дополнительных вершин.

Для практических вычислений следует пользоваться формулой (12). В ней фигурирует сравнительно простое неперенормированное действие $W(\varphi)$, а вся перенормировка сосредоточена в перенормированных операторах $\Delta_r(\varepsilon)$, перенормировка в которых осуществляется практически так же, как в схеме минимальных вычитаний при использовании размерной регуляризации. В настоящий момент это наиболее экономная схема расчета. Более того, комбинаторная структура в формуле (12) даже проще, чем в методе минимальных вычитаний, поскольку в (12) вообще не надо находить контрчлены, достаточно после каждого регуляризованного интегрирования отбросить все полюсные слагаемые.

Таким образом, гибридная перенормировка в большой степени аккумулирует положительные черты методов высших ковариантных производных, схемы минимальных вычитаний в размерной регуляризации и отчасти метода размерной редукции.

Список литературы

- [1] Д. А. Славнов. ТМФ. 1997. Т. 110. С. 399.
- [2] Д. А. Славнов. ТМФ. 1998. Т. 114. С. 148.
- [3] А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1988.
- [4] Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1976.
- [5] K. G. Wilson. Phys. Rev. D. 1973. V. 7. P. 2911.
- [6] Дж. Коллинз. Перенормировка. М.: Мир, 1988.

- [7] *К. Ициксон, Ж. Б. Зюбер.* Квантовая теория поля. Т. 1, 2. М.: Мир, 1984.
- [8] *C. Becchi, A. Rouet, R. Stora.* Commun. Math. Phys. 1975. V. 42. P. 127.
- [9] *И. В. Тютин.* Калибровочная инвариантность в теории поля и в статистической физике в операторной формулировке. Препринт ФИАН № 39. М.: ФИАН, 1975.
- [10] *J. Wess, B. Zumino.* Phys. Lett. B. 1974. V. 49. P. 52.
- [11] *J. Wess, B. Zumino.* Nucl. Phys. B. 1974. V. 70. P. 39.
- [12] *J. Hloopoulos, B. Zumino.* Nucl. Phys. B. 1974. V. 76. P. 310.
- [13] *G. 't Hooft, M. Veltman.* Nucl. Phys. B. 1972. V. 44. P. 189.
- [14] *W. Siegl.* Phys. Lett. B. 1979. V. 84. P. 193.
- [15] *W. Siegl.* Phys. Lett. B. 1980. V. 94. P. 37.
- [16] *L. V. Avdeev, A. A. Vladimirov.* Nucl. Phys. B. 1983. V. 219. P. 262.
- [17] *S. Ferrara, O. Piguet.* Nucl. Phys. B. 1975. V. 93. P. 261.
- [18] *O. Piguet, A. Rouet.* Nucl. Phys. B. 1976. V. 108. P. 265.

Поступила в редакцию 11.II.1999 г.,
после доработки 2.VII.1999 г.