Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Ю. Спирина, О. А. Хрусталеv, М. В. Чичикина, Нестационарный полярон,
ТМФ, 2000, том 122, номер 3, 417–425

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf576>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 14:33:10

© 2000 г. Е. Ю. Спирина*, О. А. Хрусталев*, М. В. Чичикина*

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ПОЛЯРОН

Рассматривается задача о нестационарном поляроне. Во вторично квантованной системе определяются групповые переменные Боголюбова для пространственно-временных трансляций. Предлагается схема квантования скалярного поля, имеющего ненулевую классическую компоненту, взаимодействующего с заряженным скалярным полем. Полярон трактуется как результат взаимодействия заряженной частицы с классической составляющей нейтрального поля.

1. ВВЕДЕНИЕ

При рассмотрении систем со взаимодействием одной из трудностей является необходимость явного учета законов сохранения в рамках схемы регулярной теории возмущений.

Боголюбов в работе [1], посвященной проблеме полярона, “Об одной новой форме адиабатической теории возмущений в задаче о взаимодействии частицы с квантовым полем” сформулировал метод решения этой проблемы. В случаях систем с адиабатической связью необходимо произвести переход к некоторым обобщенным координатам, что позволяет выделить переменные, от которых зависит волновая функция. Эти переменные подвергаются простому сдвигу, при этом остальные переменные выбираются трансляционно-инвариантными. Волновая функция, выраженная в терминах новых переменных, имеет простые трансформационные свойства относительно преобразований группы трансляций. Получаются некоторые новые обобщенные координаты, канонически сопряженные импульсы которых совпадают с интегралами движения, которые, в свою очередь, определены групповыми свойствами гамильтониана. Таким образом, предложенный метод позволяет строить состояния, являющиеся собственными для операторов полного импульса системы, и одновременно обеспечивает выполнение соответствующих законов сохранения.

В настоящее время существует много примеров определения переменных Боголюбова для различных систем. В 1972–1973 годах Солодовникова, Тавхелидзе и Хрусталев в серии работ [2] развили и обобщили метод, предложенный Боголюбовым, на случай,

*Московский государственный университет, Москва, Россия

когда преобразования группы симметрии в квантовой теории реализуются в виде произвольной группы Ли преобразований переменных, от которых зависит волновая функция системы. Метод Боголюбова использовался в теории сильной связи, статистической физике, релятивистской теории гравитации и других областях теоретической физики [3–10].

Однако исследование систем, содержащих преобразование времени, сопряжено с некоторыми трудностями, поскольку явная структура гамильтониана как генератора трансляций по времени становится ясной только после решения уравнений движения и определения групповых переменных. Следовательно, представляется необходимым изучить способ определения групповых переменных, совместимый с теорией возмущений, когда формулы преобразования к новым переменным уточняются по мере приближения к точному решению уравнений поля. В статьях [11] была предложена схема преобразований Боголюбова для самодействующего скалярного поля. Система предполагалась релятивистски-инвариантной.

В данной работе предлагается дальнейшее развитие идей Боголюбова. На этот раз мы распространяем метод групповых переменных на случай системы взаимодействующих полей, чьей группой симметрии является группа, включающая преобразование времени. Для определенности схема будет развита на примере полярона. Теперь, однако, полярон предполагается нестационарным, и задача рассматривается как задача квантовой теории поля.

Мы вводим переменные Боголюбова для взаимодействующих нейтрального и заряженного скалярных полей в $(1+1)$ -мерном пространстве-времени и рассматриваем квантование скалярного поля в окрестности ненулевой классической компоненты, предполагая, что система инвариантна относительно преобразований группы трансляций.

Описанный ниже формализм позволяет рассмотреть произвольные движения заряженной частицы, например периодические, или движение частицы во внешнем поле. Представляется естественным в дальнейшем развить предложенные здесь идеи для реальных четырехмерных систем взаимодействующих полей, инвариантных относительно преобразований группы Пуанкаре, и тем самым дать таким системам полностью релятивистски-инвариантное описание с точным учетом законов сохранения в любом порядке теории возмущений.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРУППОВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ БОГОЛЮБОВА

Для простоты рассмотрим систему $1+1$ измерений, содержащую заряженное и нейтральное скалярные поля. Этим полям сопоставляются операторы Ψ , Ψ^* и нейтральное поле ϕ .

Взаимодействие полей порождает классическую составляющую нейтрального поля. Определим преобразование Боголюбова для какой-то переменной $\xi(x)$ следующим образом:

$$\xi(x) = gv(x') + u(x'), \quad (1)$$

где штрихованные переменные связаны с нештрихованными:

$$x'^a = x^a - \tau^a, \quad a = 0, 1.$$

Безразмерный параметр $g \gg 1$, следовательно, это преобразование, связанное с переходом к новым переменным

$$\xi(x) \rightarrow (u(x'), \tau^a),$$

выделяет также классическую компоненту $v(x')$ (здесь $v(x')$ – некоторые заданные функции, которые будут описаны ниже).

Поскольку переменные τ^a рассматриваются как независимые, теперь в правой части выражения (1) на две переменные больше, чем в левой, и следует уравнивать число переменных. Для этого подчиним функцию $u(x)$ двум дополнительным условиям

$$w(N^a, u) = \int (N_n^a(x')u(x') - N^a(x')u_n(x')) d\lambda = 0. \quad (2)$$

Символ f_n означает нормальную производную функции f вдоль контура интегрирования C , который для простоты будет определен как прямая с нормалью $n^2 = 1$. Ортогональный к n вектор $e^2 = -1$ определяет уравнение прямой

$$x^a = e^a \lambda.$$

С помощью подстановки в (2) функции $\xi(x)$ в виде (1) можно получить функциональную зависимость τ^a от ξ , ξ_n в дифференциальной форме

$$\frac{\delta \tau^c}{\delta \xi(x)} = -\frac{1}{g} Q_b^c N_n^b(x'), \quad \frac{\delta \tau^c}{\delta \xi_n(x)} = \frac{1}{g} Q_b^c N^b(x'),$$

где

$$Q_b^a = \delta_b^a - \frac{1}{g} R_c^a Q_b^c, \quad R_a^c = -w(N_a^c, u).$$

Здесь и далее $w(N^a, v_b) = \delta_b^a$, чего всегда можно достичь при определенном выборе N^a . Варьируя, в свою очередь, $\xi(x)$ и $\xi_n(x)$, имеем

$$\frac{\delta}{\delta \xi(x)} = \frac{\delta}{\delta u(x')} + \frac{\delta \tau^a}{\delta \xi(x)} \left(S_a + \frac{\partial}{\partial \tau^a} \right), \quad \frac{\delta}{\delta \xi_n(x)} = \frac{\delta}{\delta u_n(x')} + \frac{\delta \tau^a}{\delta \xi_n(x)} \left(S_a + \frac{\partial}{\partial \tau^a} \right),$$

где

$$S_a = \int \left(u_a(x') \frac{\delta}{\delta u(x')} + u_{an}(x') \frac{\delta}{\delta u_n(x')} \right) d\lambda.$$

Здесь использовано равенство

$$\int \left(v_a(x') \frac{\delta}{\delta u(x')} + v_{an}(x') \frac{\delta}{\delta u_n(x')} \right) d\lambda = 0, \quad (3)$$

являющееся непосредственным следствием дополнительных условий (2) и соотношений $w(N^a, v_b) = \delta_b^a$.

Введем операторы

$$\hat{q}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi(x) + i \frac{\delta}{\delta \xi_n(x)} \right), \quad \hat{p}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi_n(x) - i \frac{\delta}{\delta \xi(x)} \right). \quad (4)$$

Они самосопряжены и удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[\hat{q}(x'), \hat{p}(x'')] = i\delta(x' - x''),$$

что позволяет трактовать их как операторы координаты и импульса осцилляторов поля.

Однако существует еще одна пара самосопряженных операторов, удовлетворяющих тем же коммутационным соотношениям, поэтому число возможных состояний поля оказывается удвоенным. Редукция числа состояний поля может быть осуществлена с помощью, например, голоморфного представления, эта процедура подробно описана в работах [11].

В новых переменных операторы $\hat{q}(x)$ и $\hat{p}(x)$ принимают вид

$$\hat{q}(x) = gF(x') + Q(x') + \frac{1}{g}A(x'), \quad \hat{p}(x) = gF_n(x') + P(x') + \frac{1}{g}A_n(x'),$$

где

$$\begin{aligned} F(x') &= \frac{1}{\sqrt{2}}(v(x') + N^b(x')\Phi_b), & A(x') &= \frac{1}{\sqrt{2}}N^b(x')Q_b^c T_c, \\ Q(x') &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(u(x') + i\frac{\delta}{\delta u_n(x')} - N^b(x')r_b\right), \\ P(x') &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(u_n(x') - i\frac{\delta}{\delta u(x')} - N_n^b(x')r_b\right), \\ T_\gamma &= K_\gamma + R_\gamma^a r_a, & r_a &= R_a^c \Phi_c, & K_a &= iS_a + i\frac{\partial}{\partial \tau^a}. \end{aligned}$$

Операторы $\partial/\partial \tau^a$ будут входить в интегралы движения только в порядке $1/g$. Для того чтобы учесть все эффекты взаимодействия в более ранних порядках, совершим каноническое преобразование

$$i\frac{\partial}{\partial \tau^a} \longrightarrow g^2 \Phi_a + i\frac{\partial}{\partial \tau^a}.$$

После этого функция K_a переходит в $K_a + g^2 \Phi_a$.

3. СХЕМА РЕГУЛЯРНОЙ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Пусть динамика системы определяется лагранжианом (аргументы функций опускаем)

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \int (\phi_n^2 - \phi_\lambda^2 - \mu^2 \phi^2) d\lambda + \\ &+ g^2 \int (\Psi_n^* \Psi_n - \Psi_\lambda^* \Psi_\lambda - m^2 \Psi^* \Psi) d\lambda - g \int \Psi^* \Psi \phi d\lambda. \end{aligned} \quad (5)$$

Инвариантность действия относительно трансляций порождает два интеграла движения – энергию и импульс. Теперь можно провести процедуру квантования, заменяя

$$\phi \longrightarrow \hat{q}, \quad \phi_n \longrightarrow \hat{p}, \quad \phi_\lambda \longrightarrow \hat{q}_\lambda.$$

Для интегралов движения получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} E = H &= \frac{1}{2} \int (\hat{p}^2 + \hat{q}_\lambda^2 + \mu^2 \hat{q}^2) d\lambda + \\ &+ g^2 \int (\Psi_n^* \Psi_n + \Psi_\lambda^* \Psi_\lambda + m^2 \Psi^* \Psi) d\lambda + g \int \Psi^* \Psi \hat{q} d\lambda, \\ P &= \int \hat{p} \hat{q}_\lambda d\lambda + g^2 \int \Psi_n^* \Psi_\lambda d\lambda + g^2 \int \Psi_n \Psi_\lambda^* d\lambda. \end{aligned}$$

Воспользовавшись выражениями для $\hat{p}$, $\hat{q}$, получим разложения интегралов движения в ряды по обратным степеням константы связи g :

$$O = g^2 O_{-2} + g O_{-1} + O_0 + \dots$$

Заметим, что операторы O_{-2} не зависят от операторов нейтрального поля.

В дальнейшем будем рассматривать лишь одночастичные состояния заряженного поля

$$\begin{aligned} |1\rangle &= \int \Psi^*(x) f(x) dx |0\rangle, \quad \langle 1| = \langle 0| \int \Psi(x) f^*(x) dx, \\ [\Psi(x), \Psi^*(x')] &= -iD(x - x'). \end{aligned}$$

Если вектор состояния системы в первом приближении взять в виде $\Psi = \Psi_{\text{ch}} \otimes \Psi_n$, средние гамильтониана $\langle H_{-1} \rangle$ и импульса $\langle P_{-1} \rangle$ заряженного поля Ψ_{ch} сведутся к линейным формам по операторам нейтрального поля. Поскольку не существует нормируемых собственных векторов операторов O_{-1} , регулярная теория возмущений может быть реализована лишь в том случае, если эти операторы равны нулю.

Если выполняется граничное условие $F_\lambda Q|_{\partial c} = 0$, то

$$H_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \left(F_n \left(u_n - i \frac{\delta}{\delta u} - r_b N_n^b \right) + B \left(u + i \frac{\delta}{\delta u_n} - r_b N^b \right) \right) d\lambda,$$

где $B = -F_{\lambda\lambda} + \mu^2 F + \langle \hat{\Psi}^* \hat{\Psi} \rangle = -F_{\lambda\lambda}(x') + \mu^2 F(x') + V(x')$.

Если предположить, что выполняются равенства

$$F_n = c^a v_a, \quad B = -c^a v_{an}, \quad (6)$$

то гамильтониан в первом порядке будет пропорционален форме (3) и условие применимости схемы теории возмущений будет выполнено. Следствием равенств (6) является уравнение, которому должна удовлетворять классическая компонента нейтрального скалярного поля

$$F_{nn} - F_{\lambda\lambda} + \mu^2 F + V = 0.$$

В дальнейшем функцию $F(x')$ будем считать решением уравнения

$$F_{tt}(x') - F_{xx}(x') + \mu^2 F(x') + V(x') = 0 \quad (7)$$

с заданными граничными условиями на C (решение задачи Коши), здесь

$$V(x) = - \iint f^*(x_1) D(x_1 - x) D(x - x_2) f(x_2) dx_1 dx_2.$$

Легко показать, что $H_{-1} = 0$, если $v_a = N_a^c \Phi_c$, т.е. $F = cN^c \Phi_c$. Поскольку

$$F = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + N^c \Phi_c) = \sqrt{2} v,$$

сразу получаем, что $c = \sqrt{2}$.

Аналогично можно показать, что $P_{-1} = 0$, если выполняются граничные условия $F_\lambda Q|_{\partial c} = 0$.

Уравнение для функции $f(x)$, характеризующей одночастичное состояние заряженного скалярного поля, можно получить следующим образом. Оператор $\Psi(x)$ удовлетворяет уравнению (следствие вариационного принципа)

$$\Psi_{tt} - \Psi_{xx} + m^2 \Psi + v \Psi = 0.$$

Тогда $\Psi(x)$ может быть представлен в виде

$$\Psi(x) = \Psi_0(x) + \int D_c(x - y) v(y) \Psi(y) dy, \quad (8)$$

где $\Psi_0(x)$ — какое-то решение однородного уравнения.

Одночастичное состояние можно представить в виде

$$|1\rangle = \int f(x) \Psi^*(x) |0\rangle dx.$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \langle 0 | \Psi(x) | 1 \rangle &= \int \langle 0 | \Psi(x) f(y) \Psi^*(y) | 0 \rangle dy = \bar{f}(x), \\ f(x) &= (\square + m^2) \bar{f}(x). \end{aligned}$$

Из выражения (8) получим

$$\bar{f}(x) = \langle 0 | \Psi_0(x) | 1 \rangle + \int D_c(x - y) v(y) \bar{f}(y) dy,$$

т.е. $\bar{f}(x)$ удовлетворяет уравнению

$$(\square + m^2) \bar{f}(x) + v(x) \bar{f}(x) = 0.$$

В нерелятивистском пределе $\bar{f}(x)$ может быть представлена в виде

$$\bar{f}(x) = e^{-imt} \bar{\xi}(x, t),$$

причем можно считать, что $\bar{\xi}(x, t)$ медленно меняется со временем, т.е. $\bar{\xi}_{tt}(x, t) = 0$. Для $\bar{\xi}(x, t)$ получим уравнение

$$i \frac{\partial \bar{\xi}(x, t)}{\partial t} + \frac{1}{2m} \nabla_r^2 \bar{\xi}(x, t) - \frac{1}{2m} v(x) \bar{\xi}(x, t) = 0.$$

Аналогично получается уравнение для $f^*(x)$.

4. ПОСТРОЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ СИСТЕМЫ

Динамические свойства нейтрального поля в нулевом порядке по обратным степеням константы связи g определяются операторами H_0 и P_0 . Можно показать, что после построения пространства состояний системы эти операторы сведутся к производным по генераторам группы симметрии системы.

Если $AF_\lambda|_{\partial c} = 0$, где

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} N^b T_b,$$

то

$$\begin{aligned} H_0 = & in^a \frac{\partial}{\partial \tau^a} + \frac{1}{2} \int (P^2 + Q_\lambda^2 + \mu^2 Q^2) d\lambda + \\ & + i \int \left(u_n \frac{\delta}{\delta u} + u_{nn} \frac{\delta}{\delta u_n} \right) d\lambda + \int (N_n^c u_n - N_{nn}^c u) d\lambda r_c. \end{aligned} \quad (9)$$

Если определить операторы координаты и импульса осцилляторов поля формулой (4), то, как отмечалось выше, число возможных состояний нейтрального скалярного поля окажется удвоенным по сравнению с реальной ситуацией. Поэтому необходимо произвести редукцию числа состояний.

Сначала проанализируем число бесконечных независимых переменных. После введения переменных Боголюбова, которые также являются независимыми, это число стало равным $\infty + 2$. С введением операторов рождения-уничтожения число состояний поля удваивается: $2(\infty + 2) = 2\infty + 4$. Дополнительные условия уменьшают число независимых переменных на 2, т.е. число возможных состояний поля есть $2\infty + 2$. Выделим из переменных $u(x')$, описывающих поле, две переменные r_a , которые не имеют физического смысла и связаны со способом реализации схемы теории возмущений, тогда число состояний будет равно 2∞ , и поле будет описываться переменными $w(x')$, которые определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} u &= w + N^a r_a, & u_n &= w_n + N_n^a r_a, \\ \frac{\delta}{\delta u} &= \frac{\delta}{\delta w} + \frac{\delta r_a}{\delta u} \frac{\partial}{\partial r_a}, & \frac{\delta}{\delta u_n} &= \frac{\delta}{\delta w_n} + \frac{\delta r_a}{\delta u_n} \frac{\partial}{\partial r_a}. \end{aligned}$$

В этом случае операторы Q и P принимают вид

$$Q = \hat{Q} + q, \quad P = \hat{P} + p,$$

где

$$\begin{aligned} \hat{Q} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(w + i \frac{\delta}{\delta w_n} \right), & \hat{P} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(w_n - i \frac{\delta}{\delta w} \right), \\ q &= \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{\delta r_a}{\delta u_n} \frac{\partial}{\partial r_a}, & p &= -\frac{i}{\sqrt{2}} \frac{\delta r_a}{\delta u} \frac{\partial}{\partial r_a}. \end{aligned}$$

На переменных w и w_n можно провести редукцию числа состояний следующим образом. Пусть состояния поля описываются функционалами, на которых $\delta/\delta w$ и $\delta/\delta w_n$ сводятся к операторам

$$\frac{\delta}{\delta w} \rightarrow \frac{\delta}{\delta w} - iw_n, \quad \frac{\delta}{\delta w_n} \rightarrow -iw.$$

Тогда

$$\widehat{Q} \rightarrow \sqrt{2} w, \quad \widehat{P} \rightarrow -i \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\delta}{\delta w};$$

и если

$$\frac{\delta r_a}{\delta u_n} w_\lambda |_{\partial c} = 0,$$

то после редукции числа состояний гамильтониан H_0 в нулевом порядке по константе связи будет зависеть только от избыточных переменных r_a и производных по генераторам группы трансляций, т.е. можно записать, что

$$H_0 = in^a \frac{\partial}{\partial \tau^a} + \frac{1}{2} \int (p^2 + q_\lambda^2 + \mu^2 q^2) d\lambda + \\ + i \int \left(N_n^a \frac{\delta r_b}{\delta u} + N_{nn}^a \frac{\delta r_b}{\delta u_n} \right) d\lambda r_a \frac{\partial}{\partial r_b} + \int (N_n^c N_n^a - N_{nn}^c N^a) d\lambda r_a r_c. \quad (10)$$

Аналогично, если

$$AF_n |_{\partial c} = 0, \quad \widehat{Q}p |_{\partial c} = 0, \quad w \frac{\delta r_a}{\delta u} \Big|_{\partial c} = 0, \quad w_n \frac{\delta r_a}{\delta u_n} \Big|_{\partial c} = 0, \quad ww_n |_{\partial c} = 0,$$

то импульс после редукции числа состояний тоже оказывается функцией нефизических переменных и параметров преобразований трансляций:

$$P_0 = ie^a \frac{\partial}{\partial \tau^a} + \int q_\lambda p d\lambda + i \int \left(N_\lambda^a \frac{\delta r_b}{\delta u} + N_{\lambda n}^a \frac{\delta r_b}{\delta u_n} \right) d\lambda r_a \frac{\partial}{\partial r_b} + \\ + \int (N_n^a N_\lambda^c - N^a N_{\lambda n}^c) d\lambda r_a r_c. \quad (11)$$

Итак, в операторы H_0 и P_0 входят слагаемые, зависящие от нефизических переменных. Эти переменные могут быть удалены из динамической схемы выбором вектора состояния, на котором коммутаторы интегралов движения обращаются в нуль.

Если потребовать выполнения условий $F_\lambda^2 |_{\partial c} = 0$, $F_\lambda F |_{\partial c} = 0$, $\int V F_{\lambda\lambda} d\lambda = 0$ и $\int V F d\lambda = 0$, то выражения для H_0 и P_0 принимают вид

$$H_0 = in^a \frac{\partial}{\partial \tau^a} + h_0, \quad P_0 = ie^a \frac{\partial}{\partial \tau^a} + p_0,$$

где операторы h_0 и p_0 представляют собой квадратичные формы по координатам r_a и канонически-сопряженным импульсам. На векторе состояния вида

$$\Phi(\xi, \eta) = C \exp(\hat{a}(\xi^2 - \eta^2)),$$

где ξ и η – линейные комбинации r_a , коммутатор операторов h_0 и p_0 равен нулю, и эти величины можно удалить из динамической схемы. Тогда

$$H_0 = i n^a \frac{\partial}{\partial \tau^a} = i \frac{\partial}{\partial \tau^1}.$$

Поэтому

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = [\Psi, H], \quad i \frac{\partial}{\partial t} \Psi = -i \frac{\partial}{\partial \tau^1} \Psi, \quad \text{т.е.} \quad \Psi(t) = \Psi(t - \tau^1).$$

Записав аналогичное соотношение для импульса, имеем

$$\Psi(x) = \Psi(x - \tau^2).$$

Таким образом, законы сохранения энергии и импульса оказываются выполненными.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе получено нестационарное уравнение, описывающее движение полярона, что стало возможным после определения групповых переменных Боголюбова. Для этого была решена более общая задача выделения классической составляющей во вторично квантованной системе.

В работе осуществлено явное построение пространства состояний вторично квантованного нейтрального поля в окрестности классической составляющей. Операторы интегралов движения квантованного нейтрального поля свелись к производным по групповым переменным, которые являются циклическими.

Предложенная процедура позволила с точностью до нулевого порядка по параметру g явно учесть законы сохранения системы.

Переход к высшим порядкам теории возмущений потребует уточнения определения групповых переменных и дополнительных условий, однако это потребует лишь чисто технических усилий, поскольку принципиально задача точного учета законов сохранения решается именно в рассмотренных порядках.

Список литературы

- [1] Н. Н. Боголюбов. УМЖ. 1950. Т. 2. С. 3–24.
- [2] Е. П. Солодовникова, А. Н. Тавхелидзе, О. А. Хрусталева. ТМФ. 1972. Т. 10. С. 162–181; Т. 11. С. 317–330; Т. 12. С. 164–178.
- [3] О. Д. Тимофеевская. ТМФ. 1983. Т. 54. С. 464–468.
- [4] N. H. Christ, T. D. Lee. Phys. Rev. D. 1975. V. 12. P. 1606–1627.
- [5] E. Tomboulis. Phys. Rev. D. 1975. V. 12. P. 1678–1683.
- [6] M. Greutz. Phys. Rev. D. 1975. V. 12. P. 3126–3144.
- [7] А. В. Шургая. ТМФ. 1976. Т. 28. С. 223–231.
- [8] К. А. Свешников. ТМФ. 1983. Т. 55. С. 361–384; 1988. V. 74. P. 373–391.
- [9] К. А. Свешников, П. К. Силаев, О. А. Хрусталева. ТМФ. 1989. Т. 80. С. 173–191.
- [10] О. А. Khrustalev, A. V. Razumov, A. Yu. Taranov. Nucl. Phys. B. 1980. V. 172. P. 44–58.
- [11] О. А. Хрусталева, М. В. Чичикина. ТМФ. 1997. Т. 111. С. 242–251; С. 413–422.

Поступила в редакцию 2.II.1999 г.,
после доработки 28.VI.1999 г.