Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Л. Бухбиндер, И. Б. Самсонов, О голоморфном эффективном действии
в $N = 2$ $D = 4$ суперкалибровочных теориях с различными калибровочными
группами, *ТМФ*, 2000, том 122, номер 3, 444–455

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf579>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 06:59:37

О ГОЛОМОРФНОМ ЭФФЕКТИВНОМ ДЕЙСТВИИ В $N = 2$ $D = 4$ СУПЕРКАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЯХ С РАЗЛИЧНЫМИ КАЛИБРОВОЧНЫМИ ГРУППАМИ

Рассматриваются теории гипермультиплетов в произвольных представлениях произвольных полупростых калибровочных групп, взаимодействующих с калибровочными суперполями. С использованием формулировки этих моделей в $N = 2$ гармоническом суперпространстве устанавливается общая структура голоморфного эффективного действия, зависящего от калибровочного суперполя, принадлежащего подалгебре Картана калибровочной алгебры. Найдены явные выражения для эффективных действий в случаях, когда гипермультиплеты взяты в фундаментальном и присоединенном представлениях групп $SU(n)$, $SO(n)$, $Sp(2n)$.

1. ВВЕДЕНИЕ

Полевые модели, обладающие расширенной суперсимметрией, уже давно привлекают внимание благодаря их замечательным свойствам на классическом и квантовом уровнях. Современный интерес к квантовым аспектам $N = 2$ суперсимметричных моделей в значительной степени обусловливается работой [1], где показано, что низкоэнергетическое эффективное действие $N = 2$ $SU(2)$ суперкалибровочной теории может быть найдено с точным учетом всех инстантонных вкладов. Позднее результаты работы [1] были обобщены на теории с калибровочными группами $SU(n)$ [2] и $SO(n)$ [3].

Хорошо известно, что наиболее естественное и простое описание квантовых аспектов суперсимметричных полевых теорий достигается при формулировке этих моделей в терминах соответствующих несвязанных суперполей (см., например, [4]). Подходящая формулировка $N = 2$ суперсимметричных теорий была построена в пионерских работах [5, 6] в рамках развитого в них подхода гармонического суперпространства. Структура эффективного действия в гармоническом суперпространстве изучалась в недавних работах [7–12]. В частности, в работах [7, 8] был предложен метод вычисления голоморфного эффективного действия в моделях q - и ω -гипермультиплетов, взаимодействующих с абелевым калибровочным суперполем.

*Томский государственный педагогический университет, Томск, Россия

†Томский государственный университет, Томск, Россия

Предлагаемая статья посвящена исследованию структуры эффективного действия в общей ситуации, когда гипермультиплеты взяты в произвольном представлении компактной полупростой калибровочной группы, а внешнее суперполе, с которым они взаимодействуют, принадлежит подалгебре Картана соответствующей калибровочной алгебры. Как будет показано, проблема вычисления голоморфного эффективного действия в рассматриваемом случае может быть решена на основе результатов работ [7, 8]. При этом голоморфное эффективное действие полностью определяется весами представления калибровочной алгебры. В качестве приложений общего результата¹⁾ мы находим явно голоморфные эффективные действия для гипермультиплетов в фундаментальном и присоединенном представлениях калибровочных групп $SU(n)$, $SO(n)$, $Sp(2n)$.

2. ЭФФЕКТИВНЫЕ ДЕЙСТВИЯ q - И ω -ГИПЕРМУЛЬТИПЛЕТОВ В ПРОИЗВОЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ПОЛУПРОСТОЙ КАЛИБРОВОЧНОЙ ГРУППЫ

Основными суперполями материи в $N = 2$ гармоническом суперпространстве являются q - и ω -гипермультиплеты, введенные в работах [5, 6]. Классические действия данных гипермультиплетов, минимально взаимодействующих с $N = 2$ суперполем Янга–Миллса V^{++} в гармоническом суперпространстве, записываются в виде

$$S[q^+, \check{q}^+, V^{++}] = \int d\zeta^{(-4)} \check{q}^+(D^{++} + iV^{++})q^+, \quad (1)$$

$$S[\omega, \check{\omega}, V^{++}] = \int d\zeta^{(-4)} (D^{++} - iV^{++})\check{\omega}(D^{++} + iV^{++})\omega. \quad (2)$$

Голоморфные эффективные действия моделей (1), (2) были найдены в работах [7, 8] в следующем виде:

$$\Gamma_{q,\omega}[V^{++}] = \int d^4x d^4\theta \mathcal{F}_{q,\omega}(W) + \text{к.с.}, \quad (3)$$

$$\mathcal{F}_{q,\omega}(W) = -\frac{k_{q,\omega}}{64\pi^2} W^2 \ln \frac{W^2}{\Lambda^2}, \quad k_{q,\omega} = \begin{cases} 1 & \text{для } q\text{-гипермультиплета,} \\ 2 & \text{для } \omega\text{-гипермультиплета,} \end{cases}$$

где W , $\overline{W}$ – напряженности $N = 2$ суперполя Янга–Миллса. В абелевом случае эти напряженности записываются в форме [13]

$$W = - \int du (\overline{D}^-)^2 V^{++}(x, \theta, u), \quad \overline{W} = - \int du (D^-)^2 V^{++}(x, \theta, u). \quad (4)$$

Рассмотрим обобщение данной задачи на случай, когда гипермультиплеты лежат в произвольном представлении полупростой компактной калибровочной группы. Пусть e_l ($l = 1, \dots, m$) – базис пространства представления $\mathcal{V}$, $\dim \mathcal{V} = m$, а T_i – генераторы

¹⁾ Для частных случаев наши результаты совпадают с результатами, полученными в работах [2, 3].

данного представления, образующие базис в калибровочной алгебре $\mathcal{L}$. Тогда гипермультиплеты и алгеброзначное суперполе V^{++} можно записать в виде разложения по этим базисам

$$\begin{aligned} Q^+ &= q_l^+ e_l, & \check{Q}^+ &= \check{q}_l^+ e_l^\dagger, & V^{++} &= V_i^{++} T_i, \\ \Omega &= \omega_l e_l, & \check{\Omega} &= \check{\omega}_l e_l^\dagger. \end{aligned} \quad (5)$$

Классические действия рассматриваемых моделей имеют вид

$$S[Q^+, \check{Q}^+, V^{++}] = \int d\zeta^{(-4)} \check{Q}^+ (D^{++} + iV^{++}) Q^+, \quad (6)$$

$$S[\Omega, \check{\Omega}, V^{++}] = \int d\zeta^{(-4)} (D^{++} \check{\Omega} - i\check{\Omega} V^{++}) (D^{++} + iV^{++}) \Omega. \quad (7)$$

Здесь подразумевается, что Q, Ω являются вектор-столбцами, а $\check{Q}, \check{\Omega}$ – вектор-строками. Запись типа $\check{Q}^+ D^{++} Q^+$ подразумевает скалярное произведение векторов:

$$\check{Q}^+ D^{++} Q^+ = \check{q}_i^+ D^{++} q_j^+ (e_i, e_j),$$

так что выражения (6) и (7) являются скалярными.

Мы будем считать, что калибровочная симметрия спонтанно нарушена до максимальной абелевой подгруппы. Это означает, что фоновое калибровочное суперполе V^{++} лежит в подалгебре Картана $\mathcal{H}$ калибровочной алгебры $\mathcal{L}$

$$V^{++} = \sum_{i=1}^l V_i^{++} h_i, \quad l = \text{rank } \mathcal{L}, \quad (8)$$

где $\{h_1, \dots, h_l\}$ – базис в подалгебре Картана $\mathcal{H}$.

Основная идея дальнейшего рассмотрения заключается в том, чтобы восстановить эффективные действия моделей (6), (7) на основе эффективного действия (3). Выделим в пространстве представления весовые подпространства $\mathcal{V}^\lambda$ [14],

$$v \in \mathcal{V}^\lambda, \quad hv = \lambda(h)v \quad \forall h \in \mathcal{H}. \quad (9)$$

Будем считать, что уравнение на собственные значения (9) имеет $m = \dim \mathcal{V}$ корней (весов) λ_i (среди них могут быть одинаковые) и соответствующие им собственные векторы e_i ортонормированы:

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij}. \quad (10)$$

Выберем эти векторы в качестве базиса в пространстве представления и разложим по ним гипермультиплеты

$$Q^+ = \sum_{i=1}^m q_i^+ e_i, \quad \check{Q}^+ = \sum_{i=1}^m \check{q}_i^+ e_i^\dagger, \quad (11)$$

$$\Omega = \sum_{i=1}^m \omega_i e_i, \quad \check{\Omega} = \sum_{i=1}^m \check{\omega}_i e_i^\dagger. \quad (12)$$

Используем соотношения (8), (9) и запишем действие калибровочного суперполя V^{++} на гипермультиплеты

$$V^{++}Q^+ = \sum_{i=1}^m q_i^+ \lambda_i(V^{++})e_i, \quad V^{++}\Omega = \sum_{i=1}^m \omega_i \lambda_i(V^{++})e_i. \quad (13)$$

Отметим, что функции $\lambda_i(V^{++})$ являются линейными, $\lambda_i(V^{++}) = \lambda_i(h_k)V_k^{++}$, так что веса $\lambda_i(V^{++})$ имеют $U(1)$ -заряд $+2$, так же как и суперполя V^{++} . Подставляя гипермультиплеты (11), (12) в действия (6), (7) и используя (10), (13), находим

$$S[\check{Q}^+, Q^+, V^{++}] = \int d\zeta^{(-4)} \sum_{i=1}^m \check{q}_i^+ (D^{++} + i\lambda_i(V^{++}))q_i^+, \quad (14)$$

$$S[\check{\Omega}, \Omega, V^{++}] = \int d\zeta^{(-4)} \sum_{i=1}^m (D^{++} - i\lambda_i(V^{++}))\check{\omega}_i (D^{++} + i\lambda_i(V^{++}))\omega_i. \quad (15)$$

В выражениях (14), (15) гипермультиплеты с различными значениями индекса не взаимодействуют между собой и их классические действия не переплетаются. Следовательно, голоморфные эффективные действия этих моделей выразятся через сумму “одномерных” эффективных действий (3)

$$\Gamma_{q,\omega}[V^{++}] = \int d^4x d^4\theta \mathcal{F}_{q,\omega}(W) + \text{к.с.}, \quad (16)$$

$$\mathcal{F}_{q,\omega}(W) = -\frac{k_{q,\omega}}{64\pi^2} \sum_{i=1}^m W_i^2 \ln \frac{W_i^2}{\Lambda^2},$$

где W_i построены по весам $\lambda_i(V^{++})$ с помощью соотношений (4).

Таким образом, для произвольного представления полупростой алгебры Ли найдены голоморфные эффективные действия q - и ω -гипермультиплетов. Установлено, что они выражаются через веса представления. Заметим, что каждое неприводимое представление полностью определяется своим старшим весом α и все веса представления могут быть выражены через него (см. [14]),

$$\lambda(h) = \alpha(h) - m_1\beta_1(h) - m_2\beta_2(h) - \dots - m_k\beta_k(h), \quad h \in \mathcal{H}, \quad (17)$$

где $\beta_i(h)$ – простые корни алгебры $\mathcal{L}$, а $m_1, \dots, m_k$ – целые неотрицательные числа. Следовательно, можно считать, что голоморфные эффективные действия (16) определяются старшим весом представления.

Воспользуемся теперь полученными выражениями (16) и явно выпишем голоморфные эффективные потенциалы гипермультиплетов для неисклужительных полупростых групп в фундаментальном и присоединенном представлениях.

3. ЭФФЕКТИВНЫЕ ДЕЙСТВИЯ q - И ω -ГИПЕРМУЛЬТИПЛЕТОВ ДЛЯ КАЛИБРОВОЧНЫХ ГРУПП $SU(n)$, $SO(n)$, $Sp(2n)$

3.1. Голоморфные эффективные потенциалы гипермультиплетов с калибровочной группой $SU(n)$.

3.1.1. Фундаментальное представление. Фундаментальное представление алгебры $su(n)$ реализуется эрмитовыми бесследовыми матрицами в n -мерном комплексном пространстве. Базис в пространстве представления e_i и суперполе V^{++} , лежащее в подалгебре Картана, удобно выбрать стандартным образом [15]:

$$(e_i)_k = \delta_{ik}, \quad i, k = 1, \dots, n, \\ V^{++} = \text{diag}(V_1^{++}, V_2^{++}, \dots, V_n^{++}), \quad \sum_{i=1}^n V_i^{++} = 0. \quad (18)$$

Очевидно, что при таком выборе базиса и подалгебры Картана веса представления имеют простой вид

$$\lambda_i(V^{++}) = V_i^{++}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (19)$$

Подставляя веса (19) в равенства (16), находим

$$\mathcal{F}_{q,\omega}(W) = -\frac{k_{q,\omega}}{64\pi^2} \sum_{i=1}^n W_i^2 \ln \frac{W_i^2}{\Lambda^2}, \quad (20)$$

где напряженности W_i выражаются через V_i^{++} по формуле (4). Заметим, что напряженности W_i , так же как и суперполя V_i^{++} в (18), подчинены условию

$$\sum_{i=1}^n W_i = 0.$$

3.1.2. Присоединенное представление. В присоединенном представлении как гипермультиплеты, так и суперполе V^{++} являются алгеброзначными суперполями. Действие оператора V^{++} на гипермультиплеты в данном случае задается в виде коммутатора

$$(V^{++}Q^+) = [V^{++}, Q^+], \quad (V^{++}\Omega) = [V^{++}, \Omega]. \quad (21)$$

Базис в алгебре $su(n)$ удобно выбрать в следующем виде:

$$\{e_{ij}(i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n), \quad e_k = e_{kk} - e_{nn} \quad (k = 1, \dots, n-1)\}, \\ (e_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}, \quad \text{tr}(e_{ij}e_{kl}) = \delta_{il}\delta_{jk}. \quad (22)$$

Алгебробразные суперполя Q^+ , $\check{Q}^+$, Ω , $\check{\Omega}$, V^{++} имеют следующее разложение по базису (22):

$$\begin{aligned} Q^+ &= \sum_{i \neq j}^n q_{ij}^+ e_{ij} + \sum_{k=1}^n q_k^+ e_{kk}, & \Omega &= \sum_{i \neq j}^n \omega_{ij} e_{ij} + \sum_{k=1}^n \omega_k e_{kk}, \\ \check{Q}^+ &= \sum_{i \neq j}^n \check{q}_{ij}^+ e_{ji} + \sum_{k=1}^n \check{q}_k^+ e_{kk}, & \check{\Omega} &= \sum_{i \neq j}^n \check{\omega}_{ij} e_{ji} + \sum_{k=1}^n \check{\omega}_k e_{kk}, \\ V^{++} &= \sum_{k=1}^n V_k^{++} e_{kk}, & \sum_{k=1}^n V_k^{++} &= \sum_{k=1}^n q_k^+ = \sum_{k=1}^n \omega_k = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Одномерные весовые подпространства образованы векторами e_{ij} . Нетрудно найти все веса данного представления

$$[V^{++}, e_{ij}] = \lambda_{ij}(V^{++})e_{ij}, \quad \lambda_{ij}(V^{++}) = V_i^{++} - V_j^{++} \quad (i \neq j). \quad (24)$$

С использованием весов (24) находим голоморфные эффективные действия q - и ω -гипермультиплетов

$$\mathcal{F}_{q,\omega}(W) = -\frac{k_{q,\omega}}{32\pi^2} \sum_{i < j}^n W_{ij}^2 \ln \frac{W_{ij}^2}{\Lambda^2}, \quad (25)$$

где $W_{ij} = W_i - W_j$, а W_i выражаются через V_i^{++} согласно (4).

Аналогичный результат был представлен ранее в работах [2] для суперсимметричных моделей Янга–Миллса (SYM) $N = 2$ $SU(n)$ как с полями материи, так и без них. Голоморфные эффективные потенциалы (25) по своей структуре согласуются с результатами работ [2] и отличаются только коэффициентами, что обусловливается другим числом степеней свободы у данных моделей по сравнению с [2]. Для подтверждения правильности коэффициентов можно сравнить (25) с найденным в [10] голоморфным эффективным действием вещественного ω -гипермультиплета, минимально взаимодействующего с калибровочным полем группы $SU(2)$. Нетрудно убедиться, что при $n = 2$ голоморфный потенциал $\mathcal{F}_{q,\omega}(W)$ (25) полностью совпадает с аналогичным результатом [10] при соответствующем выборе нормировки базисных элементов (22).

3.2. Голоморфные эффективные потенциалы гипермультиплетов с калибровочной группой $SO(n)$. Калибровочные алгебры $so(2n)$ и $so(2n + 1)$ мы будем рассматривать отдельно. Это связано с тем, что они принадлежат разным классам согласно классификации алгебр по методу схем Дынкина и, следовательно, имеют отличающиеся корневые разложения.

3.2.1. Фундаментальное представление $SO(2n)$. Фундаментальное представление алгебры $so(2n)$ задается антисимметричными матрицами порядка $2n$, действующими в комплексном $2n$ -мерном векторном пространстве. Суперполе V^{++} , лежащее в подалгебре Картана алгебры $so(2n)$, удобно выбрать в виде

$$V^{++} = \text{diag}(V_1^{++} I, \dots, V_n^{++} I), \quad (26)$$

где

$$I = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix},$$

а V_i^{++} ($i = 1, \dots, n$) вещественные, $V_i^{++} = \check{V}_i^{++}$. Легко найти собственные векторы для оператора (26), которые мы выберем в качестве базиса пространства представления

$$(e_i)_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(i\delta_{2i-1,j} + \delta_{2i,j}), \quad (e_{-i})_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(\delta_{2i-1,j} + i\delta_{2i,j}), \quad (27)$$

$$V^{++} e_{\pm i} = \pm V_i^{++} e_{\pm i}. \quad (28)$$

Для удобства мы нумеруем базисные векторы в виде $e_{-n}, \dots, e_{-1}, e_1, \dots, e_n$ вместо $e_1, \dots, e_{2n}$. Как видно из (28), суперполя $\pm V_i^{++}$ являются весами данного представления. Подставляя данные веса в выражения (16), получаем голоморфные потенциалы

$$\mathcal{F}_{q,\omega}(W) = -\frac{k_{q,\omega}}{32\pi^2} \sum_{i=1}^n W_i^2 \ln \frac{W_i^2}{\Lambda^2}. \quad (29)$$

Напряженности W_i выражаются через V_i^{++} обычным образом (4).

3.2.2. Фундаментальное представление $SO(2n+1)$. В данном случае гипермультиплеты имеют на одну компоненту больше, чем для представления $SO(2n)$, а калибровочное суперполе задается матрицей

$$V^{++} = \text{diag}(V_1^{++}I, \dots, V_n^{++}I, 0), \quad I = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Как и в предыдущем случае, можно найти собственные векторы данного оператора и соответствующие собственные значения. В данном представлении кроме весов (28) имеется еще и нулевой вес, который не даст вклада в эффективное действие. Поэтому получаем, что эффективные действия гипермультиплетов имеют в точности такой же вид, как и в предыдущем случае,

$$\Gamma_{so(2n+1)} = \Gamma_{so(2n)}. \quad (31)$$

Этот результат является следствием того, что алгебры $so(2n+1)$ и $so(2n)$ имеют одинаковые подалгебры Картана.

3.2.3. Присоединенное представление $SO(2n)$. В присоединенном представлении пространством представления является сама алгебра, поэтому необходимо зафиксировать базис в калибровочной алгебре. Выберем его в виде

$$\begin{aligned} & \{E_{\lambda_{ij}}, E_{-\lambda_{ij}}, E_k\}, \quad i \neq j, \quad i, j, k = 1, \dots, n, \\ & E_{\lambda_{ij}} = \frac{1}{\sqrt{8}}(i\tilde{e}_{2i-1,2j-1} + \tilde{e}_{2i-1,2j} - \tilde{e}_{2i,2j-1} + i\tilde{e}_{2i,2j}), \quad i < j, \\ & E_{\lambda_{ij}} = \frac{1}{\sqrt{8}}(i\tilde{e}_{2i-1,2j-1} - \tilde{e}_{2i-1,2j} - \tilde{e}_{2i,2j-1} - i\tilde{e}_{2i,2j}), \quad i > j, \\ & E_k = \frac{i}{\sqrt{2}}\tilde{e}_{2k-1,2k}, \quad \tilde{e}_{ij} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{jk}\delta_{il}, \\ & E_{-\lambda_{ij}} = (E_{\lambda_{ij}})^\dagger, \quad (E_k)^\dagger = E_k. \end{aligned} \quad (32)$$

Базисные векторы (32) ортонормированы следующим образом:

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(E_{\lambda_{ij}} E_{-\lambda_{kl}}) &= \delta_{ik} \delta_{jl}, & \operatorname{tr}(E_{\lambda_{ij}} E_{\lambda_{kl}}) &= 0, \\ \operatorname{tr}(E_k E_l) &= \delta_{kl}, & i, j, k, l &= 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (33)$$

Векторы $E_{\pm \lambda_{ij}}$ образуют одномерные корневые подпространства в $so(2n)$, а подалгебра Картана натягивается на векторы E_k (см. [14]).

Теперь можно записать разложение суперполей Q^+ , $\check{Q}^+$, Ω , $\check{\Omega}$, V^{++} по базису (32):

$$\begin{aligned} Q^+ &= \sum_{i \neq j}^n q_{\lambda_{ij}}^+ E_{\lambda_{ij}} + \sum_{i \neq j}^n q_{-\lambda_{ij}}^+ E_{-\lambda_{ij}} + \sum_{k=1}^n q_k^+ E_k, \\ \check{Q}^+ &= \sum_{i \neq j}^n \check{q}_{\lambda_{ij}}^+ E_{-\lambda_{ij}} + \sum_{i \neq j}^n \check{q}_{-\lambda_{ij}}^+ E_{\lambda_{ij}} + \sum_{k=1}^n \check{q}_k^+ E_k, \\ \Omega &= \sum_{i \neq j}^n \omega_{\lambda_{ij}} E_{\lambda_{ij}} + \sum_{i \neq j}^n \omega_{-\lambda_{ij}} E_{-\lambda_{ij}} + \sum_{k=1}^n \omega_k E_k, \\ \check{\Omega} &= \sum_{i \neq j}^n \check{\omega}_{\lambda_{ij}} E_{-\lambda_{ij}} + \sum_{i \neq j}^n \check{\omega}_{-\lambda_{ij}} E_{\lambda_{ij}} + \sum_{k=1}^n \check{\omega}_k E_k, \\ V^{++} &= \sum_{k=1}^n V_k^{++} E_k = \frac{i}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^n V_k^{++} \tilde{e}_{2k-1, 2k}. \end{aligned} \quad (34)$$

Легко найти все веса данного представления:

$$\begin{aligned} [V^{++}, E_{\pm \lambda_{ij}}] &= \pm \lambda_{ij}(V^{++}) E_{\pm \lambda_{ij}}, \\ \lambda_{ij}(V^{++}) &= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}(V_i^{++} - V_j^{++}), & i < j, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(V_i^{++} + V_j^{++}), & i > j. \end{cases} \end{aligned} \quad (35)$$

Зная веса представления, получаем голоморфные действия гипермультиплетов

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{q, \omega}(W) &= -\frac{k_{q, \omega}}{64\pi^2} \sum_{i < j}^n \left[(W_i - W_j)^2 \ln \frac{(W_i - W_j)^2}{\Lambda^2} + \right. \\ &\quad \left. + (W_i + W_j)^2 \ln \frac{(W_i + W_j)^2}{\Lambda^2} \right], \end{aligned} \quad (36)$$

где W_i построены по V_i^{++} с помощью (4).

3.2.4. *Присоединенное представление $SO(2n + 1)$.* Зафиксируем базис в алгебре $so(2n + 1)$

$$\{E_{\lambda_{ij}}, E_{-\lambda_{ij}}, E_{\lambda_k}, E_{-\lambda_k}, E_k\}, \quad i \neq j, \quad i, j, k = 1, \dots, n, \quad (37)$$

где $E_{\pm\lambda_{ij}}, E_k$ те же, что и в (32), а векторы $E_{\pm\lambda_k}$ имеют вид

$$E_{\lambda_k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(i\tilde{e}_{2k-1,2n+1} - \tilde{e}_{2k,2n+1}), \quad E_{-\lambda_k} = (E_{\lambda_k})^\dagger, \quad k = 1, \dots, n. \quad (38)$$

Они также являются ортонормированными в следующем смысле:

$$\text{tr}(E_{\lambda_k} E_{-\lambda_l}) = \delta_{kl}, \quad \text{tr}(E_{\lambda_k} E_{\lambda_l}) = 0. \quad (39)$$

Подалгебра Картана по-прежнему образована векторами E_k . В данном случае кроме весов (35) имеются еще и веса, связанные с векторами E_{λ_k} :

$$[V^{++}, E_{\pm\lambda_k}] = \pm\lambda_k(V^{++}) E_{\pm\lambda_k}, \quad \lambda_k(V^{++}) = \frac{1}{\sqrt{2}} V_k^{++}. \quad (40)$$

Поэтому голоморфные потенциалы получают дополнительные слагаемые, определяемые этими весами:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{q,\omega}(W) = & -\frac{k_{q,\omega}}{64\pi^2} \left[\sum_{i<j}^n (W_i - W_j) \ln \frac{(W_i - W_j)^2}{\Lambda^2} + \right. \\ & \left. + \sum_{i<j}^n (W_i + W_j)^2 \ln \frac{(W_i + W_j)^2}{\Lambda^2} + \sum_{l=1}^n W_l^2 \ln \frac{W_l^2}{\Lambda^2} \right]. \end{aligned} \quad (41)$$

Напряженности W_i строятся по V_i^{++} стандартным образом (4).

Аналогичные результаты были получены ранее [3] для моделей $N = 2$ SYM с калибровочными группами $SO(2n)$, $SO(2n+1)$.

3.3. Голоморфные эффективные потенциалы гипермультиплетов с калибровочной группой $Sp(2n)$.

3.3.1. Фундаментальное представление. Фундаментальное представление алгебры $sp(2n)$ задается эрмитовыми симплектическими матрицами в $2n$ -мерном комплексном векторном пространстве. Базис в пространстве представления $\{e_i\}$ и суперполе V^{++} , лежащее в подалгебре Картана, можно выбрать в виде [14]

$$\begin{aligned} (e_i)_k &= \delta_{ik}, \quad i, k = 1, \dots, 2n, \\ V^{++} &= \text{diag}\{V_1^{++}, \dots, V_n^{++}, -V_1^{++}, \dots, -V_n^{++}\}. \end{aligned} \quad (42)$$

Весами в данном представлении будут $\pm V_i^{++}$. Подставляя их в выражения (16), находим

$$\mathcal{F}_{q,\omega}(W) = -\frac{k_{q,\omega}}{32\pi^2} \sum_{i=1}^n W_i^2 \ln \frac{W_i^2}{\Lambda^2}. \quad (43)$$

Оказывается, что голоморфные потенциалы (43) совпадают с соответствующими результатами (29) для группы $SO(2n)$.

3.3.2. *Присоединенное представление.* В этом случае гипермультиплеты являются матрицами алгебры $sp(2n, C)$, а суперполе V^{++} лежит в подалгебре Картана алгебры $sp(2n)$. Для того чтобы записать их явный вид, зафиксируем базис в алгебре следующим образом:

$$\begin{aligned} \{F_{kl}, G_{ij}, \tilde{G}_{ij}\}, \quad 1 \leq i \leq j \leq n, \quad k, l = 1, \dots, n, \\ F_{kl} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{kl} - e_{l+n, k+n}), \\ G_{ij} = \eta_{ij}(e_{i+n, j} + e_{j+n, i}), \quad \tilde{G}_{ij} = \eta_{ij}(e_{i, j+n} + e_{j, i+n}), \\ (F_{kl})^\dagger = F_{kl}, \quad (G_{ij})^\dagger = \tilde{G}_{ij}, \quad (\tilde{G}_{ij})^\dagger = G_{ij}, \end{aligned} \quad (44)$$

где мы ввели обозначение $\eta_{ij} = 1/\sqrt{2}$ при $i \neq j$ и $\eta_{ij} = 1/2$ при $i = j$. Коэффициенты перед базисными векторами в (44) подобраны таким образом, чтобы выполнялись следующие условия нормировки:

$$\begin{aligned} \text{tr}(F_{ij} F_{kl}) = \delta_{jk} \delta_{il}, \quad \text{tr}(G_{ij} G_{kl}) = \text{tr}(\tilde{G}_{ij} \tilde{G}_{kl}) = 0, \\ \text{tr}(G_{ij} \tilde{G}_{kl}) = \delta_{jl} \delta_{ik}, \quad \text{tr}(F_{ij} G_{kl}) = \text{tr}(F_{ij} \tilde{G}_{kl}) = 0. \end{aligned} \quad (45)$$

Векторы F_{ii} , $i = 1, \dots, n$, образуют базис в подалгебре Картана рассматриваемой алгебры, а остальные векторы соответствуют одномерным корневым подпространствам [14]. Суперполя Q^+ , $\check{Q}^+$, Ω , $\check{\Omega}$, V^{++} в базисе (44) записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} V^{++} &= \sum_{i=1}^n V_i^{++} F_{ii}, \\ Q^+ &= \sum_{i=1}^n q_i^+ F_{ii} + \sum_{i \neq j}^n q_{\alpha_{ij}}^+ F_{ij} + \sum_{i \leq j}^n q_{\beta_{ij}}^+ G_{ij} + \sum_{i \leq j}^n q_{-\beta_{ij}}^+ \tilde{G}_{ij}, \\ \check{Q}^+ &= \sum_{i=1}^n \check{q}_i^+ F_{ii} + \sum_{i \neq j}^n \check{q}_{\alpha_{ij}}^+ F_{ji} + \sum_{i \leq j}^n \check{q}_{\beta_{ij}}^+ \tilde{G}_{ij} + \sum_{i \leq j}^n \check{q}_{-\beta_{ij}}^+ G_{ij}, \\ \Omega &= \sum_{i=1}^n \omega_i F_{ii} + \sum_{i \neq j}^n \omega_{\alpha_{ij}} F_{ij} + \sum_{i \leq j}^n \omega_{\beta_{ij}} G_{ij} + \sum_{i \leq j}^n \omega_{-\beta_{ij}} \tilde{G}_{ij}, \\ \check{\Omega} &= \sum_{i=1}^n \check{\omega}_i F_{ii} + \sum_{i \neq j}^n \check{\omega}_{\alpha_{ij}} F_{ji} + \sum_{i \leq j}^n \check{\omega}_{\beta_{ij}} \tilde{G}_{ij} + \sum_{i \leq j}^n \check{\omega}_{-\beta_{ij}} G_{ij}. \end{aligned} \quad (46)$$

Базис (44) подобран таким образом, чтобы векторы F_{ij} , G_{ij} , $\tilde{G}_{ij}$ образовывали одномерные весовые подпространства. Легко найти соответствующие им веса

$$\begin{aligned} [V^{++}, F_{ij}] &= \alpha_{ij}(V^{++}) F_{ij}, \quad \alpha_{ij}(V^{++}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(V_i^{++} - V_j^{++}), \\ [V^{++}, G_{ij}] &= \beta_{ij}(V^{++}) G_{ij}, \quad \beta_{ij}(V^{++}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(V_i^{++} + V_j^{++}), \\ [V^{++}, \tilde{G}_{ij}] &= -\beta_{ij}(V^{++}) \tilde{G}_{ij}. \end{aligned} \quad (47)$$

Подставляя данные веса (47) в (16), находим эффективные действия q - и ω -гипермультиплетов

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{q,\omega}(W) = & -\frac{k_{q,\omega}}{64\pi^2} \left[\sum_{i < j}^n (W_i - W_j)^2 \ln \frac{(W_i - W_j)^2}{\Lambda^2} + \right. \\ & \left. + \sum_{i \leq j}^n (W_i + W_j)^2 \ln \frac{(W_i + W_j)^2}{\Lambda^2} \right], \end{aligned} \quad (48)$$

где напряженности W_i выражаются через суперполя V_i^{++} по формуле (4).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье мы рассмотрели основные модели гипермультиплетов, минимально взаимодействующих с $N = 2$ калибровочным неабелевым суперполем. Получены голоморфные эффективные действия q - и ω -гипермультиплетов в произвольном представлении полупростой калибровочной группы. Как оказалось, вид голоморфных потенциалов этих моделей полностью определяется весами представления калибровочной алгебры. В качестве приложения данного результата рассмотрены конкретные примеры, где явно представлены эффективные действия гипермультиплетов для калибровочных групп $SU(n)$, $SO(n)$, $Sp(2n)$ в фундаментальном и присоединенном представлениях. Мы изучаем ситуацию, когда калибровочная симметрия в $N = 2$ $D = 4$ суперсимметричных теориях Янга–Миллса спонтанно нарушена до максимальной коммутативной подгруппы калибровочной группы. Благодаря этому удается представить классические действия q - и ω -гипермультиплетов в виде сумм независимых одномерных действий соответствующих гипермультиплетов. Поэтому эффективные действия записываются через сумму “одномерных” эффективных действий, вычисленных ранее в работах [7, 8], а структура аргументов, от которых зависит эффективное действие, определяется весами представления калибровочной алгебры. При необходимости полученные в общем виде эффективные действия можно записать в явном виде для гипермультиплетов с другими калибровочными группами (например, исключительными). Для этого достаточно лишь знать веса соответствующего представления калибровочной алгебры.

В заключение отметим, что некоторые из полученных нами результатов обсуждались в недавнем препринте [16].

Благодарности. Авторы признательны Е. А. Иванову, С. М. Кузенко и Б. М. Зупнику за обсуждение полученных результатов. Работа И. Л. Б. была частично поддержана РФФИ, проект № 99-02-16017; РФФИ-DFG, проект № 96-02-00180; INTAS, проект INTAS-96-0308; грантовым центром Санкт-Петербургского университета, проект № 97-62-34.

Список литературы

- [1] *N. Seiberg, E. Witten.* Nucl. Phys. B. 1994. V. 426. P. 19.
- [2] *A. Klemm, W. Lerche, S. Yankielowicz.* Phys. Lett. B. 1995. V. 344. P. 169; *A. Klemm, W. Lerche.* Int. J. Mod. Phys. 1996. V. 11. № 11. P. 1929; *P. C. Argyres, A. E. Ferrari.* Phys. Rev. Lett. 1995. V. 74. P. 3931; *M. R. Douglas, S. H. Shenker.* Nucl. Phys. B. 1995. V. 447. P. 271; *A. Hannany, Y. Oz.* Nucl. Phys. B. 1995. V. 452. P. 283; *S. Naik.* Nucl. Phys. B. 1999. V. 538. P. 137.
- [3] *U. H. Danielsson, B. Sundborg.* Phys. Lett. B. 1995. V. 358. P. 273; *A. Brandhuber, K. Landsteiner.* Phys. Lett. B. 1995. V. 358. P. 73; *A. Hanany.* Nucl. Phys. B. 1996. V. 466. P. 85.
- [4] *I. L. Buchbinder, S. M. Kuzenko.* Ideas and Methods of Supersymmetry and Supergravity. Bristol, Philadelphia: IOP Publ., 1995; Rev. ed., 1998.
- [5] *A. Galperin, E. Ivanov, S. Kalitzin, V. Ogievetsky, E. Sokatchev.* Class. Quant. Grav. 1984. V. 1. P. 469.
- [6] *A. Galperin, E. Ivanov, V. Ogievetsky, E. Sokatchev.* Class. Quant. Grav. 1985. V. 2. P. 601; P. 617.
- [7] *I. L. Buchbinder, E. I. Buchbinder, E. A. Ivanov, S. M. Kuzenko, B. A. Ovrut.* Phys. Lett. B. 1997. V. 412. P. 309.
- [8] *E. I. Buchbinder, I. L. Buchbinder, E. A. Ivanov, S. M. Kuzenko.* Mod. Phys. Lett. A. 1998. V. 13. P. 1071.
- [9] *I. L. Buchbinder, E. I. Buchbinder, S. M. Kuzenko, B. A. Ovrut.* Phys. Lett. B. 1998. V. 417. P. 61.
- [10] *E. I. Buchbinder, I. L. Buchbinder, S. M. Kuzenko.* Phys. Lett. B. 1999. V. 446. P. 216.
- [11] *E. A. Ivanov, S. V. Ketov, B. M. Zupnik.* Nucl. Phys. B. 1998. V. 509. P. 53.
- [12] *S. V. Ketov.* Phys. Rev. D. 1998. V. 57. P. 1277.
- [13] *B. M. Zupnik.* Phys. Lett. B. 1987. V. 183. P. 175.
- [14] *М. А. Наймарк.* Теория представлений групп. М.: Наука, 1976.
- [15] *А. Барут, Р. Рончка.* Теория представлений групп и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1980.
- [16] *S. Eremin, E. Ivanov.* Nonholomorphic effective action of $N = 2$ SYM theory from harmonic superspace with central charges. Preprint JINR E2-99-190; hep-th/9908054, 1999.

Поступила в редакцию 27.VIII.1999 г.