Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Д. Бакеев, Упрощенная версия регуляризации в рамках метода высших ко-
вариантных производных, *ТМФ*, 2000, том 122, номер 3, 426–434

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf577>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 14:54:04

© 2000 г.

Т. Д. Бакеев*

УПРОЩЕННАЯ ВЕРСИЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ В РАМКАХ МЕТОДА ВЫСШИХ КОВАРИАНТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Построена упрощенная версия регуляризации в рамках метода высших ковариантных производных для теории Янга–Миллса. Данное построение может стимулировать использование этого метода при проведении практических вычислений.

1. ВВЕДЕНИЕ

Построение инвариантных регуляризаций для калибровочных теорий очень важно как для проведения практических вычислений, так и для исследования непертурбативных явлений. До сих пор при проведении вычислений наиболее часто использовалась размерная регуляризация [1]. Однако данная регуляризация не имеет очевидного обобщения на непертурбативные подходы, а также не применима к киральным и суперсимметричным моделям. Решеточная формулировка [2] сохраняет калибровочную инвариантность и имеет непертурбативный смысл, однако в ней также возникают серьезные проблемы при рассмотрении киральных, топологических и суперсимметричных теорий.

Альтернативной непертурбативной регуляризационной схеме для калибровочных теорий отвечают введение в лагранжиан членов с высшими ковариантными производными [3, 4] и последующее добавление инвариантных регуляризаторов Паули–Вилларса [5]. Преимущество этой регуляризации состоит в возможности применения к киральным и суперсимметричным моделям. В статье [6] в рамках данного метода высших ковариантных производных (МВКП) был построен однозначно определенный регуляризованный функционал, свободный от недостатков, присутствовавших в оригинальной конструкции и обсуждавшихся в работах [7–9].

В этой статье получено более удобное и компактное выражение для регуляризованного лагранжиана, которое предполагает гораздо менее сложные и экономичные вычисления, чем в формулировке работы [6]. Полученный результат может способствовать большей привлекательности МВКП в качестве инструмента для проведения практических вычислений в моделях, где не применима размерная регуляризация.

*Московский государственный университет, Москва, Россия

2. ПОСТРОЕНИЕ РЕГУЛЯРИЗОВАННОГО ФУНКЦИОНАЛА

Одним из способов регуляризации теории является модификация пропагаторов путем введения в лагранжиан членов с высшими производными. Однако эта процедура нарушает калибровочную инвариантность. Для сохранения симметрии можно добавить в лагранжиан Янга–Миллса члены с высшими ковариантными производными [3, 4].

Мы выбираем промежуточный регуляризованный лагранжиан, предложенный в работе [6] (мотивацией данного выбора является необходимость устранения перекрывающихся расходимостей, см. обсуждение в [6]):

$$\mathcal{L}_{\text{YM}}(x) \rightarrow \mathcal{L}^\Lambda(x) = \mathcal{L}_{\text{YM}}(x) + \frac{1}{4\Lambda^{10}} \left[\frac{\delta S_0}{\delta \mathcal{A}_\rho^a(x)} \right]^2, \quad (1)$$

где

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = \frac{1}{8} \text{tr} \mathcal{F}_{\mu\nu}^2, \quad S_0 = \int (\nabla^2 \mathcal{F}_{\mu\nu}^a)^2 dx. \quad (2)$$

Здесь $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ – стандартный тензор кривизны, а ∇ – ковариантная производная:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}^a = \partial_\nu \mathcal{A}_\mu^a - \partial_\mu \mathcal{A}_\nu^a + t^{abc} \mathcal{A}_\mu^b \mathcal{A}_\nu^c, \quad (3)$$

$$\nabla_\mu^{ab} = \partial_\mu \delta^{ab} + t^{abc} \mathcal{A}_\mu^c. \quad (4)$$

Тогда производящий функционал в калибровке Лоренца может быть записан следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[J] = \int \exp \left\{ i \int [\mathcal{L}_{\text{YM}}(x) + J_\mu^a(x) \mathcal{A}_\mu^a(x)] dx + \right. \\ \left. + \frac{i}{4\Lambda^{10}} \int \left[\frac{\delta S_0}{\delta \mathcal{A}_\rho^a(x)} \right]^2 dx \right\} \delta(\partial_\mu \mathcal{A}_\mu) \det \mathcal{M}(\mathcal{A}) \prod_x D\mathcal{A}_\mu, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\mathcal{M}^{ab} = \partial_\mu \nabla_\mu^{ab}$. Удобно преобразовать этот функционал к другой форме. Вначале в соответствии с работой [6] мы введем интегрирование по дополнительным полям h_ρ :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[J] = \int \exp \left\{ i \int \left[\mathcal{L}_{\text{YM}}(x) + J_\mu^a(x) \mathcal{A}_\mu^a(x) - \frac{1}{2} (h_\rho^a(x))^2 \right] dx + \right. \\ \left. + \frac{i}{2\Lambda^5} \int h_\rho^a(x) \frac{\delta S_0}{\delta \mathcal{A}_\rho^a(x)} dx \right\} \delta(\partial_\mu \mathcal{A}_\mu) \det \mathcal{M}(\mathcal{A}) \prod_x Dh_\rho D\mathcal{A}_\mu. \end{aligned} \quad (6)$$

Для разделения интегрирования по ковариантно продольной и поперечной частям поля h_ρ домножим функционал (6) на “единицу”:

$$\det \nabla^2 \int \prod_x \delta(\nabla_\mu (h_\mu + \nabla_\mu u)) Du(x) = 1, \quad (7)$$

и проведем замену переменных:

$$h_\mu \rightarrow h_\mu - \nabla_\mu u. \quad (8)$$

При этом получим

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[J] = & \int \exp \left\{ i \int \left[\mathcal{L}_{\text{YM}}(x) + J_\mu^a(x) \mathcal{A}_\mu^a(x) - \frac{1}{2} (h_\rho^a - \nabla_\rho u^a)_x^2 \right] dx + \right. \\ & \left. + \frac{i}{2\Lambda^5} \int (h_\rho^a - \nabla_\rho u^a)_x \frac{\delta S_0}{\delta \mathcal{A}_\rho^a(x)} dx \right\} \times \\ & \times \delta(\partial_\mu \mathcal{A}_\mu) \delta(\nabla_\mu h_\mu) \det \mathcal{M}(\mathcal{A}) \det \nabla^2 \prod_x Du Dh_\rho D\mathcal{A}_\mu. \end{aligned} \quad (9)$$

Благодаря калибровочной инвариантности действия S_0 выполняется равенство

$$\int \nabla_\rho u^a(x) \frac{\delta S_0}{\delta \mathcal{A}_\rho^a(x)} dx = 0. \quad (10)$$

Поэтому только ковариантно поперечная часть поля h_ρ дает нетривиальный вклад в уравнение (6). На поверхности $\nabla_\mu h_\mu = 0$ мы также имеем

$$\int h_\rho^a(x) \nabla_\rho u^a(x) dx = 0. \quad (11)$$

Используя уравнения (10) и (11), мы можем отбросить левые части этих уравнений в экспоненте выражения (9). Интегрируя после этого по $u(x)$, получим

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[J] = & \int \exp \left\{ i \int \left[\mathcal{L}_{\text{YM}}(x) + J_\mu^a(x) \mathcal{A}_\mu^a(x) - \frac{1}{2} (h_\rho^a(x))^2 + \frac{1}{2\Lambda^5} \int h_\rho^a(x) \frac{\delta S_0}{\delta \mathcal{A}_\rho^a(x)} \right] dx \right\} \times \\ & \times \delta(\nabla_\mu h_\mu) \delta(\partial_\rho \mathcal{A}_\rho) \det \mathcal{M}(\mathcal{A}) \det^{\frac{1}{2}} \nabla^2 \prod_x Dh_\mu D\mathcal{A}_\rho. \end{aligned} \quad (12)$$

Свободные пропагаторы, порождаемые экспонентой выражения (12), имеют следующую ультрафиолетовую асимптотику: $\widehat{\mathcal{A}_\mu \mathcal{A}_\nu} \sim k^{-12}$, $\widehat{h_\rho h_\sigma} \sim k^{-10}$, $\widehat{\mathcal{A}_\mu h_\rho} \sim k^{-6}$. Легко показать, что индекс расходимости произвольной диаграммы, порождаемой функционалом (12), может быть представлен в виде

$$\omega_1 = 4 - 4(I - 1) - 4N_{\mathcal{A}} - 6L_{\mathcal{A}} - 4L_h - E_{\mathcal{A}} - E_h - 3E_{gh} - \frac{7}{2}E_\delta, \quad (13)$$

где I — число петель, $L_{\mathcal{A}}$, L_h — число внутренних и $E_{\mathcal{A}}$, E_h — число внешних линий поперечных компонент полей $\mathcal{A}$ и h , соответственно, $N_{\mathcal{A}}$ — число вершин, порожденных $\mathcal{L}_{\text{YM}}$, E_{gh} — число внешних линий полей, представляющих $\det \mathcal{M}(\mathcal{A})$ и $\det^{\frac{1}{2}} \nabla^2$, $E_\delta = E_h^{\text{long}} + E_\lambda$ — число внешних линий, соответствующих продольной части поля h и вспомогательному полю λ , возникающему при представлении дельта-функции

$$\delta(\nabla_\mu h_\mu) = \int \exp \left\{ \int \lambda \nabla_\mu h_\mu dx \right\} \prod_x D\lambda \quad (14)$$

(E_{gh} и E_δ являются четными числами). Можно видеть, что если $E_h > 0$, то диаграмма сходится, т. к. она содержит хотя бы одну внутреннюю линию поля $\mathcal{A}$. Расходящимися являются только однопетлевые графы, для которых выполняются условия $L_{\mathcal{A}} = L_h =$

$N_{\mathcal{A}} = 0$, $E_h = E_{gh} = E_{\delta} = 0$ и $E_{\mathcal{A}} = 2, 3, 4$. Следовательно, сумма всех однопетлевых расходящихся диаграмм с внешними линиями калибровочных полей $\mathcal{A}_{\mu}$, порожденных функционалом (12), представима в виде

$$Z_{\text{div}}[\mathcal{A}] = \int \exp \left\{ \frac{i}{2\Lambda^5} \iint h_{\rho}^a(x) \frac{\delta^2 S_0}{\delta \mathcal{A}_{\rho}^a(x) \delta \mathcal{A}_{\mu}^b(y)} q_{\mu}^b(y) dx dy + \dots \right\} \delta(\nabla_{\mu} h_{\mu}) \delta(\partial_{\rho} q_{\rho}) \times \\ \times \prod_x D h_{\mu} D q_{\mu} \det \mathcal{M}(\mathcal{A}) \det^{\frac{1}{2}} \nabla^2. \quad (15)$$

В формуле (15) многоточие символизирует члены, которые обеспечивают инфракрасную сходимость интеграла (15) и не влияют на его ультрафиолетовое поведение.

Итак, процедура введения членов с высшими ковариантными производными делает сходящимися все многопетлевые диаграммы. Однако для регуляризации однопетлевых диаграмм требуются дополнительные построения.

В работе [5] (см. также [10]) было предложено для осуществления необходимой регуляризации использовать видоизмененную процедуру Паули–Вилларса (ПВ).

В данной статье вводится взаимодействие ПВ, удовлетворяющее следующим четырем условиям:

- а) функционал ПВ инвариантен при калибровочных преобразованиях полей $\mathcal{A}_{\mu}$;
- б) регуляризация полностью снимается в пределе, когда массы полей ПВ стремятся к бесконечности;
- в) регуляризующие члены в точности компенсируют оставшиеся однопетлевые расходимости функционала (12), и сокращение расходящихся вкладов происходит для индивидуальных диаграмм (т.е. расходящиеся диаграммы функционала (15) и взаимодействия ПВ имеют одинаковую структуру и не нужно никакой дополнительной регуляризации);
- г) при интегрировании регуляризующих членов по полям $\mathcal{A}_{\mu}$ не возникает дополнительных расходящихся подграфов в многопетлевых диаграммах (данное требование известно как проблема перекрывающихся расходимостей, см., например, [10, 11]).

Функционал ПВ с внешними линиями полей $\mathcal{A}$, удовлетворяющий вышеперечисленным требованиям, существует и выглядит следующим образом:

$$I_{\text{PV}}(\mathcal{A}) = \int \exp \left\{ \frac{i}{2\Lambda^5} \iint \bar{B}_{\rho}^a(x) \frac{\delta^2 S_0}{\delta \mathcal{A}_{\rho}^a(x) \delta \mathcal{A}_{\mu}^b(y)} (B_{\mu} - \nabla_{\mu} \nabla^{-2} \nabla_{\nu} B_{\nu})_y^b dx dy + \right. \\ \left. + iM \int \bar{B}_{\mu}^a(x) B_{\mu}^a(x) dx \right\} \delta(\nabla_{\mu} \bar{B}_{\mu}) \delta(\partial_{\rho} B_{\rho}) \times \\ \times \prod_x D \bar{B}_{\mu} D B_{\rho} \det^{-1} \mathcal{M}(\mathcal{A}) \prod_j \det^{\frac{c_j}{2}} (\nabla^2 - M_j^2). \quad (16)$$

Здесь $\bar{B}_{\mu}$, B_{μ} – антикоммутирующие поля и выполнены условия ПВ

$$\sum_j c_j = -1, \quad \sum_j c_j M_j^2 = 0. \quad (17)$$

Убедимся теперь, что функционал (16) удовлетворяет условиям “а”–“г”.

Проверка условия “а”. Для демонстрации калибровочной инвариантности функционала (16) проведем замену переменных:

$$B_\mu = B_\mu^{\text{tr}} + \nabla_\mu \psi, \quad (18)$$

где

$$B_\mu^{\text{tr}} = B_\mu - \nabla_\mu \nabla^{-2} \nabla_\nu B_\nu, \quad \psi = \nabla^{-2} \nabla_\nu B_\nu, \quad \nabla_\mu B_\mu^{\text{tr}} = 0 \quad (19)$$

и B_μ^{tr} , ψ – антикоммутирующие поля. Якобиан преобразований (18) равен $\det^{-\frac{1}{2}} \nabla^2$ (знак “минус” в степени детерминанта обусловлен грассмановой природой подвергаемых замене переменных). Тогда функционал (16) приобретет вид

$$\begin{aligned} I_{\text{PV}}(\mathcal{A}) = & \int \exp \left\{ \frac{i}{2\Lambda^5} \iint \bar{B}_\rho^a(x) \frac{\delta^2 S_0}{\delta \mathcal{A}_\rho^a(x) \delta \mathcal{A}_\mu^b(y)} (B_\mu^{\text{tr}})_y^b dx dy + \right. \\ & + iM \int \bar{B}_\mu^a(x) (B_\mu^{\text{tr}} + \nabla_\mu \psi)_x^a dx \left. \right\} \times \\ & \times \delta(\nabla_\mu \bar{B}_\mu) \delta(\partial_\rho B_\rho^{\text{tr}} + \mathcal{M}\psi) \prod_x D\bar{B}_\mu D B_\mu^{\text{tr}} D\psi \times \\ & \times \det^{-1} \mathcal{M}(\mathcal{A}) \det^{-\frac{1}{2}} \nabla^2 \prod_j \det^{\frac{c_j}{2}} (\nabla^2 - M_j^2). \end{aligned} \quad (20)$$

Очевидно, что единственный зависящий от ψ член в экспоненте выражения (20) равен нулю на поверхности $\nabla_\mu \bar{B}_\mu = 0$:

$$\int \bar{B}_\mu^a(x) \nabla_\mu \psi^a(x) dx = 0. \quad (21)$$

Это позволяет нам переписать функционал (20) в виде

$$I_{\text{PV}}(\mathcal{A}) = \int I_1(\mathcal{A}, B^{\text{tr}}) I_2(\mathcal{A}, B^{\text{tr}}) \prod_x D B^{\text{tr}}, \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} I_1(\mathcal{A}, B^{\text{tr}}) = & \int \exp \left\{ \frac{i}{2\Lambda^5} \iint \bar{B}_\rho^a(x) \frac{\delta^2 S_0}{\delta \mathcal{A}_\rho^a(x) \delta \mathcal{A}_\mu^b(y)} (B_\mu^{\text{tr}})_y^b dx dy + \right. \\ & + iM \int \bar{B}_\mu^a(x) (B_\mu^{\text{tr}})_x^a dx \left. \right\} \delta(\nabla_\mu \bar{B}_\mu) \times \\ & \times \prod_x D\bar{B}_\mu \det^{-\frac{1}{2}} \nabla^2 \prod_j \det^{\frac{c_j}{2}} (\nabla^2 - M_j^2) \end{aligned} \quad (23)$$

и

$$I_2(\mathcal{A}, B^{\text{tr}}) = \det^{-1} \mathcal{M}(\mathcal{A}) \int \delta(\partial_\rho B_\rho^{\text{tr}} + \mathcal{M}\psi) \prod_x D\psi. \quad (24)$$

Функционал $I_1(\mathcal{A}, B^{\text{tr}})$ инвариантен при одновременных преобразованиях:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\mu & \rightarrow \mathcal{A}_\mu + [\mathcal{A}_\mu, \epsilon] + \partial_\mu \epsilon, \\ \bar{B}_\mu & \rightarrow \bar{B}_\mu + [\bar{B}_\mu, \epsilon], \\ B_\mu^{\text{tr}} & \rightarrow B_\mu^{\text{tr}} + [B_\mu^{\text{tr}}, \epsilon]. \end{aligned} \quad (25)$$

Функционал $I_2(\mathcal{A}, B^{\text{tr}})$ тоже калибровочно-инвариантен, т. к. после интегрирования по полям ψ он равен несущественной константе и в действительности не зависит от $\mathcal{A}$ и B^{tr} (напомним, что ψ – грассманово поле и интегрирование по ψ в (24) порождает $\det \mathcal{M}(\mathcal{A})$). Эти выкладки доказывают калибровочную инвариантность функционала (16).

Демонстрация калибровочной инвариантности взаимодействия ПВ (16) является самым существенным моментом в этой статье. Она позволяет избежать довольно сложной двухступенчатой процедуры регуляризации, использованной в [6], и намного упростить окончательное выражение для регуляризованного лагранжиана.

Проверка условия “б”. Необходимым условием любой регуляризации является следующее требование: все выражения, которые в данном порядке теории возмущений были конечными в исходной теории (до наложения регуляризации), должны сохранить свои точные конечные значения после устранения регуляризации (см. [12]). В частности, регуляризованный производящий функционал должен сходиться к исходному функционалу на формальном уровне. Продemonстрируем, что в пределе $M \rightarrow \infty$, $M_j \rightarrow \infty$ вклад полей ПВ функционала (16) полностью устраняется и сводится к перенормировке локальных контрчленов. Действительно, ренормируя поля в выражении (16):

$$\bar{B}_\mu \rightarrow \frac{1}{\sqrt{M}} \bar{B}_\mu, \quad B_\mu \rightarrow \frac{1}{\sqrt{M}} B_\mu, \quad (26)$$

получим

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty, M_j \rightarrow \infty} I_{\text{PV}}(\mathcal{A}) &= \int \exp \left\{ i \int \bar{B}_\mu^a(x) B_\mu^a(x) dx \right\} \delta(\nabla_\mu \bar{B}_\mu) \delta(\partial_\rho B_\rho) \times \\ &\times \prod_x D\bar{B}_\mu DB_\mu \det^{-1} \mathcal{M}(\mathcal{A}). \end{aligned} \quad (27)$$

Замена переменных (18) для обоих полей $\bar{B}_\mu$, B_μ (якобиан этой замены равен $\det^{-1} \nabla^2$) приводит к выражению

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty, M_j \rightarrow \infty} I_{\text{PV}}(\mathcal{A}) &= \int \exp \left\{ i \int (\bar{B}_\mu^{\text{tr}} + \nabla_\mu \bar{\psi})_x^a (B_\mu^{\text{tr}} + \nabla_\mu \psi)_x^a dx \right\} \times \\ &\times \delta(\nabla^2 \bar{\psi}) \delta(\partial_\rho B_\rho^{\text{tr}} + \mathcal{M}\psi) \prod_x D\bar{B}_\mu^{\text{tr}} DB_\mu^{\text{tr}} D\bar{\psi} D\psi \det^{-1} \mathcal{M}(\mathcal{A}) \det^{-1} \nabla^2 = \\ &= \int \exp \left\{ i \int \bar{B}_\mu^{\text{tr}}(x) B_\mu^{\text{tr}}(x) dx \right\} \prod_x D\bar{B}_\mu^{\text{tr}} DB_\mu^{\text{tr}} = \text{const}. \end{aligned} \quad (28)$$

Таким образом, взаимодействие ПВ (16) полностью устраняется в пределе $M \rightarrow \infty$, $M_j \rightarrow \infty$, что и требовалось доказать.

Проверка условия “в”. Теперь покажем, что функционал ПВ (16) в точности компенсирует оставшиеся однопетлевые расходимости функционала (12). Легко видеть, что вследствие калибровочной инвариантности действия S_0 нелокальный член в экспоненте выражения (16) может быть переписан в виде

$$\begin{aligned} \iint \bar{B}_\rho^a(x) \frac{\delta^2 S_0}{\delta \mathcal{A}_\rho^a(x) \delta \mathcal{A}_\mu^b(y)} (\nabla_\mu \nabla^{-2} \nabla_\nu B_\nu)_y^b dx dy = \\ = \int \bar{B}_\rho^a(x) \frac{\delta S_0}{\delta \mathcal{A}_\rho^a(x)} g t^{abc} (\nabla^{-2} \nabla_\nu B_\nu)_x^c dx. \end{aligned} \quad (29)$$

Этот член порождает только сходящиеся диаграммы, т. к. некоторые производные в правой части уравнения (29) действуют на внешние поля $\mathcal{A}_\mu$. Следовательно, расходящиеся диаграммы, порождаемые уравнениями (15) и (16), имеют одинаковую структуру (если $\overline{B}_\mu$ соответствует h_μ и B_ρ соответствует q_ρ) и их сумма конечна. Это доказывает, что функционал (16) компенсирует остающиеся однопетлевые расходимости функционала (12).

Проверка условия “г”. Наконец мы покажем, что, будучи проинтегрированным по полям $\mathcal{A}_\mu$, функционал ПВ (16) не порождает дополнительных расходящихся подграфов в многопетлевых диаграммах и производящий функционал (12), регуляризованный взаимодействием (16), является конечным не только на однопетлевом уровне, но и для любого числа петель. Выпишем этот регуляризованный функционал:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[J] = & \int \exp \left\{ i \int \left[\mathcal{L}_{YM}(x) + J_\mu^a(x) \mathcal{A}_\mu^a(x) - \frac{1}{2} (h_\rho^a(x))^2 + \frac{1}{2\Lambda^5} h_\rho^a(x) \frac{\delta S_0}{\delta \mathcal{A}_\rho^a(x)} \right] dx + \right. \\ & + \frac{i}{2\Lambda^5} \iint \overline{B}_\rho^a(x) \frac{\delta^2 S_0}{\delta \mathcal{A}_\rho^a(x) \delta \mathcal{A}_\mu^b(y)} (B_\mu - \nabla_\mu \nabla^{-2} \nabla_\nu B_\nu)_y^b dx dy + \\ & + iM \int \overline{B}_\mu^a(x) B_\mu^a(x) dx \left. \right\} \delta(\nabla_\mu h_\mu) \delta(\nabla_\mu \overline{B}_\mu) \delta(\partial_\rho \mathcal{A}_\rho) \delta(\partial_\rho B_\rho) \det^{\frac{1}{2}} \nabla^2 \times \\ & \times \prod_j \det^{\frac{c_j}{2}} (\nabla^2 - M_j^2) \prod_x D\overline{B}_\mu DB_\rho Dh_\mu D\mathcal{A}_\rho. \end{aligned} \quad (30)$$

Индекс расходимости произвольной диаграммы, порождаемой функционалом (30), аналогичен индексу в выражении (13) с учетом “вклада” внешних линий полей ПВ

$$\omega_2 = \omega_1 - E_B - E_{\overline{B}} - 3E_{gh}^{PV} - \frac{7}{2}E_\delta^{PV}, \quad (31)$$

где $E_B = E_{\overline{B}}$ — числа внешних линий поперечных частей соответственно полей B и $\overline{B}$, E_{gh}^{PV} — число внешних линий полей, представляющих $\det^{\frac{c_j}{2}} (\nabla^2 - M_j^2)$, $E_\delta^{PV} = E_{\overline{B}}^{\text{long}} + E_\lambda^{PV}$ — число внешних линий, представляющих продольную часть поля $\overline{B}$ и вспомогательное поле λ^{PV} , возникающее при представлении дельта-функции:

$$\delta(\nabla_\mu \overline{B}_\mu) = \int \exp \left\{ \int \lambda^{PV} \nabla_\mu \overline{B}_\mu dx \right\} \prod_x D\lambda^{PV} \quad (32)$$

(E_{gh}^{PV} и E_δ^{PV} являются четными числами). Легко видеть, что если $E_B > 0$, то диаграмма сходится, т. к. она включает в себя хотя бы одну внутреннюю линию полей $\mathcal{A}_\mu$. Расходящимися являются только диаграммы, для которых выполняются следующие условия: $E_B = E_{\overline{B}} = 0$, $E_{gh}^{PV} = E_\delta^{PV} = 0$ и число петель $I = 1$. Как было показано выше, все расходимости в таких однопетлевых диаграммах, порожденных функционалом (30), взаимно сокращаются при применении процедуры ПВ.

Отсутствие новых расходящихся диаграмм, порождаемых взаимодействием ПВ при интегрировании по полям $\mathcal{A}_\mu$, обусловлено тем, что пропагатор полей $\mathcal{A}_\mu$ при больших импульсах убывает быстрее, чем пропагаторы полей ПВ. Подобное решение проблемы перекрывающихся расходимостей было предложено в [10] и реализовано в [6]. Этот

способ решения проблемы налагает определенные ограничения на вид члена с высшими ковариантными производными в промежуточном лагранжиане (1). Как было указано в [6], если мы заинтересованы лишь в однопетлевом приближении, то можно использовать более простой промежуточный лагранжиан:

$$\mathcal{L}_{\text{YM}}(x) \rightarrow \mathcal{L}^{\Lambda}(x) = \mathcal{L}_{\text{YM}}(x) + \frac{1}{8\Lambda^4} \text{tr}(\nabla^2 \mathcal{F}_{\mu\nu})^2. \quad (33)$$

Примеры таких вычислений см. в [9, 13]. Однако исходя из лагранжиана (33) мы не сможем ввести “правильное” взаимодействие ПВ, которое не порождает дополнительных расходящихся подграфов в многопетлевых диаграммах (детальное объяснение дано в [6]). Следовательно, если мы заинтересованы в производящем функционале, который конечен в любом порядке теории возмущений, а также имеет непертурбативный смысл, мы должны использовать выражение (30).

Подведем итоги этого раздела. Построен регуляризованный производящий функционал (30), который является “правильным” и удовлетворяет условиям “а”–“г” в следующем смысле:

- а) он удовлетворяет правильным тождествам Славнова–Тейлора [14, 15], поскольку были использованы только калибровочно-инвариантные регуляризующие члены;
- б) в пределе $M \rightarrow \infty$, $M_j \rightarrow \infty$ с последующим $\Lambda \rightarrow \infty$ все нефизические моды пропадают, внося вклад только в локальные контрчлены;
- в, г) все диаграммы, порожденные функционалом (30), конечны, т. к. интеграл по антикоммутирующим полям $\overline{B}$, B сокращает однопетлевую расходящуюся часть интеграла по полям $\mathcal{A}$, h , а перекрывающиеся расходимости в многопетлевых диаграммах отсутствуют.

В то же время функционал (30) является более простым и экономичным с точки зрения вычислений, чем полученный в работе [6].

В завершение заметим, что нелокальный член (29) в выражении (30) не дает вклада в пределе $M \rightarrow \infty$. Как было показано, для конечного M этот член порождает только конечные диаграммы, а в пределе $M \rightarrow \infty$ вклад этих диаграмм равен нулю. В пределе $M \rightarrow \infty$, который и представляет интерес, можно отбросить этот член в уравнении (30), получив производящий функционал с локальным эффективным действием, пригодный для практических вычислений:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[J] = & \int \exp \left\{ i \int \left[\mathcal{L}_{\text{YM}}(x) + J_{\mu}^a(x) \mathcal{A}_{\mu}^a(x) - \frac{1}{2} (h_{\rho}^a(x))^2 + \frac{1}{2\Lambda^5} h_{\rho}^a(x) \frac{\delta S_0}{\delta \mathcal{A}_{\rho}^a(x)} \right] dx + \right. \\ & + \frac{i}{2\Lambda^5} \iint \overline{B}_{\rho}^a(x) \frac{\delta^2 S_0}{\delta \mathcal{A}_{\rho}^a(x) \delta \mathcal{A}_{\mu}^b(y)} B_{\mu}^b(y) dx dy + \\ & + iM \int \overline{B}_{\mu}^a(x) B_{\mu}^a(x) dx \left. \right\} \delta(\nabla_{\mu} h_{\mu}) \delta(\nabla_{\mu} \overline{B}_{\mu}) \delta(\partial_{\rho} \mathcal{A}_{\rho}) \delta(\partial_{\rho} B_{\rho}) \det^{\frac{1}{2}} \nabla^2 \times \\ & \times \prod_j \det^{\frac{c_j}{2}} (\nabla^2 - M_j^2) \prod_x D\overline{B}_{\mu} D B_{\rho} D h_{\mu} D \mathcal{A}_{\rho}. \end{aligned} \quad (34)$$

Отбрасывание выражения (29) нарушает калибровочную инвариантность для конечных M . Тождества Славнова–Тейлора при этом выполнены лишь с точностью до конечных членов порядка $O(M^{-1})$. Эти члены безвредны, т. к. не оказывают влияния на контрчлены и исчезают в пределе $M \rightarrow \infty$.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе построена непротиворечивая инвариантная регуляризация калибровочных моделей в рамках МВКП. Данная регуляризация может быть эффективно использована в моделях, к которым не применима размерная регуляризация. Полученная формулировка является значительно более простой и требует существенно меньше вычислений по сравнению с формулировкой в работе [6]. На диаграммном уровне структура регуляризованного функционала (34) все еще достаточно сложна, однако на сегодняшний день с учетом прогресса в области компьютерной техники и соответствующего программного обеспечения (см., например, [16]) вычислительная процедура может быть полностью автоматизирована.

Благодарности. Я благодарен профессору А. А. Славнову за неопенимую помощь и многочисленные обсуждения. Это исследование было поддержано Российским фондом фундаментальных исследований, грант № 96-01-00551, и Президентским грантом по поддержке ведущих научных школ, грант № 96-15-96208.

Список литературы

- [1] *G. 't Hooft, M. Veltman.* Nucl. Phys. 1972. V. 10. P. 189.
- [2] *K. Wilson.* Phys. Rev. D. 1974. V. 10. P. 2445.
- [3] *B. W. Lee, J. Zinn-Justin.* Phys. Rev. D. 1972. V. 5. P. 3137.
- [4] *A. А. Славнов.* ТМФ. 1972. Т. 13. С. 174.
- [5] *A. А. Славнов.* ТМФ. 1977. Т. 33. С. 210.
- [6] *T. D. Bakeyev, A. A. Slavnov.* Mod. Phys. Lett. A. 1996. V. 11. № 19. P. 1539.
- [7] *B. J. Warr.* Ann. Phys. 1988. V. 183. P. 1.
- [8] *R. Snor.* Some remarks for the construction of YM theories. In: Renormalization of Quantum Field Theories with Non-Linear Field Transformations. Lect. Notes Phys. V. 303. Eds. P. Breitenlohner, D. Maison, K. Sibold. Berlin: Springer-Verlag, 1988. P. 22.
- [9] *C. P. Martin, F. Ruiz Ruiz.* Nucl. Phys. B. 1995. V. 436. P. 645.
- [10] *Л. Д. Фаддеев, А. А. Славнов.* Введение в квантовую теорию калибровочных полей. 2-е изд. М.: Наука, 1988.
- [11] *M. Asorey, F. Falceto.* Nucl. Phys. B. 1989. V. 327. P. 427.
- [12] *M. Asorey, F. Falceto.* Phys. Rev. D. 1996. V. 54. P. 5290.
- [13] *P. I. Pronin, K. V. Stepanyantz.* Phys. Lett. B. 1997. V. 414. P. 117.
- [14] *J. C. Taylor.* Nucl. Phys. B. 1971. V. 33. P. 436.
- [15] *A. А. Славнов.* ТМФ. 1972. Т. 10. С. 153.
- [16] *P. I. Pronin, K. V. Stepanyantz.* New Tensor Package for REDUCE System. In: New Computing Technique in Physics Research. 4. Eds. B. Denby, D. Perred-Gallix. Singapore: World Scientific, 1995. P. 263.

Поступила в редакцию 5.V.1999 г.