Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. В. Степаньянц, О невозможности исключения калибровочных степеней свободы из точного суперпотенциала при $N_c > N_f$, *ТМФ*, 2000, том 122, номер 3, 435–443

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf578>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 16:24:55

© 2000 г.

К. В. Степаньянц*

О НЕВОЗМОЖНОСТИ ИСКЛЮЧЕНИЯ КАЛИБРОВОЧНЫХ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ ИЗ ТОЧНОГО СУПЕРПОТЕНЦИАЛА ПРИ $N_c > N_f$

Изучается непертурбативное обобщение эффективного лагранжиана Венециано–Янкиеловича. Показано, что переход от него к суперпотенциалу Аффлека–Дайна–Зайберга исключением конденсата глюино на уравнениях движения невозможен при $N_c > N_f$.

1. ВВЕДЕНИЕ

Понимание непертурбативной динамики теории поля крайне важно для объяснения целого ряда явлений – конфайнмента кварков, проблемы калибровочной иерархии, нарушения суперсимметрии. В настоящее время в данной области достигнут определенный прогресс. Прежде всего он связан с результатами работы [1], в которой впервые была вычислена сумма ряда инстантонных поправок для наиболее простой модели – $N = 2$ суперсимметричной теории Янга–Миллса с калибровочной группой $SU(2)$. Как было показано в работах [2–4], асимптотика данного результата действительно правильно воспроизводит одно- и двухинстантонную поправку.

Однако в реалистичных моделях реализуется не $N = 2$, а $N = 1$ суперсимметрия [5], поэтому наибольший интерес представляет именно этот случай. Впервые непертурбативные эффекты в $N = 1$ суперсимметричных теориях были рассмотрены в работе [6], идеи которой получили интенсивное развитие в последнее время (см., например, [7]). Однако соответствующие результаты не согласуются, во-первых, с прямыми инстантонными вычислениями и, во-вторых, с формулой, связывающей эффективное действие и квантовые аномалии. Решение данных проблем было предложено в работах [8, 9]. Было показано, что эффективное действие должно обязательно зависеть от калибровочного поля, поскольку тогда удастся не только достичь согласия с законом преобразования меры интегрирования по коллективным координатам, но и воспроизвести аномалии киральных симметрий теории. Результат фактически представляет собой непертурбативное обобщение эффективного лагранжиана Венециано–Янкиеловича [10].

*Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail: stepan@theor.phys.msu.su

Однако эффективный лагранжиан Венециано–Янкиеловича зависит не от исходных полей, а от некоторого связанного с ними нового калибровочно-инвариантного скалярного суперполя S , так называемого конденсата глюино, который обычно рассматривается как новая степень свободы. Известно [11, 8], что при его исключении на уравнениях движения получаются точные результаты Зайберга при $N_f \geq N_c$ или Аффлека–Дайна–Зайберга при $N_f < N_c$. Но при этом само это исключение должно быть возможно. Это действительно так, пока задача рассматривается в рамках теории возмущений, однако эффективный лагранжиан Венециано–Янкиеловича не применим в непертурбативной области. В частности, анализ возможности исключения конденсата глюино должен проводиться на основе точного выражения для эффективного действия. Такой анализ проведен в настоящей работе.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 мы напоминаем основные сведения о непертурбативном обобщении эффективного лагранжиана Венециано–Янкиеловича. В разделе 3 исследуется возможность исключения конденсата глюино на уравнениях движения. В разделе 4 кратко обсуждаются полученные результаты.

2. НЕПЕРТУРБАТИВНОЕ ОБОБЩЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОГО ЛАГРАНЖИАНА ВЕНЕЦИАНО–ЯНКЕЛОВИЧА

Мы будем рассматривать безмассовую $N = 1$ суперсимметричную теорию Янга–Миллса с калибровочной группой $SU(N_c)$ и N_f мультиплетами материи, которая в суперпространстве описывается действием

$$S = \frac{1}{16\pi} \text{tr} \text{Im} \left(\tau \int d^4x d^2\theta W^2 \right) + \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta \sum_{A=1}^{N_f} (\phi_A^+ e^{-2V} \phi^A + \tilde{\phi}^{+A} e^{2V} \tilde{\phi}_A) \quad (1)$$

(суперполя материи ϕ и $\tilde{\phi}$ принадлежат фундаментальному и антифундаментальному представлениям калибровочной группы $SU(N_c)$). Здесь были использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \phi(y, \theta) &= \varphi(y) + \sqrt{2}\bar{\theta}(1 + \gamma_5)\psi_1(y) + \frac{1}{2}\bar{\theta}_1(1 + \gamma_5)\theta f(y), \\ V(x, \theta) &= -\frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta A_\mu(x) + i\sqrt{2}(\bar{\theta}\theta)(\bar{\theta}\gamma_5\psi_2(x)) + \frac{i}{4}(\bar{\theta}\theta)^2 D, \\ W(y, \theta) &= \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) \left(i\sqrt{2}\psi_2(y) + i\theta D(y) + \frac{1}{2}\Sigma_{\mu\nu}\theta F_{\mu\nu}(y) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\theta}(1 + \gamma_5)\theta\gamma^\mu D_\mu\psi_2(y) \right), \\ \tau &= \frac{\theta}{2\pi} + \frac{4\pi i}{e^2}, \quad y^\mu = x^\mu + \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta. \end{aligned} \quad (2)$$

Эффективный лагранжиан данной модели может быть представлен в виде суммы [10]:

$$L_{\text{eff}} = L_k + L_a, \quad (3)$$

где

$$L_k = \int d^4\theta K(S, S^*, \Phi, \Phi^*), \quad L_a = \text{Re} \int d^2\theta w(S, \Phi) \quad (4)$$

и $S \equiv \text{tr } W^2$ – конденсат глюино, который в силу (2) включает в себя калибровочное поле и, следовательно, может рассматриваться как калибровочная степень свободы. Зависимость от S (которая не исследовалась в [6]) необходима для достижения согласия с законом преобразования инстантонной меры и воспроизведения аномалий киральных симметрий.

В эффективном лагранжиане (3) L_k обозначает кинетический член, который не дает вклада в аномалию, а L_a – голоморфная часть суперпотенциала. В теории возмущений к L_k существуют нетривиальные поправки во всех петлях, и данное слагаемое, конечно, не может быть точно вычислено даже на пертурбативном уровне. Однако с использованием аргументов, основанных на исследовании квантовых аномалий, оказывается возможным определить вид L_a . Это может быть сделано как в рамках теории возмущений [10], так и точно (с учетом ряда инстантонных поправок) [9]¹⁾.

Исследование закона преобразования меры интегрирования под действием аномальной симметрии $U(1)_x$

$$\begin{aligned} W(\theta) &\rightarrow e^{i\alpha} W(e^{-i\alpha\gamma_5}\theta), \\ \phi(\theta) &\rightarrow e^{ix\alpha} \phi(e^{-i\alpha\gamma_5}\theta), \\ \tilde{\phi}(\theta) &\rightarrow e^{ix\alpha} \tilde{\phi}(e^{-i\alpha\gamma_5}\theta) \end{aligned} \quad (5)$$

(x – произвольная постоянная) позволяет заключить [9], что

$$L_a = \frac{1}{32\pi^2} \text{Im tr} \int d^2\theta W^2 g(z), \quad (6)$$

где (с учетом требования положительной определенности евклидова действия)

$$g(z) = -i \ln z + \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad \text{Im } g(z) \geq 0, \quad \text{Re } c_k = 0, \quad (7)$$

а параметр z является функцией “мезонов” M и “барионов” B , определяемых как

$$\begin{aligned} M_A^B &= \tilde{\phi}_{Aa} \phi^{Ba}, \\ B_{A_{N_c+1} A_{N_c+2} \dots A_{N_f}} &= \frac{1}{N_c!} \varepsilon_{A_1 A_2 \dots A_{N_f}} \varepsilon^{a_1 a_2 \dots a_{N_c}} \phi^{A_1 a_1} \phi^{A_2 a_2} \dots \phi^{A_{N_c} a_{N_c}}, \\ \tilde{B}^{A_{N_c+1} A_{N_c+2} \dots A_{N_f}} &= \frac{1}{N_c!} \varepsilon^{A_1 A_2 \dots A_{N_f}} \varepsilon^{a_1 a_2 \dots a_{N_c}} \tilde{\phi}_{A_1 a_1} \tilde{\phi}_{A_2 a_2} \dots \tilde{\phi}_{A_{N_c} a_{N_c}}, \end{aligned} \quad (8)$$

¹⁾Из-за существования инстантонных вкладов точные аномалии существенно отличаются от пертурбативных (см. [12]).

а также конденсата глюино $S = W^2$. Первое слагаемое и нулевой член суммы c_0 в выражении (7) представляют собой пертурбативный результат, а члены, содержащие степени z , – инстантонные поправки. Более детальное обсуждение данных вопросов дается в работе [8], где были получены следующие выражения:

$$z = \frac{\Lambda^{3N_c - N_f}}{\det M S^{N_c - N_f}}, \quad N_c > N_f,$$

$$z = \frac{\Lambda^{3N_c - N_f} S^{N_f - N_c}}{\det M - \left(\tilde{B}^{A_1 A_2 \dots A_{N_f - N_c}} M_{A_1}^{B_1} M_{A_2}^{B_2} \dots M_{A_{N_f - N_c}}^{B_{N_f - N_c}} B_{B_1 B_2 \dots B_{N_f - N_c}} \right)},$$

$$N_c \leq N_f. \quad (9)$$

Из условий (7) однозначно следует [13], что

$$g(z) = 2\pi \tau(z^{-\frac{1}{4}}), \quad (10)$$

где $\tau(a)$ совпадает с соответствующей функцией в решении Зайберга–Виттена, определяемой как

$$\tau(a) = \left. \frac{da_D(u)}{da} \right|_{u=u(a)}, \quad (11)$$

а функции $a(u)$ и $a_D(u)$ суть

$$a(u) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_{-1}^1 dx \frac{\sqrt{x-u}}{\sqrt{x^2-1}}, \quad a_D(u) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_1^u dx \frac{\sqrt{x-u}}{\sqrt{x^2-1}}. \quad (12)$$

Доказательство этого утверждения приведено в [13]. В качестве исходного используется уравнение

$$u = \pi i \left(F(a) - \frac{a}{2} \frac{\partial F(a)}{\partial a} \right), \quad (13)$$

где $a = z^{-1/4}$, а функция $F(a)$ определяется с помощью соотношения $g(a) \equiv 2\pi F''(a)$. При этом u должно удовлетворять следующим свойствам:

$$u(g)^* = u(-g^*), \quad u(g - 2\pi n) = (-1)^n u(g). \quad (14)$$

С физической точки зрения уравнение (13) представляет собой аномальное тождество Уорда, получающееся при дифференцировании эффективного лагранжиана Зайберга–Виттена по параметру R -симметрии [14]. Аналогичное уравнение может быть выведено и в модели (1) на основе исследования аномалии $U(1)_x$ -симметрии [9]. Поэтому совпадение формы эффективного действия для совершенно различных моделей фактически является следствием того, что выражения для квантовых аномалий сходны по форме.

С точки зрения математики уравнение (13) является следствием разложения (7), поскольку из него мы находим, что

$$F(a) = a^2 \left(\frac{i}{\pi} \ln a + \sum_{k=0}^{\infty} F_k a^{-4k} \right), \quad \text{Re } F_k = 0, \quad (15)$$

и, следовательно,

$$u(a) = a^2 \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} 2\pi i k F_k a^{-4k} \right). \quad (16)$$

Первое из условий (14) следует из того, что коэффициенты F_k являются чисто мнимыми, откуда $g(a)^* = -g(a^*)$. Поэтому $a(g)^* = a(-g^*)$, и требуемое условие получается подстановкой данного равенства в (16).

Для того чтобы вывести второе из условий (14), необходимо совершить преобразования

$$a \rightarrow e^{\frac{i\pi n}{2}} a, \quad (17)$$

которые приводят к

$$F(a) \rightarrow e^{i\pi n} \left(F(a) - \frac{n}{2} a^2 \right), \quad g \rightarrow g - 2\pi n, \quad u \rightarrow (-1)^n u. \quad (18)$$

Таким образом, разложение (7) действительно эквивалентно исходным предположениям работы [13], и, следовательно, для голоморфной части эффективного лагранжиана окончательно получаем

$$L_a = \frac{1}{16\pi} \operatorname{Im} \int d^2\theta S \tau(z^{-\frac{1}{4}}). \quad (19)$$

В пределе $z \rightarrow 0$, соответствующем применимости теории возмущений, решение (19) переходит в эффективный лагранжиан Венециано–Янкиеловича [10]

$$L_{\text{VY}} = \frac{1}{32\pi^2} \operatorname{Re} \int d^2\theta S (\ln z + \text{const}), \quad (20)$$

поскольку

$$\tau(a) \rightarrow \frac{2i}{\pi} \ln(2a), \quad a \rightarrow \infty. \quad (21)$$

(Однако вне рамок теории возмущений эффективный лагранжиан Венециано–Янкиеловича не применим.)

Зависимость решения (19) от конденсата глюино S (который в силу (2) включает в себя калибровочное поле) позволяет добиться выполнения условия связи между аномалиями (с учетом инстантонных поправок) и эффективным лагранжианом

$$\langle \partial_\mu J^\mu \rangle = -\frac{\partial L_a}{\partial \alpha} \quad (22)$$

для произвольного значения параметра x в преобразованиях (5). Выражения для L_a , которые были предложены в работах [6, 7], удовлетворяют условию (22) только при $x = (N_f - N_c)/N_f$ (в этом случае аномалия соответствующего тока равна нулю).

В рамках предложенного Зайбергом подхода “мезоны” и “барионы”, исходно строящиеся калибровочно-инвариантным образом из материальных полей теории, являются

(при $N_f \geq N_c$) некоторыми новыми квантовыми полями так же, как и конденсат глюино, который всегда считается некоторым новым полем. Стандартно предполагается [11], что S исключается с помощью уравнений движения

$$\frac{\partial w}{\partial S} = 0. \quad (23)$$

Поскольку суперпотенциал w удовлетворяет уравнению [9]

$$2w - 2 \frac{\partial w}{\partial S} S - \frac{N_f - N_c}{N_f} \frac{\partial w}{\partial v} = 0, \quad (24)$$

то после наложения условия (23) получим уравнение, которое использовалось в работах [6, 7]. Следовательно, если конденсат глюино может быть выражен из (23), то его подстановка в w автоматически приводит к суперпотенциалу Аффлека–Дайна–Зайберга. Таким образом, решение (19) представляет собой синтез точных результатов Зайберга и эффективного лагранжиана Венециано–Янкиеловича. Однако оно применимо вне рамок теории возмущений, согласуется с законом преобразования меры интегрирования по коллективным координатам и воспроизводит квантовые аномалии.

3. АНАЛИЗ ВОЗМОЖНОСТИ ИСКЛЮЧЕНИЯ КОНДЕНСАТА ГЛЮИНО НА УРАВНЕНИЯХ ДВИЖЕНИЯ

Условие экстремума суперпотенциала (23) может быть переписано как ($a = z^{-1/4}$)

$$\frac{d \ln a}{d \ln \tau} = \frac{1}{4}(N_f - N_c). \quad (25)$$

Используя пертурбативный результат (21), в рамках теории возмущений мы немедленно получаем, что

$$\ln(2a) = \frac{1}{4}(N_f - N_c). \quad (26)$$

Уравнение (26), конечно, имеет решения при любых значениях N_f и N_c , поэтому в рамках теории возмущений исключение конденсата глюино на уравнениях движения является возможным, как это и предполагалось в [11]. Однако вне рамок теории возмущений ситуация кардинально меняется.

Для проведения соответствующего исследования нам потребуется представление решения Зайберга–Виттена через эллиптические функции [15]

$$a(u) = \frac{4}{\pi k} E(k), \quad a_D(u) = \frac{4}{i\pi k} (E'(k) - K'(k)), \quad (27)$$

где $k^2 = 2/(1+u)$, функции E , K , E' и K' определяются как

$$\begin{aligned} E(k) &= \frac{\pi}{2} F\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, k^2\right) = \int_0^1 dt \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}, \\ K(k) &= \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, k^2\right) = \int_0^1 dt \frac{1}{\sqrt{(1-k^2t^2)(1-t^2)}}, \\ E'(k) &= E(\sqrt{1-k^2}), \quad K'(k) = K(\sqrt{1-k^2}), \end{aligned} \quad (28)$$

а F – гипергеометрическая функция. Функцию τ при этом можно записать в виде

$$\tau = \frac{iK'}{K}. \quad (29)$$

Преимущество такой формы записи заключается в том, что все данные специальные функции “запиты” в системах аналитических вычислений. При выполнении настоящей работы использовалась система аналитических вычислений MAPPLE. С ее помощью был построен график функции

$$\frac{d \ln a}{d \ln \tau}, \quad (30)$$

приведенный на рисунке (кривая 1), где для сравнения показан соответствующий пертурбативный результат (кривая 2).

Графики левой части уравнения (25) как функции переменной a . Кривая 1 соответствует точному результату, а кривая 2 – результату, полученному в рамках теории возмущений.

Как и должно быть, при $a \rightarrow \infty$ результат теории возмущений практически совпадает с точным результатом, однако при малых значениях a возникают принципиальные расхождения. Эллиптические функции вещественны только при $k^2 = 2/(1+u) < 1$. В

области, где теория возмущений не применима ($k^2 \rightarrow 0$), функция (30) также всегда положительна и обращается в нуль при $k^2 = 0$, что соответствует $a = 4/\pi$. Следовательно, область значений функции (30) для точного результата есть $[0, \infty)$, и решение уравнения (25) существует только при неотрицательной правой части, т.е. при $N_c \leq N_f$.

Отдельного упоминания заслуживает случай $N_c = N_f$. В этом случае классическое условие связи $\det M - \tilde{B}B = 0$ нарушается квантовыми поправками [7] как

$$\det M - \tilde{B}B = \text{const } \Lambda^{2N_f}. \quad (31)$$

В рамках подхода, предложенного в работе [8], последнее условие очевидно выполняется, поскольку в данном случае

$$L_a = \frac{1}{16\pi} \text{Im} \int d^2\theta S \tau \left(\left(\frac{\Lambda^{2N_f}}{\det M - \tilde{B}B} \right)^{-\frac{1}{4}} \right), \quad (32)$$

и, следовательно, конденсат глюино является просто множителем Лагранжа. При варьировании по нему получим уравнение $\tau(a) = 0$, которое, как несложно проверить, имеет решение

$$a = \left(\frac{\Lambda^{2N_f}}{\det M - \tilde{B}B} \right)^{-\frac{1}{4}} = \frac{4}{\pi}. \quad (33)$$

Поэтому окончательно в случае $N_c = N_f$ получаем

$$\det M - \tilde{B}B = \left(\frac{4}{\pi} \right)^4 \Lambda^{2N_f}. \quad (34)$$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, в данной работе показано, что форма точного суперпотенциала такова, что при $N_c > N_f$ исключение конденсата глюино на уравнениях движения невозможно – в этом случае экстремум просто отсутствует. Следовательно, вопрос об эквивалентности точных результатов при наличии конденсата и без него отнюдь не столь тривиален, как это предполагалось в [11].

Возможность такой ситуации уже рассматривалась в работе [8] на основе некоторых качественных рассуждений. Дело в том, что при $N_c > N_f$ калибровочная группа не является полностью нарушенной и в теории присутствуют безмассовые калибровочные поля. С другой стороны, исключение конденсата на уравнениях движения предполагает замену исходных переменных теории на некоторые новые калибровочно-инвариантные величины. Конечно, это, по меньшей мере, достаточно неестественно при наличии ненарушенной калибровочной группы. Следовательно, при $N_c > N_f$, по-видимому, невозможно игнорировать зависимость эффективного действия от калибровочных степеней свободы, что делается при выводе суперпотенциала Аффлека–Дайна–Зайберга. Отсюда, в частности, и возникают проблемы с согласием точных результатов и инстантонных вычислений.

Таким образом, необходимо сделать вывод о неэквивалентности точного результата (19) и эффективного суперпотенциала Аффлека–Дайна–Зайберга при $N_c > N_f$. При $N_c \leq N_f$ (полностью нарушенная калибровочная группа) согласие по-прежнему существует.

Благодарности. Я хотел бы выразить свою глубокую признательность П. И. Пронину за полезные обсуждения и замечания, а также считаю своим приятным долгом поблагодарить В. В. Асадова за финансовую поддержку исследований.

Список литературы

- [1] *N. Seiberg, E. Witten.* Nucl. Phys. B. 1994. V. 426. P. 19.
- [2] *D. Finnell, P. Pouliot.* Nucl. Phys. B. 1995. V. 453. P. 225.
- [3] *A. Yung.* Nucl. Phys. B. 1997. V. 485. P. 38.
- [4] *N. Dorey, V. Khoze, M. Mattis.* Multi-instanton calculus in $N = 2$ supersymmetric gauge theory. hep-th/9603136.
- [5] *H. Nilles.* Phys. Rep. 1984. V. 110. P. 1.
- [6] *I. Affleck, M. Dine, N. Seiberg.* Nucl. Phys. B. 1984. V. 241. P. 493.
- [7] *N. Seiberg.* Phys. Rev. D. 1994. V. 49. P. 6857.
- [8] *P. Pronin, K. Stepanyantz.* Anomalies and nonperturbative results. hep-th/9803185.
- [9] *П. Пронин, К. Степаньянц.* ТМФ. 1999. Т. 120. С. 82.
- [10] *G. Veneziano, S. Yankelowicz.* Phys. Lett. B. 1982. V. 113. P. 231; *T. Taylor, G. Veneziano, S. Yankelowicz.* Nucl. Phys. B. 1983. V. 218. P. 493.
- [11] *K. Intriligator, R. Leith, N. Seiberg.* Phys. Rev. D. 1994. V. 50. P. 1092.
- [12] *П. Пронин, К. Степаньянц.* ТМФ. 1998. Т. 115. С. 402.
- [13] *G. Bonelli, M. Matone, M. Tonin.* Phys. Rev. D. 1997. V. 55. P. 6466.
- [14] *P. Howe, P. West.* Nucl. Phys. B. 1997. V. 486. P. 425.
- [15] *L. Alvares-Gaume, S. Hassan.* Fortschr. Phys. 1997. V. 45. P. 159; hep-th/9701069.

Поступила в редакцию 5.I.1999 г.,
после доработки 21.V.1999 г.