Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Цыганов, Цепочки Тоды в методе Якоби, *ТМФ*, 2004, том 139, номер 2, 225–244

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf58>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 16:08:37

© 2004 г.

А. В. Цыганов*

ЦЕПОЧКИ ТОДЫ В МЕТОДЕ ЯКОБИ

Метод Якоби используется для построения различных интегрируемых систем, таких как системы Штекеля и цепочки Тоды, связанные с различными корневыми системами. Найдены канонические преобразования, связывающие интегралы движения для обобщенных открытых цепочек Тоды типов B_n, C_n и D_n .

Ключевые слова: интегрируемые системы, уравнение Гамильтона–Якоби, разделение переменных, цепочки Тоды.

1. ВВЕДЕНИЕ

По теореме Якоби [1], [2] интегрирование системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.1)$$

сводится к нахождению произвольного полного интеграла $S(q, \alpha, t)$ дифференциального уравнения в частных производных

$$H\left(q, \frac{\partial S(q, \alpha)}{\partial q}\right) = \alpha_1, \quad (1.2)$$

где $q = (q_1, \dots, q_n)$, $\partial S / \partial q = (\partial S / \partial q_1, \dots, \partial S / \partial q_n)$ и $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – константы. Если $S(q, \alpha)$ – произвольный полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби (1.2), то решения исходных канонических уравнений (1.1) находятся из соотношений

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad \beta_i = -\frac{\partial S}{\partial \alpha_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.3)$$

Согласно [2], [3] имеет место разделение переменных, если

$$S(q, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \equiv \sum_{i=1}^n S_i(Q_i, \alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad (1.4)$$

*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: tsiganov@mph.phys.spbu.ru

где i -е слагаемое S_i зависит только от i -й координаты Q_i и от n параметров α_j .

Если $\{Q_i, Q_j\} = 0$, то переменные $Q_1, \dots, Q_n$ называются переменными разделения, а сопряженные им импульсы находятся из уравнений Якоби (1.3)

$$P_i = \frac{\partial S_i(Q_i, \alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\partial Q_i}. \quad (1.5)$$

Уравнения (1.5) и их более симметричную форму

$$\Phi_i(Q_i, P_i, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0 \quad (1.6)$$

называют разделенными уравнениями [2], [3].

Данная работа посвящена следующей широко известной идее Якоби: “Главная трудность при интегрировании данных дифференциальных уравнений состоит в введении удобных переменных, для разыскания которых нет никакого общего правила. Поэтому мы должны идти обратным путем и, найдя какую-нибудь замечательную подстановку, разыскивать задачи, в которых она может быть с успехом применена” [2]. Ученики Якоби – Лиувиль [4] и Нейман [5] – реализовали эту идею и построили новое семейство интегрируемых систем с помощью известных переменных разделения. В рамках метода Якоби это семейство интегрируемых систем было затем обобщено Штеккелем [6]. Основной проблемой при изучении подобных систем является определение физических переменных, в терминах которых соответствующие уравнения движения (1.1) являются уравнениями Ньютона.

Мы докажем, что такие разные интегрируемые системы, как системы Штеккеля с квадратичными интегралами движения и обобщенные цепочки Тоды, обладающие полиномиальными интегралами движения более высокого порядка, могут быть построены в рамках единого метода Якоби.

2. ИНВАРИАНТНЫЙ МЕТОД ЯКОБИ

Согласно [7] теорема Якоби сводится к двум геометрическими фактам:

1) поверхность уровня интегралов $I_j(p, q) = \alpha_j$ уравнений Гамильтона есть лагранжево подмногообразие $F(\alpha)$, которое является полным интегралом уравнения Гамильтона–Якоби, содержащим n произвольных постоянных α_j ;

2) для любого n -параметрического семейства лагранжевых подмногообразий, т.е. для любого интеграла уравнения Гамильтона–Якоби, параметры α_j , понимаемые как функции на фазовом пространстве $\mathcal{M}$, образуют набор n попарно коммутирующих интегралов $I_j(p, q)$ уравнений Гамильтона.

Первое утверждение основывается на определении лагранжева подмногообразия $F(\alpha)$ как графика дифференциала многозначной функции $S(q, \alpha)$:

$$F(\alpha) = \left\{ (q, p) : p_i = \frac{\partial S(q, \alpha)}{\partial q_i} \right\}. \quad (2.1)$$

Во втором утверждении используется другое определение: если подмногообразие n -мерно и ограничение на него симплектической формы равно нулю, $\Omega(X, Y) = 0$, для любых X, Y , касательных к F , то данное подмногообразие является лагранжевым.

Из определения (1.4) следует, что в методе разделения переменных n -мерное лагранжево подмногообразие $F(\alpha)$ (2.1) представляется в виде произведения n одномерных лагранжевых подмногообразий (плоских кривых)

$$F(\alpha) \simeq \mathcal{C}^{(n)}: \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \times \cdots \times \mathcal{C}_n, \quad (2.2)$$

задающихся с помощью разделенных уравнений, которые могут быть представлены в виде (1.5), (1.6)

$$\mathcal{C}_i: \Phi_i(\lambda, \mu, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0.$$

Подчеркнем, что здесь (μ, λ) – координаты на плоскости, а в уравнения (1.6) входят канонические координаты P_i, Q_i .

Для построения интегрируемых систем в рамках метода Якоби используется следующая

ТЕОРЕМА 1. *Произведение n одномерных лагранжевых подмногообразий*

$$\mathcal{C}_i: \Phi_i(\lambda, \mu, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0 \quad \text{таких, что} \quad \det \left\| \frac{\partial \Phi_i(Q_i, P_i)}{\alpha_j} \right\| \neq 0, \quad (2.3)$$

является n -мерным лагранжевым подмногообразием $F(\alpha) = \mathcal{C}_1 \times \cdots \times \mathcal{C}_n$. Решения соответствующих n разделенных уравнений (1.6) относительно n параметров α_k являются функционально независимыми интегралами движения $I_k = \alpha_k(P, Q)$ в инволюции.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению (2.3) уравнения $\Phi_i = 0$ определяют регулярное отображение $\pi: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{B}$, где $\mathcal{N}$ – область фазового пространства $\mathcal{M}$, а $\mathcal{B}$ – область в пространстве параметров $\mathbb{R}^n$. В силу этого дифференциалы функций $I_k(P, Q) = \pi^{-1}(\alpha_k)$ линейно независимы (см. [7]).

Так как многообразия $F(\alpha)$ являются поверхностями уровня функций $I_k(P, Q)$, то соответствующие векторные поля X_k касаются всех многообразий $F(\alpha)$ при любом α . Поэтому в силу определения лагранжева подмногообразия имеем

$$\{I_j, I_k\} = \Omega(X_j, X_k) = 0, \quad i, k = 1, \dots, n.$$

Тем самым решения $I_k = \alpha_k(P, Q)$ разделенных уравнений (1.6), полученных из уравнений кривых (2.3), определяют интегрируемую систему в терминах переменных разделения.

Для некоторых уравнений (2.3) специального вида данная теорема была доказана непосредственным вычислением в классическом [6], [8]–[10] и квантовом [10] случаях.

Основной проблемой в данном подходе является построение канонического отображения переменных разделения (P, Q) в физические переменные (p, q) , для которых уравнения Гамильтона могут быть переписаны в виде уравнений Ньютона, уравнений Эйлера–Пуассона или в виде других физических уравнений. Напомним, что идея Якоби состоит в том, чтобы найдя подобное преобразование $(P, Q) \rightarrow (p, q)$ для какой-нибудь конкретной задачи, использовать затем это же преобразование для построения новых интегрируемых систем.

3. ОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ

Будем называть динамическую систему однородной, если соответствующее лагранжево подмногообразие $F(\alpha)$ (2.2) представимо в виде n -й симметрической степени $\mathcal{C}^{(n)} = S^n \mathcal{C}$ единственной алгебраической кривой, определяемой уравнением

$$\mathcal{C}: \Phi(\lambda, \mu, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0. \quad (3.1)$$

Подставляя в это уравнение вместо (μ, λ) переменные Дарбу (P, Q) так, что $\lambda = Q_i$ и $\mu = \phi(P_i, Q_i)$, мы получим n разделенных уравнений и семейство интегралов движения в инволюции.

Для того чтобы исключить переменную μ из уравнения (3.1), определим полином

$$e(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - Q_i) \quad (3.2)$$

или рациональную функцию

$$e(\lambda) = \frac{\prod_{i=1}^n (\lambda - Q_i)}{\prod_{k=1}^m (\lambda - \delta_k)}, \quad m \leq n, \quad \delta_i \in \mathbb{R}. \quad (3.3)$$

Используя функцию $e(\lambda)$, определим диагональную метрику $g_i(Q_1, \dots, Q_n)$ вида

$$g_i(Q_1, \dots, Q_n) = \text{Res} \big|_{\lambda=Q_i} e(\lambda)^{-1}$$

так, что

$$\frac{1}{e(\lambda)} = \sum_{i=1}^n \frac{g_i(Q_1, \dots, Q_n)}{\lambda - Q_i}, \quad (3.4)$$

и функцию Гамильтона для движения по геодезическим

$$H = \sum_{i=1}^n g_i(Q_1, \dots, Q_n) \phi_i(P_i), \quad (3.5)$$

где $\phi_i(P_i)$ – произвольные пока функции от P_i .

Дифференцируя исходную функцию $e(\lambda)$ по времени t , сопряженному гамильтониану H , получим

$$e_t(\lambda) \equiv \partial_t e(\lambda) \equiv \{e(\lambda), H\} = e(\lambda) \sum_{i=1}^n \frac{g_i \phi'_i}{\lambda - Q_i}. \quad (3.6)$$

Производная e_t , как функция от переменной λ , является интерполяционной функцией для $\phi'_i(P_i)$, так как

$$e_t(\lambda)|_{\lambda=Q_i} = \phi'_i(P_i) \equiv \frac{d}{dP_i} \phi_i(P_i). \quad (3.7)$$

Используя это свойство, перепишем уравнение (3.1) в виде

$$\Phi(\lambda, e_t(\lambda), \alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0. \quad (3.8)$$

Подставляя в это уравнение $\lambda = Q_i$, мы получим n разделенных уравнений (1.6), из которых и находятся интегралы движения $I_j(P, Q) = \alpha_j$.

В некоторых случаях мы можем найти физические переменные (p, q) , в которых уравнения движения являются уравнениями Ньютона. Эти случаи выделяются тем, что скобки Пуассона между полиномами e и e_t (3.2), (3.6)

$$\begin{aligned} \{e_t(\lambda), e(\mu)\} &= \left\{ e(\lambda) \sum_{i=1}^n \frac{g_i \phi'_i}{\lambda - Q_i}, \prod_{k=1}^n (\mu - Q_k) \right\} = -e(\lambda) e(\mu) \sum_{i=1}^n \frac{g_i \phi''_i}{(\lambda - Q_i)(\mu - Q_i)} = \\ &= \frac{e(\lambda) e(\mu)}{\lambda - \mu} \sum_{i=1}^n \left(\frac{g_i \phi''_i}{\lambda - Q_i} - \frac{g_i \phi''_i}{\mu - Q_i} \right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

замыкаются, т.е. выражаются через исходные полиномы $e(\lambda)$ и $e_t(\lambda)$. Это происходит только в двух следующих случаях:

$$\phi''_i = \text{const} \Rightarrow \phi_i = P_i^2, \quad (3.10)$$

так что

$$\{e_t(\lambda), e(\mu)\} = \frac{1}{\lambda - \mu} (e(\mu) - e(\lambda)),$$

и

$$\phi''_i = \phi'_i \Rightarrow \phi_i = \exp(P_i), \quad (3.11)$$

так что

$$\{e_t(\lambda), e(\mu)\} = \frac{1}{\lambda - \mu} (e(\mu) e_t(\lambda) - e_t(\mu) e(\lambda)),$$

с точностью до канонических преобразований $P_i \rightarrow aP_i + b_i$. При вычислении первых скобок мы воспользовались разложением функции $e^{-1}(\lambda)$ (3.4).

Далее мы покажем, что условие замыкания (3.9) приводит к системам, отвечающим только гиперэллиптическим кривым $\mathcal{C}$ (3.1). Первый случай отвечает системам типа Штекеля с квадратичными интегралами движения, а второй случай – цепочкам Тоды и связанным с ними системам.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если вместо $\phi_i(P_i)$ использовать функции $\phi_i(P_i, Q_i)$, то скобки между функцией $e(\lambda)$ и ее производной $e_t(\lambda)$ могут быть замкнуты также только в двух случаях:

$$\phi_i = \varphi(Q_i) P_i^2, \quad \phi_i = \varphi(Q_i) \exp(P_i). \quad (3.12)$$

Заметим, что второй случай после канонического преобразования $P_i \rightarrow P_i + \ln \varphi(Q_i)$ сводится к рассмотренному выше случаю (3.11). В дальнейшем мы используем этот факт при рассмотрении цепочек Тоды, связанных с корневыми системами типов B_n, C_n и D_n .

4. СИСТЕМЫ ТИПА ШТЕККЕЛЯ

Положим $\phi_i = P_i^2$ (3.10) и рассмотрим квадратичный по импульсам гамильтониан H (3.5). Дифференцируя исходную функцию $e(\lambda)$ (3.3) по времени t , сопряженному гамильтониану H , получим уравнение

$$e_{ttt}(\lambda) = 0, \quad (4.1)$$

обладающее двумя интегралами

$$\sigma(\lambda) = e_{tt}(\lambda), \quad \tau(\lambda) = e(\lambda)e_{tt}(\lambda) - \frac{e_t(\lambda)^2}{2}. \quad (4.2)$$

Интеграл $\tau(\lambda)$ является производящей функцией n интегралов движения I_j :

$$\tau(\lambda) = \frac{\sum_{j=1}^{n-1} I_j \lambda^j}{\prod_{k=1}^m (\lambda - \delta_k)^2}, \quad \text{так что} \quad H = \frac{1}{2} \text{Res} \Big|_{\lambda=\infty} \tau(\lambda). \quad (4.3)$$

После подстановки $\lambda = Q_i$ и $I_j = \alpha_j$ в уравнение

$$\tau(\lambda) = e(\lambda)e_{tt}(\lambda) - \frac{e_t(\lambda)^2}{2} = \frac{\sum_{j=1}^{n-1} I_j \lambda^j}{\prod_{k=1}^m (\lambda - \delta_k)^2} \quad (4.4)$$

получим n разделенных уравнений, зависящих от n параметров α_k :

$$-\frac{P_i^2}{2} = \frac{\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j Q_i^j}{\prod_{k=1}^m (Q_i - \delta_k)^2}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.5)$$

которые удовлетворяют условиям теоремы 1 и, следовательно, интегралы движения I_k (4.3) находятся в инволюции:

$$\{I_j, I_k\} = 0.$$

Определим теперь физические координаты (p, q) так, чтобы соответствующие уравнения движения были уравнениями Ньютона (см. ссылки в [11]). Для этого введем функцию

$$\mathcal{A}(\lambda, Q)^2 = e(\lambda, Q), \quad (4.6)$$

удовлетворяющую уравнению

$$\tau(\lambda) = 2\mathcal{A}^3 \mathcal{A}_{tt} \Leftrightarrow \mathcal{A}_{tt}(\lambda, Q) = \frac{1}{2} \tau(\lambda, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \mathcal{A}^{-3}(\lambda, Q). \quad (4.7)$$

Последнее уравнение является уравнением Ньютона, так как это уравнение второго порядка для функции от координат Q_j и оно зависит от параметров $\alpha_j = I_j$.

Таким образом, коэффициенты и вычеты функции $\mathcal{A}$ удовлетворяют уравнениям движения Ньютона и являются искомыми физическими переменными, которые определяются из соотношений

$$\mathcal{A} = \sqrt{e(\lambda, Q_i)} = \sum q_j \lambda^j, \quad \mathcal{A}_t = \frac{e_t(\lambda, P, Q)}{2\sqrt{e(\lambda, q)}} = \sum p_j \lambda^j.$$

Например, полагая $n = m$ в уравнениях (3.2) и (4.6), мы получим определение эллиптических координат

$$e(\lambda) = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda - Q_i}{\lambda - \delta_i} = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{q_i^2}{\lambda - \delta_i},$$

построенных Якоби для $n = 3$ [2].

4.1. Интегрируемые обобщения движения по геодезическим. Рассмотрим теперь интегрируемые обобщения исходной функции Гамильтона H (3.5), используя различные деформации разделенных уравнений (3.8), (4.5). Например, деформация исходного интеграла $\tau(\lambda)$ вида

$$\begin{aligned}\hat{\tau}(\lambda) &= \xi(\lambda, P, Q) e(\lambda, Q) - \varphi(\lambda) e_t(\lambda, P, Q)^2 = \\ &= \frac{\sum_k a_k \lambda_k + \sum_{j \in \varrho} \tilde{I}_j \lambda^j}{\prod_{k=1}^m (\lambda - \delta_k)^2}, \quad a_k \in \mathbb{R},\end{aligned}\quad (4.8)$$

приводит к следующим новым разделенным уравнениям:

$$-\varphi(Q_i) P_i^2 = \frac{\sum_k a_k Q_i^k + \sum_{j \in \varrho} \tilde{\alpha}_j Q_i^j}{\prod_{k=1}^m (Q_i - \delta_k)^2}. \quad (4.9)$$

Здесь $\varphi(\lambda)$ – произвольный полином, который не зависит от динамических переменных, $\varrho = \{j_1, \dots, j_N\}$ – произвольная выборка, a_k – постоянные параметры. По этим данным неизвестная функция $\xi(\lambda, P, Q)$ и новые интегралы движения в инволюции $\tilde{I}_j$ определяются из уравнения (4.8) однозначно.

Основной проблемой остается выбрать производящие функции интегралов движения $\hat{\tau}(\lambda)$ (4.8) так, чтобы соответствующие уравнения движения в переменных (p, q) (4.6) оставались бы уравнениями движения Ньютона. Некоторые примеры подобных деформаций могут быть найдены в работе [11].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Вместо полинома $\varphi(\lambda)$ в уравнении (4.8) можно использовать произвольную рациональную функцию, потребовав, чтобы только n вычетов (коэффициентов) в интеграле $\hat{\tau}(\lambda)$ были функциями от динамических переменных, а остальные вычеты (коэффициенты) были постоянными параметрами.

4.2. Матрицы Лакса. Матрица Лакса для движения по геодезическим [11]

$$L(\lambda) = \begin{pmatrix} -e_t/2 & e \\ -e_{tt}/2 & e_t/2 \end{pmatrix} (\lambda) \quad (4.10)$$

однозначно восстанавливается из условий

$$\frac{d}{dt} \operatorname{tr} L(\lambda) = 0, \quad \frac{d}{dt} \det L(\lambda) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \tau = 0. \quad (4.11)$$

Дифференцируя по времени t уравнения (3.10) и уравнения $\{e(\lambda), e(\mu)\} = 0$, легко проверить [11], что скобки Пуассона между элементами матрицы Лакса $L(\lambda)$ (4.10) компактно записываются в виде

$$\{\overset{1}{L}(\lambda), \overset{2}{L}(\mu)\} = [r(\lambda, \mu), \overset{1}{L}(\lambda) - \overset{2}{L}(\mu)]. \quad (4.12)$$

Здесь используются принятые тензорные обозначения

$$\overset{1}{L}(\lambda) = L(\lambda) \otimes \operatorname{Id}, \quad \overset{2}{L}(\mu) = \operatorname{Id} \otimes L(\mu),$$

а $r(\lambda, \mu)$ – классическая рациональная r -матрица

$$r(\lambda, \mu) = \frac{\Pi}{\lambda - \mu} = \frac{1}{\lambda - \mu} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Для интегрируемых обобщений вида (4.8) матрицы Лакса имеют более сложную структуру и удовлетворяют квадратично-линейным r -матричным скобкам с динамическими r -матрицами [11]. Мы не знаем пока, как включить конструкцию этих матриц в существующий метод классической r -матрицы.

5. ЦЕПОЧКИ ТОДЫ

Определим две функции Гамильтона вида (3.5)

$$H_{\pm} = \sum_{i=1}^n g_i(Q_1, \dots, Q_n) \exp(\pm P_i), \quad g_i(Q_1, \dots, Q_n) = \prod_{j \neq i}^n (Q_i - Q_j)^{-1}, \quad (5.1)$$

и три производные от функции $e(\lambda)$

$$\begin{aligned} e_{t_+}(\lambda) &\equiv \partial_{t_+} e \equiv \{e, H_+\} = -\lambda^{n-1} H_+ + \dots, \\ e_{t_-}(\lambda) &\equiv \partial_{t_-} e \equiv \{e, H_-\} = \lambda^{n-1} H_- + \dots, \\ e_{t_+ t_-}(\lambda) &\equiv \{\{e, H_+\}, H_-\} = \{\{e, H_-\}, H_+\} = -\lambda^{n-2} H_+ H_- + \dots. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Все остальные производные равны нулю, поэтому функции $e_{t_{\pm}}(\lambda)$ и $e_{t_+ t_-}(\lambda)$ являются производящими функциями интегралов движения для гамильтонианов $H_{\pm}$ и $H_+ H_-$.

5.1. Канонические преобразования. В отличие от систем типа Штеккеля, цепочки Тоды изначально определялись в физических переменных так, чтобы уравнения движения были уравнениями Ньютона. Поэтому ни в одном из существующих эквивалентных способов определения канонического преобразования [10], [12], [13], связывающего физические переменные и переменные разделения, не понятно, чем выделены физические переменные, удовлетворяющие уравнениям Ньютона.

Для определения физических переменных мы используем метод, предложенный в работе [13]. Используя разложение функции $e^{-1}(\lambda)$ (3.4), можно доказать, что производные (5.2) удовлетворяют тождеству

$$e(\lambda) \cdot e_{t_+ t_-}(\lambda) - e_{t_+}(\lambda) \cdot e_{t_-}(\lambda) = 1. \quad (5.3)$$

Поэтому введем матрицу

$$T(\lambda) = \begin{pmatrix} e & e_{t_+} \\ e_{t_-} & e_{t_+ t_-} \end{pmatrix}(\lambda), \quad (5.4)$$

определитель которой равен единице, а форма совпадает с формой матриц Лакса для систем Штеккеля (4.10). Например, при $n = 1$ матрица $T(\lambda)$ (5.4) имеет вид

$$T(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda - Q & -\exp(P) \\ \exp(-P) & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Матрица $T(\lambda)$ (5.4) определяет представление алгебры Складина в терминах переменных разделения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С помощью дифференцирования по времени $t_{\pm}$ уравнения (3.11) и уравнения $\{e(\lambda), e(\mu)\} = 0$ легко проверить, что скобки Пуассона между матричными элементами матрицы Лакса $T(\lambda)$ (5.4) компактно записываются в виде скобок Складина [13]:

$$\{\overset{1}{T}(\lambda), \overset{2}{T}(\mu)\} = [r(\lambda, \mu), \overset{1}{T}(\lambda)\overset{2}{T}(\mu)]. \quad (5.6)$$

Определим теперь канонические координаты (p, q) , $\{p_i, q_j\} = \delta_{ij}$. Подставляя $P = q_i$ и $Q = p_i$ в матрицу (5.5), введем n матриц первого порядка по λ , удовлетворяющих уравнению (5.6):

$$L_j(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda - p_j & -\exp(q_j) \\ \exp(-q_j) & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

Согласно [13] произведение этих матриц

$$T(\lambda) = L_n(p_n, q_n)L_{n-1}(p_{n-1}, q_{n-1}) \dots L_1(p_1, q_1) = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{pmatrix}(\lambda) \quad (5.8)$$

определяет представление квадратичной алгебры Складина для цепочек Тоды типа A_n .

ТЕОРЕМА 2 [13]. *Уравнения*

$$e(\lambda) = \mathcal{A}(\lambda), \quad e_{t_+}(\lambda) = \mathcal{B}(\lambda) \quad \text{или} \quad e(\lambda) = \mathcal{A}(\lambda), \quad e_{t_-}(\lambda) = \mathcal{C}(\lambda) \quad (5.9)$$

определяют каноническое преобразование

$$\mathcal{U}: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}, \quad \mathcal{U}: (P, Q) \rightarrow (p, q), \quad (5.10)$$

связывающее переменные разделения (P, Q) и физические переменные (p, q) .

Приравнявая коэффициенты при степенях λ в (5.9), мы получим $2n$ невырожденных уравнений для $2n$ неизвестных (p, q) . Данное преобразование является каноническим, так как и левые, и правые части уравнений (5.9) удовлетворяют скобкам (5.6).

В новых переменных функция $e(\lambda)$ и ее производные имеют вид

$$\begin{aligned} e(\lambda) &= \lambda^n - \lambda^{n-1} \sum_{j=1}^n p_j + \left(\sum_{i>j}^n p_i p_j - \sum_{j=1}^{n-1} \exp(q_{j+1} - q_j) \right) \lambda^{n-2} + \dots, \\ e_{t_+}(\lambda) &= -\exp(q_1) \lambda^{n-1} + \left(\exp(q_1) \sum_{j=2}^n p_j \right) \lambda^{n-2} + \dots, \\ e_{t_-}(\lambda) &= \exp(-q_n) \lambda^{n-1} - \left(\exp(-q_n) \sum_{j=1}^{n-1} p_j \right) \lambda^{n-2} + \dots. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Подчеркнем, что здесь во втором выражении суммирование импульсов p_j начинается с $j = 2$, а в третьем выражении оно заканчивается при $j = n - 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Очевидно, что для определения канонического преобразования (5.9) совсем не обязательно знать все элементы матрицы Лакса. Поэтому для нахождения новых переменных (p, q) вместо матрицы Лакса можно воспользоваться, например, рекуррентными соотношениями

$$e(\lambda, n) = (\lambda - p_n)e(\lambda, n-1) - \exp(q_n)e_{t-}(\lambda, n-1), \quad e_{t-}(\lambda, n) = \exp(-q_n)e(\lambda, n-1),$$

которые были введены в [12] и использовались в [13].

5.2. Цепочки Тоды типа A_n . Рассмотрим цепочки Тоды, связанные с корневой системой типа A_n [14]. Следуя [9], перепишем уравнение (3.8) в виде производящего полинома для n интегралов движения $I_k(P, Q)$:

$$\tau(\lambda) = [\xi(\lambda, P, Q) + \varphi_+(\lambda)\partial_{t+} + \varphi_-(\lambda)\partial_{t-}]e(\lambda) = \sum_{j=n}^{n+l} a_{j-n}\lambda^j + \sum_{k=0}^{n-1} I_k\lambda^k. \quad (5.12)$$

Здесь a_k — произвольные параметры, l — произвольное целое число и $\varphi_{\pm}$ — два произвольных полинома по λ степени m с постоянными коэффициентами,

$$\begin{aligned} \varphi_+(\lambda) &= b_m\lambda^m + b_{m-1}\lambda^{m-1} + \dots + b_0, \\ \varphi_-(\lambda) &= c_m\lambda^m + c_{m-1}\lambda^{m-1} + \dots + c_0. \end{aligned}$$

Легко проверить, что неизвестные коэффициенты многочлена $\xi = \sum \xi_j(P, Q)\lambda^j$ и неизвестные функции $I_k(P, Q)$ в (5.12) однозначно определяются из уравнения (5.12) как функции от динамических переменных (P, Q) и параметров a_i , b_i и c_i .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Функции $I_k = \alpha_k(P, Q)$, определяемые уравнением (5.12), функционально независимы и находятся в инволюции.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя $\lambda = Q_i$ в уравнение (5.12), мы получим n разделенных уравнений

$$\varphi_+(Q_i)\exp(P_i) + \varphi_-(Q_i)\exp(-P_i) = \sum_{j=n}^{n+l} a_{j-n}Q_i^j + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k Q_i^k, \quad (5.13)$$

удовлетворяющих условиям теоремы 1. Поэтому функции $I_k = \alpha_k(P, Q)$, полученные из соотношений (5.12), функционально независимы и находятся в инволюции.

ТЕОРЕМА 3. *При $m = 0$ и $l = 0, 1$ интегралы движения I_k , определяемые уравнением (5.12), совпадают с интегралами движения для цепочек Тоды типа A_n и цепочек Тоды типа A_{n+1} в системе центра масс.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя в правую часть уравнения (5.12) функцию $e(\lambda)$ и ее производные $e_{t_{\pm}}$ в терминах переменных (p, q) (5.9), можно легко найти интегралы движения $I_k(p, q)$ как функции от физических переменных. Так, при $m = l = 0$ из уравнения (5.12)

$$\tau(\lambda) = [a_0 + b_0 \partial_{t_+} + c_0 \partial_{t_-}]e(\lambda) = a_0 \lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} I_k \lambda^k \quad (5.14)$$

следует, что

$$I_{n-1} = -a_0 \sum_{i=1}^n Q_i + b_0 H_+ - c_0 H_- = -a_0 \sum_{i=1}^n p_i - b_0 \exp(q_1) + c_0 \exp(-q_n) \quad (5.15)$$

и

$$I_{n-2} = a_0 \sum_{i>j}^n p_i p_j + b_0 \exp(q_1) \sum_{i=2}^n p_i - c_0 \exp(-q_n) \sum_{i=1}^{n-1} p_i.$$

После замены координат

$$v_1: p_1 \rightarrow p_1 - \frac{b_0}{a_0} \exp(q_1), \quad v_n: p_n \rightarrow p_n + \frac{c_0}{a_0} \exp(q_1)$$

первый из интегралов становится полным импульсом системы, $I_{n-1} = a_0 \sum_{i=1}^n p_i$, а второй интеграл является гамильтонианом для периодической цепочки Тоды типа A_n ,

$$H_A = \frac{a_0}{2} I_{n-1}^2 - I_{n-2} = a_0 \sum_{i=1}^n \frac{p_i^2}{2} + a_0 \sum_{i=1}^{n-1} \exp(q_{i+1} - q_i) - \frac{b_0 c_0}{a_0} \exp(q_1 - q_n). \quad (5.16)$$

С другой стороны, при $m = 0$ и $l = 1$ имеем

$$\xi(\lambda, P, Q) = a_1 \left(\lambda + \sum_{i=1}^n Q_i \right) + a_0 = a_1 \left(\lambda + \sum_{i=1}^n p_i \right) + a_0,$$

а первый из интегралов

$$I_{n-1} = a_0 \sum_{i=1}^n Q_i + a_1 \sum_{i \geq j}^n Q_i Q_j + b_0 H_+ - c_0 H_-$$

является квадратично-линейным полиномом по импульсам вида

$$I_{n-1} = a_0 \sum_{j=1}^n p_j - a_1 \left(\sum_{i \geq j}^n p_i p_j + \sum_{j=1}^{n-1} \exp(q_{j+1} - q_j) \right) - b_0 \exp(q_1) - c_0 \exp(-q_n). \quad (5.17)$$

Данная функция совпадает с функцией Гамильтона для периодической цепочки Тоды типа A_{n+1} в системе центра масс. В этом случае n координат q_j являются координатами Якоби в конфигурационном пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ [15].

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Коэффициенты полинома $e(\lambda)$ являются интегралами движения для открытой цепочки Тоды типа A_n , а его корни являются переменными разделения для открытой и периодической цепочек Тоды типов A_n и A_{n+1} . Ниже аналогичный результат мы получим и для обобщенных цепочек Тоды.

6. ОБОБЩЕННЫЕ ЦЕПОЧКИ ТОДЫ

Любые замены переменных $(\lambda, \mu) \rightarrow (\tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$ в уравнении (3.1), определяющем алгебраическую кривую $\mathcal{C}$, изменяют форму уравнения. В методе Якоби подобные замены порождают канонические и неканонические преобразования переменных разделения $(Q_i, P_i) \rightarrow (\tilde{Q}_i, \tilde{P}_i)$, связывающие различные интегрируемые системы.

В качестве примера рассмотрим неканоническое преобразование $(Q_i, P_i) \rightarrow (Q_i^2, P_i)$ и определим новый полином

$$\begin{aligned} \hat{e}(\lambda) &= \prod_{i=1}^n (\lambda^2 - Q_i^2) = \lambda^{2n} - \lambda^{2n-2} \sum_{i=1}^n Q_i^2 + \dots = \\ &= (-1)^n e(\lambda) e(-\lambda) = \lambda^{2n} - \lambda^{2n-2} \left(\sum_{j=1}^n p_j^2 + 2 \sum_{j=1}^{n-1} \exp(q_{j+1} - q_j) \right) + \dots, \quad (6.1) \end{aligned}$$

который выражается через исходный полином $e(\lambda)$ (3.2). Далее определим метрику

$$\hat{g}_i(Q_1, \dots, Q_n) = 2 \operatorname{Res} \big|_{\lambda=Q_i} \hat{e}(\lambda)^{-1} = \frac{1}{Q_i} \prod_{j \neq i}^n \frac{1}{Q_i^2 - Q_j^2} = \frac{g_i}{Q_i} \prod_{j \neq i}^n \frac{1}{Q_i + Q_j}$$

и функции Гамильтона для движения по геодезическим

$$\hat{H}_{\pm} = \sum_{i=1}^n \hat{g}_i(Q_1, \dots, Q_n) \exp(\pm P_i),$$

в которые входят импульсы P_i , сопряженные исходным переменным Q_i .

Подставляя $\lambda = Q_i$ в уравнение вида (5.12)

$$\hat{\tau}(\lambda) = [\xi(\lambda, P, Q) + \varphi_+(\lambda) \partial_{\hat{t}_+} + \varphi_-(\lambda) \partial_{\hat{t}_-}] \hat{e}(\lambda) = \sum_{j=n}^{n+l} a_{n-j} \lambda^{2j} + \sum_{k=0}^{n-1} \hat{I}_k \lambda^{2k}, \quad (6.2)$$

получим n разделенных уравнений

$$\varphi_+(Q_i) \exp(P_i) + \varphi_-(Q_i) \exp(-P_i) = \sum_{j=n}^{n+l} a_{n-j} Q_i^{2j} + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k Q_i^{2k}, \quad (6.3)$$

удовлетворяющих условиям теоремы 1. Решения этих уравнений относительно n параметров α_k являются интегралами движения $\hat{I}_k(P, Q)$ в инволюции. Далее, используя идею Якоби, мы можем воспользоваться уже известным каноническим преобразованием $\mathcal{U}: (P, Q) \rightarrow (p, q)$ (5.10), для того чтобы переписать эти интегралы в виде функций от физических переменных $\hat{I}_j(p, q)$.

6.1. Открытые обобщенные цепочки Тоды. Переход к физическим переменным (p, q) выполнить особенно легко, если в уравнение (6.2) входит либо производная по $\hat{t}_-$, либо производная по $\hat{t}_+$,

$$\hat{\tau}_{\pm}(\lambda) = [\xi_{\pm}(\lambda, P, Q) + \varphi_{\pm}(\lambda) \partial_{\hat{t}_{\pm}}] \hat{e}(\lambda) = \sum_{j=n}^{n+l} a_{n-j} \lambda^{2j} + \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}_k^{(\pm)} \lambda^{2k}. \quad (6.4)$$

Соответствующие интегрируемые системы будем называть открытыми цепочками.

Разделенные уравнения (6.3) для открытых цепочек (6.4)

$$\varphi_{\pm}(Q_i) \exp(\pm P_i) = \sum_{j=n}^{n+l} a_{n-j} Q_i^{2j} + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k Q_i^{2k}$$

каноническими преобразованиями импульсов

$$P_i \rightarrow P_i \mp \ln \varphi_{\pm}(Q_i) \quad (6.5)$$

приводятся к уравнениям

$$\exp(\pm P_i) = \sum_{j=n}^{n+l} a_{n-j} Q_i^{2j} + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k Q_i^{2k}, \quad (6.6)$$

которые не зависят от функций $\varphi_{\pm}$ и связаны друг с другом преобразованием $P_i \rightarrow -P_i$.

Например, при $l = 0$ интегралы $\hat{I}_{n-1}^{(\pm)}$ для любой открытой цепочки вида (6.4) приводятся преобразованиями импульсов (6.5) к интегралам вида

$$\begin{aligned} \hat{I}_{n-1}^{(+)} &= -a_0 \sum_{i=1}^n Q_i^2 + 2b_0 \sum_{i=1}^n Q_i \hat{g}_i \exp(P_i) = -a_0 \sum_{i=1}^n Q_i^2 + 2b_0 \sum_{i=1}^n \frac{g_i \exp(P_i)}{\prod_{j \neq i}^n (Q_i + Q_j)}, \\ \hat{I}_{n-1}^{(-)} &= -a_0 \sum_{i=1}^n Q_i^2 - 2c_0 \sum_{i=1}^n Q_i \hat{g}_i \exp(-P_i) = -a_0 \sum_{i=1}^n Q_i^2 - 2c_0 \sum_{i=1}^n \frac{g_i \exp(-P_i)}{\prod_{j \neq i}^n (Q_i + Q_j)}. \end{aligned}$$

После дополнительных канонических преобразований

$$\mathcal{Z}_{\pm}: P_i \rightarrow P_i \mp \sum_{j \neq i}^n \ln(Q_i + Q_j) \quad (6.7)$$

и перенормировки эти функции имеют вид

$$\begin{aligned} H_{B_1} &= (-2a_0)^{-1} \hat{I}_{n-1}^{(+)} = \sum_{i=1}^n \frac{Q_i^2}{2} + b_0 a_0^{-1} \sum_{i=1}^n g_i \exp(P_i) = \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{p_j^2}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} \exp(q_{j+1} - q_j) - b_0 a_0^{-1} \exp(q_1), \\ H_{B_2} &= (-2a_0)^{-1} \hat{I}_{n-1}^{(-)} = \sum_{i=1}^n Q_i^2 + c_0 a_0^{-1} \sum_{i=1}^n g_i \exp(-P_i) = \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{p_j^2}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} \exp(q_{j+1} - q_j) + c_0 a_0^{-1} \exp(-q_n), \end{aligned} \quad (6.8)$$

где мы использовали соотношения (5.11) и (6.1).

Гамильтонианы $H_{B_{1,2}}$ (6.8) совпадают с приведенными в работе [14] функциями Гамильтона для цепочек Тоды, связанных с корневой системой типа B_n . Итак, нами доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если $\{Q_i, P_i\}$ – переменные разделения для открытой цепочки Тоды типа A_n (5.9), то $\{Q_i, P_i \mp \sum_{j \neq i}^n \ln(Q_i + Q_j)\}$ – переменные разделения для открытой цепочки Тоды типа B_n .

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Используемые в (6.8) преобразования Z_+ и Z_- (6.7) сдвигают исходные импульсы P_i в разные стороны, и поэтому мы не можем использовать подобные преобразования для описания периодических цепочек типа (6.2).

Напомним, что для построения интегралов $\hat{I}_k^{(\pm)}$ мы использовали замену $\lambda \rightarrow \lambda^2$ (6.1), которая приводит к неканоническому преобразованию $Q_i \rightarrow Q_i^2$ в интегралах движения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Неканонические преобразования координат $Q_i \rightarrow Q_i^2$ отображают интегралы движения I_k (5.14) для открытой цепочки типа A_n в интегралы движения $\hat{I}_k^{(\pm)}$ (6.4) для открытой цепочки типа B_n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разделенные уравнения (5.13) для цепочки типа A_n совпадают с разделенными уравнениями (6.6) для открытой цепочки типа B_n после замены координат $Q_i \rightarrow Q_i^2$ и импульсов (6.7). В силу этого решения этих уравнений относительно значений интегралов движения α_k совпадают:

$$\hat{I}_k^{(\pm)}(P_i, Q_i) = I_k(P_i, Q_i^2).$$

Для интегралов I_{n-1} (5.15) и $\hat{I}_{n-1}^{(\pm)}$ (6.8) это можно увидеть явно.

Из сказанного выше следует, что канонические преобразования (6.5) отображают интегралы движения для любой открытой цепочки (6.4) при $l = 0$ в интегралы движения открытой цепочки Тоды типа B_n , которые, в свою очередь, связаны неканоническим преобразованием с интегралами движения открытой цепочки Тоды типа A_n .

ТЕОРЕМА 4. Если

$$\varphi_+(\lambda) = b_2 \lambda^2 + b_1 \lambda + b_0, \quad \varphi_-(\lambda) = c_2 \lambda^2 + c_1 \lambda + c_0, \quad (6.9)$$

то канонические преобразования импульсов

$$W_{\pm}: P_i \rightarrow P_i \pm \ln \varphi_{\pm}(Q_i) \quad (6.10)$$

отображают интегралы движения для открытых цепочек Тоды типа B_n в интегралы движения для открытых цепочек Тоды типов C_n и D_n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя каноническое преобразование (6.10) и общие для всех систем преобразования импульсов $\mathcal{Z}_{\pm}$ (6.7), определим семейство гамильтонианов

$$H_{\pm}^{\varphi} = \sum_{i=1}^n g_i(Q_1, \dots, Q_n) \varphi_{\pm}(Q_i) \exp(\pm P_i).$$

Соответствующие производные от полинома $\hat{e}(\lambda)$ имеют вид

$$\partial_{t_{\pm}}^{\varphi} \hat{e}(\lambda) \equiv \{\hat{e}, H_{\pm}^{\varphi}\} = \hat{e}(\lambda) \sum_{i=1}^n g_i \exp(\pm P_i) \frac{2\varphi_{\pm}(Q_i)}{\lambda^2 - Q_i^2}. \quad (6.11)$$

Входящее в данное выражение отношение полиномов $\varphi_{\pm}(Q_i)$ и $\lambda^2 - Q_i^2$ разлагается на простые множители для полиномов $\varphi_{\pm}(\lambda)$ второй степени по λ (6.9):

$$\frac{2\varphi_{\pm}(Q_i)}{\lambda^2 - Q_i^2} = \frac{\varphi_{\pm}(\lambda)}{\lambda(\lambda - Q_i)} + \frac{\varphi_{\pm}(-\lambda)}{-\lambda(-\lambda - Q_i)} - \frac{\partial^2 \varphi_{\pm}(\lambda)}{\partial \lambda^2}.$$

В левую часть данного разложения входят функции $\varphi_{\pm}$ от Q_i , а в правую часть – те же функции, но от переменной λ , которые можно вынести из под знака суммы в выражении (6.11):

$$\partial_{t_{\pm}}^{\varphi} \hat{e}(\lambda) = \left[\frac{\varphi_{\pm}(\lambda) e_{t_{\pm}}(\lambda)}{\lambda e(\lambda)} + \frac{\varphi_{\pm}(-\lambda) e_{t_{\pm}}(-\lambda)}{-\lambda e(-\lambda)} - \frac{\partial^2 \varphi_{\pm}(\lambda)}{\partial \lambda^2} H_{\pm} \right] \hat{e}(\lambda). \quad (6.12)$$

Подставляя полученные выражения в производящие функции $\hat{t}_{\pm}$ (6.4), мы получим уравнения для определения интегралов движения $\hat{I}_k^{(\pm)}$, которые при $l = 0$ имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{t}_{\pm} &= \left[a_0 + \frac{\varphi_{\pm}(\lambda) e_{t_{\pm}}(\lambda)}{\lambda e(\lambda)} + \frac{\varphi_{\pm}(-\lambda) e_{t_{\pm}}(-\lambda)}{-\lambda e(-\lambda)} - \frac{\partial^2 \varphi_{\pm}(\lambda)}{\partial \lambda^2} H_{\pm} \right] \hat{e}(\lambda) = \\ &= a_0 \lambda^{2n} + \sum_{k=0}^{n-1} \hat{I}_k^{(\pm)} \lambda^{2k}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Подставляя в это выражение функцию $e(\lambda)$ и ее производные в виде функций от физических координат (5.11) и затем приравнявая коэффициенты при λ^{2n-2} , мы получим искомые гамильтонианы.

Так, для постоянных функций $\varphi_{\pm} = \text{const}$ мы получим функции Гамильтона $H_{B_{1,2}}$ (6.8) для открытых цепочек Тоды типа B_n .

Для полиномов первого порядка $\varphi_+ = b_1 \lambda$, $\varphi_- = c_1 \lambda$ соответствующие функции

$$\begin{aligned} \hat{I}_{n-1}^{(+)} &= -2a_0 \left(\sum_{j=1}^n \frac{p_j^2}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} \exp(q_{j+1} - q_j) \right) + 2b_1 p_1 \exp(q_1), \\ \hat{I}_{n-1}^{(-)} &= -2a_0 \left(\sum_{j=1}^n \frac{p_j^2}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} \exp(q_{j+1} - q_j) \right) - 2c_1 p_n \exp(-q_n) \end{aligned}$$

после канонических преобразований

$$w_+ : p_1 \rightarrow p_1 + \frac{b_1}{a_0} \exp(q_1), \quad w_- : p_n \rightarrow p_n - \frac{c_1}{a_0} \exp(-q_n) \quad (6.14)$$

и перенормировки совпадают с функциями Гамильтона

$$\begin{aligned} H_{C_1} &= (-2a_0)^{-1} \hat{I}_{n-1}^{(+)} = \sum_{j=1}^n \frac{p_j^2}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} \exp(q_{j+1} - q_j) + b_1 a_0^{-1} \exp(2q_1), \\ H_{C_2} &= (-2a_0)^{-1} \hat{I}_{n-1}^{(-)} = \sum_{j=1}^n \frac{p_j^2}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} \exp(q_{j+1} - q_j) + c_1 a_0^{-1} \exp(-2q_n) \end{aligned} \quad (6.15)$$

для цепочек Тоды, связанных с корневой системой C_n [14]. Таким образом, мы доказали, что функции Гамильтона (6.8) и (6.15) для открытых цепочек Тоды типов B_n и C_n связаны каноническими преобразованиями $\mathcal{W}_\pm$ (6.10) и $w_\pm$ (6.14).

Для полиномов второго порядка $\varphi_+ = b_2 \lambda^2$ соответствующие интегралы

$$\begin{aligned} \hat{I}_{n-1}^{(+)} &= -2a_0 \left(\sum_{j=1}^n \frac{p_j^2}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} \exp(q_{j+1} - q_j) \right) + 2b_2 (p_1^2 \exp(q_1) + \exp(q_2)), \\ \hat{I}_{n-1}^{(-)} &= -2a_0 \left(\sum_{j=1}^n \frac{p_j^2}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} \exp(q_{j+1} - q_j) \right) - 2c_2 (p_n^2 \exp(-q_n) + \exp(-q_{n-1})) \end{aligned} \quad (6.16)$$

после канонических преобразований

$$\begin{aligned} z_+ : p_1 &\rightarrow p_1 - \frac{\operatorname{ch} q_1 + 1}{\operatorname{sh} q_1} p_1, & q_1 &\rightarrow q_1 = -\ln \left(\frac{b_2 (\operatorname{ch} q_1 + 1)}{a_0} \right), \\ z_- : p_n &\rightarrow p_n = \frac{\operatorname{ch} q_n + 1}{\operatorname{sh} q_n} p_n, & q_n &\rightarrow q_n = \ln \left(-\frac{c_2 (\operatorname{ch} q_n + 1)}{a_0} \right) \end{aligned} \quad (6.17)$$

и перенормировки совпадают с функциями Гамильтона

$$\begin{aligned} H_{D_1} &= (-2a_0)^{-1} I_{n-1}^{(+)} = \sum_{j=1}^n \frac{p_j^2}{2} + \sum_{j=2}^{n-1} \exp(q_{j+1} - q_j) + b_2 a_0^{-1} \operatorname{ch} q_1 \exp(q_2), \\ H_{D_2} &= (-2a_0)^{-1} I_{n-1}^{(-)} = \sum_{j=1}^n \frac{p_j^2}{2} + \sum_{j=1}^{n-2} \exp(q_{j+1} - q_j) + c_2 a_0^{-1} \operatorname{ch} q_n \exp(-q_{n-1}) \end{aligned} \quad (6.18)$$

для цепочек Тоды типа D_n [14]. Таким образом, мы доказали, что функции Гамильтона (6.8) и (6.16), (6.18) для открытых цепочек Тоды типов B_n и D_n связаны каноническими преобразованиями $\mathcal{W}_\pm$ (6.10) и $z_\pm$ (6.17).

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Преобразования $\mathcal{W}_\pm$ (6.10) и $z_\pm$ (6.17) для полинома второй степени общего вида $\varphi_\pm$ (6.9) отображает функцию Гамильтона для открытой цепочки Тоды типа B_n в гамильтониан обобщенной открытой цепочки Тоды типа D_n [9]

$$H_{gD} = \sum_{j=1}^n \frac{p_j^2}{2} + \sum_{j=2}^{n-1} \exp(q_{j+1} - q_j) + \frac{b_2}{a_0} \operatorname{ch} q_1 \exp(q_2) + \frac{b_1^2}{a_0 b_2^2 \operatorname{sh} q_1^2} + \frac{b_0}{a_0 b_2 \operatorname{sh}(q_1/2)^2},$$

предложенный Иноземцевым [16].

6.2. Периодические обобщенные цепочки Тоды. Для открытых обобщенных цепочек Тоды мы использовали канонические преобразования $\mathcal{Z}_\pm$ (6.7), которые сдвигают переменные $P_i \rightarrow P_i \mp \sum_{j \neq i}^n \ln(Q_i + Q_j)$, для того чтобы в производящих функциях интегралов движения $\hat{\tau}_\pm$ (6.4) заменить производные по $\hat{t}_\pm$ на производные по исходным переменным $t_\pm$ (6.13). Очевидно, что мы не можем одновременно использовать преобразования $\mathcal{Z}_+$ и $\mathcal{Z}_-$ (6.7) в производящей функции общего вида (6.2). Поэтому при рассмотрении периодических цепочек Тоды мы будем использовать эти преобразования последовательно.

ТЕОРЕМА 5. *Коэффициенты полиномов*

$$\hat{\tau}_+ = [a_0 + \partial_{t_+}^\varphi] \hat{e} = \prod (\lambda^2 - \hat{Q}_i^2), \quad \hat{\tau}_- = [a_0 + \partial_{t_-}^\varphi] \hat{e}(\lambda) = \prod (\lambda^2 - \hat{Q}_i^2), \quad (6.19)$$

где $\partial_{t_\pm}^\varphi$ – производные, вычисляемые по правилу (6.12), являются интегралами движения для открытых обобщенных цепочек Тоды, а их корни $\hat{Q}_i$ являются переменными разделения для соответствующих периодических цепочек. Производящая функция интегралов движения для периодических цепочек Тоды имеет вид

$$\tilde{\tau}(\lambda) = (a_0 + \partial_{t_-}^\varphi) \hat{\tau}_+(\lambda) = (a_0 + \partial_{t_+}^\varphi) \hat{\tau}_-(\lambda) = a_0^2 \lambda^{2n} + \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{I}_k \lambda^{2k}. \quad (6.20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Коэффициенты полиномов $\hat{\tau}_+$ и $\hat{\tau}_-$ (6.19) связаны каноническими преобразованиями импульсов (6.5) и $P_i \rightarrow -P_i$ согласно (6.6). Следовательно, их корни также связаны каноническим преобразованием, и поэтому мы будем использовать единое обозначение $\hat{Q}_i$ для разных корней двух различных полиномов $\hat{\tau}_\pm$.

Используя тождество (5.3), перепишем производящую функцию (6.20) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}(\lambda) &= (a_0 + \partial_{t_-}^\varphi)(a_0 + \partial_{t_+}^\varphi) \hat{e}(\lambda) = (a_0 + \partial_{t_+}^\varphi)(a_0 + \partial_{t_-}^\varphi) \hat{e}(\lambda) = \\ &= \left[a_0 + \frac{\varphi_\pm(\lambda) e_{t_\pm}(\lambda)}{\lambda e(\lambda)} + \frac{\varphi_\pm(-\lambda) e_{t_\pm}(-\lambda)}{-\lambda e(-\lambda)} - \frac{\partial^2 \varphi_\pm(\lambda)}{\partial \lambda^2} H_\pm \right] \hat{\tau}_\pm - \\ &\quad - \frac{\varphi_+(-\lambda) \varphi_-(-\lambda)}{\lambda^2} \frac{e(\lambda)}{e(-\lambda)} - \frac{\varphi_+(\lambda) \varphi_-(\lambda)}{\lambda^2} \frac{e(-\lambda)}{e(\lambda)}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Подставляя $\lambda = \widehat{Q}_i$ в уравнения (6.20), (6.21), мы получим n разделенных уравнений

$$-\frac{\varphi_+(-\lambda)\varphi_-(-\lambda)}{\lambda^2} \frac{e(\lambda)}{e(-\lambda)} - \frac{\varphi_+(\lambda)\varphi_-(\lambda)}{\lambda^2} \frac{e(-\lambda)}{e(\lambda)} = a_0^2 \lambda^{2n} + \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{I}_k \lambda^{2k}, \quad \lambda = \widehat{Q}_i. \quad (6.22)$$

Так как

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{e(\lambda)}{e(-\lambda)}, \hat{\tau}_\pm(\mu) \right\} &= \left\{ \frac{e(\lambda)}{e(-\lambda)}, \partial_{t_\pm}^\varphi \hat{e}(\mu) \right\} = \\ &= \left\{ \frac{\prod(\lambda - Q_i)}{\prod(-\lambda - Q_i)}, \hat{e}(\mu) \sum_{i=1}^n \frac{2g_i \varphi_\pm(Q_i) \exp(\pm P_i)}{\mu^2 - Q_i^2} \right\} = \\ &= \pm \frac{e(\lambda) \hat{e}(\mu)}{e(-\lambda)} \sum_{i=1}^n 2g_i \varphi_\pm(Q_i) \exp(\pm P_i) \frac{2\lambda}{(\mu^2 - Q_i^2)(\lambda^2 - Q_i^2)} = \\ &= \pm \frac{2\lambda}{\lambda^2 - \mu^2} \left(\frac{e(\lambda)}{e(-\lambda)} \hat{\tau}_\pm(\mu) - \hat{\tau}_\pm(\lambda) \frac{e(\mu)e(-\mu)}{e^2(-\lambda)} \right), \end{aligned}$$

то для корней $\widehat{Q}_i$ полинома $\hat{\tau}_+$ справедливо соотношение

$$\left\{ \frac{e(\lambda)}{e(-\lambda)}, \widehat{Q}_i \right\} = \frac{1}{\hat{\tau}'_+(\widehat{Q}_i)} \left\{ \frac{e(\lambda)}{e(-\lambda)}, \hat{\tau}_+(\mu) \right\} \Big|_{\mu=\widehat{Q}_i} = \frac{-2\lambda}{\lambda^2 - \widehat{Q}_i^2} \frac{\hat{\tau}_+(\lambda)}{\hat{\tau}'_+(\widehat{Q}_i)} \frac{e(\widehat{Q}_i)e(-\widehat{Q}_i)}{e^2(-\lambda)},$$

откуда при $\lambda = \widehat{Q}_j$ следует соотношение

$$\left\{ \frac{e(\widehat{Q}_j)}{e(-\widehat{Q}_j)}, \widehat{Q}_i \right\} = -\delta_{ij} \frac{e(\widehat{Q}_j)}{e(-\widehat{Q}_j)}$$

и определение новых переменных $\widehat{P}_j$,

$$\exp(-\widehat{P}_j) = \frac{e(\widehat{Q}_j)}{e(-\widehat{Q}_j)},$$

таких, что $\{\widehat{P}_j, \widehat{Q}_i\} = \delta_{ij}$. Так как из уравнений

$$\{\hat{\tau}_+(\lambda), \hat{\tau}_+(\mu)\} = 0, \quad \left\{ \frac{e(\lambda)}{e(-\lambda)}, \frac{e(\mu)}{e(-\mu)} \right\} = 0$$

следуют соотношения

$$\{\widehat{Q}_i, \widehat{Q}_j\} = \{\widehat{P}_i, \widehat{P}_j\} = 0,$$

то переменные $(\widehat{P}, \widehat{Q})$ являются переменными Дарбу, которые входят в искомые разделенные уравнения (6.22),

$$-\frac{\varphi_+(-\widehat{Q}_i)\varphi_-(-\widehat{Q}_i)}{\widehat{Q}_i^2} \exp(\widehat{P}_i) - \frac{\varphi_+(\widehat{Q}_i)\varphi_-(\widehat{Q}_i)}{\widehat{Q}_i^2} \exp(-\widehat{P}_i) = a_0^2 \widehat{Q}_i^{2n} + \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{I}_k \widehat{Q}_i^{2k}. \quad (6.23)$$

Аналогичные разделенные уравнения для корней полинома $\hat{\tau}_-$ связаны с этими уравнениями преобразованием $\hat{P}_i \rightarrow -\hat{P}_i$.

Разделенные уравнения (6.23) удовлетворяют условиям теоремы 1, поэтому функции $\tilde{I}_k$, определяемые из уравнений (6.20), функционально независимы и находятся в инволюции.

Среди построенных нами интегралов содержатся все известные функции Гамильтона для обобщенных периодических цепочек Тоды, связанных с классическими корневыми системами [14]. Для доказательства достаточно подставить в уравнения (6.19) и (6.20) функцию e и ее производные (5.11), найти интегралы движения $\tilde{I}_k(p, q)$ и сравнить их с известными выражениями из работы [14].

Прямым вычислением можно доказать, что после дополнительных канонических преобразований (6.14) или (6.17) функции Гамильтона имеют естественный вид:

$$\tilde{I}_{n-1} = \sum_{j=1}^n \frac{p_j^2}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} \exp(q_{j+1} - q_j) + V, \quad (6.24)$$

где потенциал V зависит от выбора полиномов $\varphi_{\pm}(\lambda)$ в разделенных уравнениях (6.23) и отвечает одной из пополненных корневых систем:

$$\begin{aligned} D_n^{(1)}: \quad & V = \exp(q_1 + q_2) + \exp(-q_{n-1} - q_n), \quad \varphi_+ = \lambda^2, \quad \varphi_- = \lambda^2; \\ A_{2n-1}^{(2)}: \quad & V = \exp(q_1 + q_2) + \exp(-2q_n), \quad \varphi_+ = \lambda^2, \quad \varphi_- = \lambda; \\ B_n^{(1)}: \quad & V = \exp(q_1 + q_2) + \exp(-q_n), \quad \varphi_+ = \lambda^2, \quad \varphi_- = 1; \\ C_n^{(1)}: \quad & V = \exp(2q_1) + \exp(-2q_n), \quad \varphi_+ = \lambda, \quad \varphi_- = \lambda; \\ A_{2n}^{(2)}: \quad & V = \exp(2q_1) + \exp(-q_n), \quad \varphi_+ = \lambda, \quad \varphi_- = 1; \\ D_{n+1}^{(2)}: \quad & V = \exp(q_1) + \exp(-q_n), \quad \varphi_+ = 1, \quad \varphi_- = 1. \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Функции Гамильтона для обобщенных периодических цепочек Тоды (6.24) допускают разделение переменных в одной и той же системе координат.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Данное утверждение непосредственно следует из теоремы 4, утверждающей, что полиномы $\hat{\tau}_{\pm}$, отвечающие различным функциям $\varphi_{\pm}$, связаны каноническими преобразованиями $\mathcal{W}_{\pm}$ (6.10).

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Следуя работам [17], [9], мы можем построить матрицы Лакса

$$L(\lambda) = \mathcal{K}_+(\lambda) T(\lambda) \mathcal{K}_+(\lambda) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} T^t(-\lambda) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

так, что $\tilde{\tau}(\lambda) = \text{tr } L(\lambda)$ (6.20). Здесь матрица $T(\lambda)$ определена формулами (5.4)–(5.8), а матрицы $\mathcal{K}_{\pm}$ имеют вид

$$\mathcal{K}_- = \begin{pmatrix} \frac{\varphi_-(-\lambda)}{\lambda} & a_0 - \frac{\partial^2 \varphi_-(\lambda)}{\partial \lambda^2} H_- \\ 0 & \frac{\varphi_-(\lambda)}{\lambda} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{K}_+ = \begin{pmatrix} \frac{\varphi_+(-\lambda)}{\lambda} & 0 \\ a_0 - \frac{\partial^2 \varphi_+(\lambda)}{\partial \lambda^2} H_+ & \frac{\varphi_+(\lambda)}{\lambda} \end{pmatrix}.$$

Все вышеизложенные результаты могут быть доказаны с использованием (2×2) -матриц Лакса.

Отметим, что для цепочек Тоды, отвечающих корневым системам типа D_n , граничные матрицы $K_{\pm}$ зависят от динамических переменных и не удовлетворяют обычным уравнениям отражения [17]. В работе [9] предложен алгоритм построения подобных динамических граничных матриц, отвечающих произвольным полиномам и рациональным функциям $\varphi_{\pm}$ в разделенных уравнениях (6.23), использующий метод Якоби.

Благодарности. Работа поддержана грантом РФФИ № 02-01-00888.

Список литературы

- [1] *C. G. J. Jacobi*. Crelle's Journal. 1837. V. 27. P. 97; Comptes Rendus. 1837. V. 5. P. 61.
- [2] *C. G. J. Jacobi*. Vorlesungen über Dynamik. Berlin: G. Reimer, 1884; Русский перевод: *К. Якоби*. Лекции по динамике. Л.: Гостехиздат, 1936.
- [3] *L. Euler*. Institutionum Calculi Integralis. V. 1–3. Petersburg: Impensis Academia Imperialis Scientiarum, 1768–1770; Русский перевод: *Л. Эйлер*. Интегральное исчисление. Т. 1–3. М.: ГИТЛ, 1956–1958.
- [4] *J. Liouville*. J. Math. Pure Appl. 1849. V. 14. P. 257.
- [5] *C. Neumann*. J. Reine Angew. Math. 1859. V. 56. P. 46.
- [6] *P. Stückel*. Über die Integration der Hamilton–Jacobischen Differentialgleichung Mittels Separation der Variabeln. Halle: Habilitationsschrift, 1891.
- [7] *A. М. Виноградов, Б. А. Купершмидт*. УМН. 1977. Т. 32. С. 175.
- [8] *L. A. Pars*. Amer. Math. Monthly. 1949. V. 56. P. 394.
- [9] *В. В. Соколов, А. В. Цыганов*. ТМФ. 2002. Т. 133. С. 485.
- [10] *O. Babelon, M. Talon*. Phys. Lett. A. 2003. V. 312. P. 71; hep-th/0209071; *O. Babelon*. J. Phys. A. 2004. V. 37. P. 303; hep-th/0304052.
- [11] *A. V. Tsiganov*. J. Phys. A. 1999. V. 32. P. 7965.
- [12] *M. C. Gutzwiller*. Ann. Phys. 1980. V. 124. P. 347; 1981. V. 133. P. 304.
- [13] *E. K. Sklyanin*. The quantum Toda chain. In: Nonlinear Equations in Classical and Quantum Field Theory. Proc. Semin. Mendon, Paris, 1983/1984. Lect. Notes in Phys. V. 226. Berlin: Springer, 1985. P. 196.
- [14] *O. I. Bogoyavlensky*. Commun. Math. Phys. 1976. V. 51. P. 201.
- [15] *A. V. Tsiganov*. J. Math. Phys. 1997. V. 38. P. 196.
- [16] *V. I. Inozemtsev*. Commun. Math. Phys. 1989. V. 121. P. 629.
- [17] *E. K. Sklyanin*. J. Phys. A. 1988. V. 21. P. 2375.

Поступила в редакцию 19.V.2003 г.