Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Р. Коган, Дисперсия лагранжевых траекторий в случайном крупномасштабном поле скорости, *ТМФ*, 2000, том 122, номер 3, 456–467

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf580>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 15:39:52

© 2000 г.

В. Р. Коган*

ДИСПЕРСИЯ ЛАГРАНЖЕВЫХ ТРАЕКТОРИЙ В СЛУЧАЙНОМ КРУПНОМАСШТАБНОМ ПОЛЕ СКОРОСТИ

Изучается статистика расстояния $R(t)$ между двумя лагранжевыми траекториями в пространственно-гладком турбулентном поле скорости с произвольным временем корреляции и с негауссовым распределением. В этой ситуации имеются два безразмерных параметра: α – степень отличия от гауссовой статистики, и $\beta = \tau D$, где τ – время корреляции скорости, а D – характерный градиент скорости. Асимптотически $R(t)$ имеет логнормальную статистику, которую можно характеризовать средней скоростью разбегания $\bar{\lambda}$ и дисперсией Δ . Использована техника большой размерности пространства d для оценки величин $\bar{\lambda}$ и Δ при различных значениях параметров α и β . В работе [1] было продемонстрировано, что $\bar{\lambda} \sim D$ при $\beta \ll 1$ и $\bar{\lambda} \sim \sqrt{D/\tau}$ при $\beta \gg 1$. При этом оценка Δ не универсальна и зависит от деталей парного коррелятора скорости. С корреляторами скорости высшего порядка связан дополнительный вклад в дисперсию Δ , который может быть оценен как $\alpha D^2 \tau$ при $\beta \ll 1$ и $\alpha \beta / \tau$ при $\beta \gg 1$. Если α превышает некоторое критическое значение α_{cr} , значения $\bar{\lambda}$ и Δ определяются высшими неприводимыми корреляторами градиента скорости и наша схема перестает работать. Это критическое значение может быть оценено как $\alpha_{cr} \sim \beta^{-1}$ при $\beta \ll 1$ и $\alpha_{cr} \sim \beta^{-1/2}$ при $\beta \gg 1$.

1. ВВЕДЕНИЕ

Дисперсия (закон разбегания) лагранжевых траекторий, т.е. траекторий частиц, движущихся со скоростью жидкости, является классическим объектом изучения в физике турбулентности. Эта фундаментальная проблема, восходящая к Ричардсону [2], имеет также большое практическое значение (например, для описания структуры облаков). Именно на языке лагранжева формализма следует выражать скейлинговые соотношения для статистики турбулентного потока, замаскированные эффектом сильного сноса [3, 4]. Заметим также, что дисперсия лагранжевых траекторий связана со статистикой пассивного скаляра, переносимого турбулентным полем скорости [5, 6]. Поэтому весьма важно установить связь между статистикой турбулентной скорости и законом разбегания лагранжевых траекторий. Строгий вывод закона разбегания был сделан только в предположении короткого времени корреляции скорости и гауссового распределения [7, 8].

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Москва, Россия

Представляет интерес выйти за рамки этих предположений. Это оказывается возможным при исследовании поведения лагранжевых траекторий на расстояниях, меньших, чем вязкая длина, где поле скорости незначительно изменяется от точки к точке. При этом дисперсия лагранжевых траекторий определяется распределением градиентов скорости (так как однородный снос вообще не меняет расстояния между лагранжевыми частицами), и можно говорить о движении лагранжевых частиц в крупномасштабном поле скорости. Но даже в этом случае сложно исследовать произвольную статистику градиентов скорости. Однако нас больше интересуют качественные заключения, касающиеся влияния различных факторов, характеризующих статистику скорости, на дисперсию лагранжевых траекторий. Как было показано в работе [1], для этой цели весьма полезным оказывается использование техники большой размерности пространства d , которая позволяет получать заключения, справедливые и при $d \sim 1$. Мы будем изучать статистику расстояний между двумя лагранжевыми частицами $R(t)$, считая, что это расстояние фиксировано в начальный момент времени: $R(t=0) = R_0$. Траектория лагранжевой частицы $\mathbf{q}(t)$ определяется уравнением

$$\partial_t \mathbf{q} = \mathbf{v}(t, \mathbf{q}), \quad (1)$$

где $\partial_t \equiv \partial/\partial t$ и $\mathbf{v}$ – скорость жидкости. Скорость будет считаться случайной функцией времени и координат. Следуя Крайчнану [5], можно считать ее статистику гауссовой с нулевым средним и парным коррелятором

$$\langle v_\alpha(t_1, \mathbf{r}_1) v_\beta(t_2, \mathbf{r}_2) \rangle = \delta(t_1 - t_2) V_{\alpha\beta}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|). \quad (2)$$

На расстояниях, малых по сравнению с крупномасштабной накачкой, для тензора $V_{\alpha\beta}$ предполагается следующее скейлинговое поведение:

$$V_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) = V_0 \delta_{\alpha\beta} - K_{\alpha\beta}(r), \quad (3)$$

$$K_{\alpha\beta}(r) \propto r^{2-\gamma}. \quad (4)$$

Напомним, что в теории турбулентности, помимо масштаба упомянутой накачки, имеется еще малый масштаб, так называемая вязкая длина, на которой начинает эффективно действовать диссипация. На масштабах, меньших вязкой длины, это приводит к сглаживанию турбулентного поля скорости. Значение скейлингового показателя при этом $\gamma = 0$. Эта ситуация замечательна тем, что при выполнении условий, приводящих к ней, скорость, как случайный процесс, является функцией только времени, а именно, вводя тензор градиентов скорости

$$\sigma_{\alpha\beta} = \nabla_\beta v_\alpha, \quad (5)$$

можно показать, что

$$v_\alpha(t, \mathbf{r}) = r_\beta \sigma_{\alpha\beta}(t), \quad (6)$$

причем $\sigma_{\alpha\beta}(t)$ – случайная функция времени [9]. В формуле (6) и ниже по повторяющимся индексам предполагается суммирование. Хотя в этом рассуждении считалось, что

статистика скорости гауссова и декоррелирована во времени, все заключения являются справедливыми и в случаях, когда статистика негауссова и произвольно коррелирована, поскольку в рассуждении используется лишь тот факт, что коррелятор скорости n -го порядка содержит слагаемые, пропорциональные r^n . С физической точки зрения представление (6) оказалось возможным лишь постольку, поскольку поле скорости на субвязких масштабах оказывается гладким, с малыми градиентами.

Возвращаясь к динамике лагранжевых траекторий, можно показать, что вектор $\mathbf{R} = \boldsymbol{\varrho}_1 - \boldsymbol{\varrho}_2$, определяющий расстояние между двумя лагранжевыми частицами, в крупномасштабном поле скорости подчиняется уравнению

$$\partial_t R_\alpha = \sigma_{\alpha\beta} R_\beta. \quad (7)$$

Заметим, что условие несжимаемости $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ записывается, как равенство нулю следа матрицы $\sigma_{\alpha\beta}$:

$$\sigma_{\alpha\alpha} = 0. \quad (8)$$

Уравнение (7) можно переписать в виде двух уравнений

$$\begin{aligned} \partial_t n_\alpha &= \sigma_{\alpha\beta} n_\beta - \sigma_{\gamma\beta} n_\beta n_\gamma n_\alpha, \\ \partial_t \ln R &= \sigma_{\alpha\beta} n_\beta n_\gamma, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\mathbf{n}$ – единичный вектор в направлении $\mathbf{R}$. Мы видим, что статистика $\mathbf{n}$ не зависит от R . Тогда в силу центральной предельной теоремы из (9) следует, что на временах, больших времени корреляции скорости τ , величина R имеет логнормальную статистику, т.е. функцию распределения вероятности для $R(t)$ можно записать в следующем виде:

$$\mathcal{P}(t, R) \propto \exp \left\{ -\frac{[\ln(R/R_0) - \bar{\lambda}t]^2}{2\Delta t} \right\}, \quad (10)$$

где $\bar{\lambda}$ – средний темп разбегания траекторий, Δ – дисперсия этого темпа. Пользуясь формулой (10), можно найти асимптотические значения для корреляторов вида

$$\langle R^n(t) \rangle = R_0^n \exp \left[n \left(\frac{n\Delta}{2} + \bar{\lambda} \right) t \right]. \quad (11)$$

Это вычисление становится чрезвычайно полезным для корреляторов с $n = 2$ и $n = 4$, выражения для которых имеют вид

$$\langle R^2(t) \rangle = R_0^2 \exp[2(\Delta + \bar{\lambda})t], \quad (12)$$

$$\langle R^4(t) \rangle = R_0^4 \exp[4(2\Delta + \bar{\lambda})t]. \quad (13)$$

Полезность этих выражений становится очевидной, если найти следующий неприводимый коррелятор (что и является главным вычислительным результатом этой работы):

$$\frac{\langle \langle R^4(t) \rangle \rangle}{\langle R^2(t) \rangle^2} = \frac{\langle R^4(t) \rangle - \langle R^2(t) \rangle^2}{\langle R^2(t) \rangle^2} = \exp(4\Delta t) - 1. \quad (14)$$

Итак, нашей основной задачей является вычисление величин $\bar{\lambda}$ и Δ , входящих в (10). Для случая предельно долгокоррелированной скорости величина $\bar{\lambda}$ была найдена Бэтчелором [10], а для случая δ -коррелированной скорости – Крайчнаном [8]. Ряд заключений о зависимости величины $\bar{\lambda}$ от времени корреляции скорости τ для простейшего вида гауссовой статистики скорости был сделан в работах [11, 12]. В работе [1], где использовался метод больших размерностей d и статистика скорости предполагалась гауссовой, была исследована дисперсия Δ для различных значений τ и для разных скейлинговых законов зависимости корреляционных функций скорости от времени. В настоящей работе, используя формализм работы [1], мы исследуем влияние отклонения статистики скорости от гауссовой, т.е. роль высших неприводимых корреляторов $\sigma_{\alpha\beta}$. Пока степень отличия от гауссовой статистики невелика, ее роль сводится к появлению дополнительного вклада в Δ и незначительной поправки к λ . При увеличении степени отклонения от гауссовой статистики дисперсия Δ по величине достигает $\bar{\lambda}$, после чего уже именно высшие корреляторы $\sigma_{\alpha\beta}$ будут определять как Δ , так и $\bar{\lambda}$. К сожалению, наша техника не позволяет исследовать этот значительно отличающийся от гауссова режим, однако она позволяет установить, при каких значениях высших корреляторов он начинается при различных значениях τ .

2. ТЕХНИКА БОЛЬШИХ РАЗМЕРНОСТЕЙ

В настоящем разделе кратко изложены процедура, использованная в [1], и основные результаты настоящей работы. При больших размерностях пространства d вектор $\mathbf{R}$ имеет большое число компонент, поэтому имеет место эффект самоусреднения, позволяющий свести высшие корреляторы к парному [13, 14], например

$$\langle R^4 \rangle \approx \langle R^2 \rangle^2. \quad (15)$$

Сравнение (15) с (12), (13) показывает, что это соотношение заведомо нарушается на больших временах или, другими словами, применимость техники больших размерностей d ограничена временами $\Delta t \ll 1$. Необходимо также вспомнить, что равенства (12), (13) являются асимптотическими при $t \gg \tau$. Таким образом, на время наблюдения t техникой накладываются ограничения как сверху, так и снизу. Тем не менее при больших значениях d имеется область перекрытия применимости (12), (13) и техники больших d : $\tau \ll t \ll \Delta^{-1}$, это условие предполагает неравенство $\tau \Delta \ll 1$, которое и реализуется при больших d . При таких временах из выражения (14) получаем

$$\frac{\langle R^4 \rangle - \langle R^2 \rangle^2}{\langle R^2 \rangle^2} = 4\Delta t. \quad (16)$$

Именно это выражение будет использоваться при вычислении дисперсии Δ .

Ниже будет использоваться диаграммная техника Уайльда [15], обобщенная в работе [16] на широкий класс динамических систем (изложение этой техники можно найти в [17]). Точнее, будет использован порождающий эту диаграммную технику функциональный интеграл [18, 19]. Правила обращения с функциональным интегралом можно

найти в [20]. В соответствии с результатами [16, 18, 19] корреляционные функции векторного поля $\mathbf{R}$ могут быть записаны как функциональные интегралы по $\mathbf{R}(t)$ и вспомогательному полю $\overline{\mathbf{R}}(t)$ с весом, который определяется уравнением (7). Например, парный коррелятор имеет вид

$$\langle \mathbf{R}(t_1) \mathbf{R}(t_2) \rangle = \int \mathcal{D}\mathbf{R} \mathcal{D}\overline{\mathbf{R}} \exp(i\mathcal{I}_{\text{eff}}) \mathbf{R}(t_1) \mathbf{R}(t_2), \quad (17)$$

$$\exp(i\mathcal{I}_{\text{eff}}) = \left\langle \exp \left\{ i \int dt (\overline{R}_\alpha \partial_t R_\alpha - i \overline{R}_\alpha \sigma_{\alpha\beta} R_\beta) \right\} \right\rangle_\sigma, \quad (18)$$

где мы ввели эффективное действие $\mathcal{I}_{\text{eff}}$ в соответствии с определением (18), в котором $\langle \dots \rangle_\sigma$ означает усреднение по статистике градиентов скорости $\sigma_{\alpha\beta}$. Коррелятор $\langle \mathbf{R}(t_1) \overline{\mathbf{R}}(t_2) \rangle$ имеет смысл восприимчивости системы, а потому обращается в нуль при $t_1 < t_2$ [1]. Коррелятор же $\langle \overline{\mathbf{R}}(t_1) \overline{\mathbf{R}}(t_2) \rangle$ тождественно равен нулю.

В случае гауссовой статистики $\sigma_{\alpha\beta}$ усреднение в (18) тривиально и приводит к следующему выражению для эффективного действия:

$$i\mathcal{I}_{\text{eff}} = i \int dt \overline{\mathbf{R}} \partial_t \mathbf{R} - \frac{1}{2} \int dt_1 dt_2 \overline{R}_\alpha(t_1) R_\beta(t_1) \overline{R}_\gamma(t_2) R_\mu(t_2) \langle \sigma_{\alpha\beta}(t_1) \sigma_{\gamma\mu}(t_2) \rangle. \quad (19)$$

В негауссовом случае в эффективное действие войдут также и высшие неприводимые корреляторы тензора $\sigma_{\alpha\beta}$, совокупность которых мы обозначим в виде выражения $i\mathcal{I}_{\text{high}}$. Парный коррелятор градиентов скорости в изотропном случае можно записать в следующем виде:

$$\langle \sigma_{\alpha\mu}(t) \sigma_{\beta\nu}(0) \rangle = \frac{D}{d\tau} \left\{ g \left(\frac{t}{\tau} \right) \left[\delta_{\alpha\beta} \delta_{\mu\nu} - \frac{1}{d} \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu} \right] + \frac{1}{d} g_1 \left(\frac{t}{\tau} \right) [\delta_{\alpha\beta} \delta_{\mu\nu} - \delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\mu}] \right\}, \quad (20)$$

где g, g_1 – произвольные функции времени, которые предполагаются нормированными условием

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi g(\xi) = 2. \quad (21)$$

Здесь мы перешли к безразмерному времени $\xi = t/\tau$, τ – время корреляции. Введем еще одну безразмерную постоянную

$$\beta = D\tau. \quad (22)$$

Интересующие нас корреляционные функции получаются разложением по “внешним полям” X, Y, Z производящего функционала:

$$i\mathcal{I}_{xyz} = i\mathcal{I}_{\text{eff}} + \int d\xi_1 d\xi_2 [X(\xi_1, \xi_2) (\overline{\mathbf{R}}_1 \mathbf{R}_2) + Y(\xi_1, \xi_2) (\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2) + Z(\xi_1, \xi_2) (\overline{\mathbf{R}}_1 \overline{\mathbf{R}}_2)]. \quad (23)$$

Взяв логарифмические производные от функционала

$$Z_{xyz} = \int \mathcal{D}\mathbf{R} \mathcal{D}\overline{\mathbf{R}} \exp(i\mathcal{I}_{xyz}) \quad (24)$$

по полям X, Y, Z , получим необходимые корреляторы:

$$\begin{aligned} F(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{d} \langle R_\alpha(\xi_1) R_\alpha(\xi_2) \rangle = \frac{1}{d} \frac{\delta \ln Z_{xyz}}{\delta Y(\xi_1, \xi_2)} \Big|_0, \\ G(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{d} \langle \bar{R}_\alpha(\xi_1) R_\alpha(\xi_2) \rangle = \frac{1}{d} \frac{\delta \ln Z_{xyz}}{\delta X(\xi_1, \xi_2)} \Big|_0. \end{aligned} \quad (25)$$

Знак $|_0$ означает, что производные вычисляются при $X = Y = Z = 0$. Заметим, что в силу условия причинности функция $G(\xi, \xi')$ обращается в нуль при $\xi' < \xi$. Для задачи существенны также и более общие величины

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{d} \frac{\delta \ln Z_{xyz}}{\delta Y(\xi_1, \xi_2)}, \\ \mathcal{G}(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{d} \frac{\delta \ln Z_{xyz}}{\delta X(\xi_1, \xi_2)}, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\bar{\mathcal{F}}(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{d} \frac{\delta \ln Z_{xyz}}{\delta Z(\xi_1, \xi_2)}. \quad (27)$$

Последняя величина вследствие условия причинности равна нулю, если $X = Y = Z = 0$ [1]. Уравнения на $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \bar{\mathcal{F}}$ можно получить, основываясь на функциональных соотношениях вида

$$\int \mathcal{D}\mathbf{R} \mathcal{D}\bar{\mathbf{R}} \frac{\delta}{\delta \bar{R}_\alpha} [R_\alpha(\xi') \exp(iI_{xyz})] = 0. \quad (28)$$

Если аккуратно вычислить функциональные производные в соотношениях вида (28), то для всех написанных выше корреляторов можно получить следующие уравнения:

$$\begin{aligned} i\partial_\xi \mathcal{F}(\xi, \xi') - \beta \int d\xi_1 g(\xi - \xi_1) \mathcal{G}(\xi_1, \xi') \mathcal{F}(\xi_1, \xi) + \\ + \int d\xi_1 [X(\xi, \xi_1) \mathcal{F}(\xi', \xi_1) + 2Z(\xi, \xi_1) \mathcal{G}(\xi_1, \xi')] = 0, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \delta(\xi - \xi') + i\partial_\xi \mathcal{G}(\xi', \xi) - \beta \int d\xi_1 g(\xi - \xi_1) \bar{\mathcal{F}}(\xi_1, \xi') \mathcal{F}(\xi_1, \xi) + \\ + \int d\xi_1 [X(\xi, \xi_1) \mathcal{G}(\xi', \xi_1) + 2Z(\xi, \xi_1) \bar{\mathcal{F}}(\xi', \xi_1)] = 0, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \delta(\xi - \xi') - i\partial_\xi \mathcal{G}(\xi, \xi') - \beta \int d\xi_1 g(\xi - \xi_1) \bar{\mathcal{F}}(\xi_1, \xi) \mathcal{F}(\xi_1, \xi') + \\ + \int d\xi_1 [X(\xi_1, \xi) \mathcal{G}(\xi_1, \xi') + 2Y(\xi_1, \xi) \mathcal{F}(\xi_1, \xi')] = 0, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} -i\partial_\xi \bar{\mathcal{F}}(\xi, \xi') - \beta \int d\xi_1 g(\xi - \xi_1) \bar{\mathcal{F}}(\xi_1, \xi) \mathcal{G}(\xi', \xi_1) + \\ + \int d\xi_1 [X(\xi_1, \xi) \bar{\mathcal{F}}(\xi_1, \xi') + 2Y(\xi_1, \xi) \mathcal{G}(\xi', \xi_1)] = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Эти уравнения написаны в главном порядке по d . Учет всех членов сильно загромождает эти уравнения, делая невозможным их исследование. Более того, в таком точном виде, как нетрудно видеть, они перестают быть замкнутыми, превращаясь в бесконечную

цепочку взаимосвязанных уравнений, подобную цепочке Боголюбова в теории кинетических уравнений.

Для получения коррелятора $F(\xi_1, \xi_2)$ необходимо просто положить $X = Y = Z = 0$. Для получения дисперсии необходимо рассмотреть корреляторы

$$\begin{aligned} F(\xi, \xi', \xi'') &= \frac{1}{d} \langle R_\alpha(\xi) R_\alpha(\xi') R^2(\xi'') \rangle - \\ &\quad - \frac{1}{d} \langle R_\alpha(\xi) R_\alpha(\xi') \rangle \langle R^2(\xi'') \rangle = \frac{\delta \mathcal{F}(\xi, \xi')}{\delta Y(\xi'', \xi'')} \Big|_0, \\ G(\xi, \xi', \xi'') &= \frac{\delta \mathcal{G}(\xi, \xi')}{\delta Y(\xi'', \xi'')} \Big|_0, \quad \bar{F}(\xi, \xi', \xi'') = \frac{\delta \bar{\mathcal{F}}(\xi, \xi')}{\delta Y(\xi'', \xi'')} \Big|_0. \end{aligned} \quad (33)$$

Первая величина выписана подробнее, чем остальные две, поскольку именно она входит в окончательный ответ, в то время как $G(\xi, \xi', \xi'')$ и $\bar{F}(\xi, \xi', \xi'')$ входят лишь в промежуточные вычисления этого неприводимого коррелятора. Нам в дальнейшем понадобятся уравнения на эти корреляторы, выпишем их:

$$\begin{aligned} [\partial_\xi \partial_{\xi'} - \beta g(\xi - \xi')] F(\xi, \xi', \xi'') &= \\ &= -\frac{\beta^2}{2} \int d\xi_1 d\xi_2 g(\xi - \xi_1) g(\xi' - \xi_2) F(\xi, \xi_1) F(\xi', \xi_2) \bar{F}(\xi_1, \xi_2, \xi''), \end{aligned} \quad (34)$$

$$-i \partial_\xi G(\xi, \xi', \xi'') + \beta \int d\xi_1 g(\xi - \xi_1) \bar{F}(\xi', \xi_1, \xi'') F(\xi, \xi_1) = 0, \quad (35)$$

$$i \partial_{\xi'} G(\xi, \xi', \xi'') + \beta \int d\xi_1 g(\xi' - \xi_1) \bar{F}(\xi, \xi_1, \xi'') F(\xi, \xi_1) = 2\delta(\xi' - \xi'') F(\xi, \xi'), \quad (36)$$

$$[\partial_\xi \partial_{\xi'} - \beta g(\xi - \xi')] \bar{F}(\xi, \xi', \xi'') = -2\delta(\xi - \xi'') \delta(\xi - \xi'). \quad (37)$$

Как видно, эти уравнения даже после ряда упрощающих предположений оказываются довольно сложными. Они имеют вид неоднородной системы интегро-дифференциальных уравнений и допускают лишь качественное исследование. Ниже приводятся результаты этого исследования в двух предельных случаях $\beta \ll 1$ и $\beta \gg 1$.

А. Короткокоррелированный случай. Случай, когда время корреляции мало по сравнению с характерным временем динамики лагранжевых траекторий, которое оценивается как D^{-1} , позволяет аналитически решить написанные выше системы уравнений. Действительно, в этом случае $\beta \ll 1$ и статистику тензора $\sigma_{\alpha\beta}$ можно считать декоррелированной, а все корреляционные функции тензора заменить δ -функциями. После такой замены все уравнения приобретают вид уравнений в частных производных, допускающих разделение переменных и сведение к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Окончательные выражения для тех корреляционных функций, которые понадобятся в дальнейшем при рассмотрении негауссова случая, выписаны ниже:

$$\begin{aligned} F(\xi_1, \xi_2) &= R_0^2 \exp[2\beta \min(\xi_1, \xi_2)], \\ \bar{F}(\xi, \xi', \xi'') &= -2 \exp[2\beta \xi'' - 2\beta \max(\xi, \xi')] \Theta(\xi'' - \xi) \Theta(\xi'' - \xi'), \\ \bar{\lambda} &= D, \quad \Delta = \frac{\bar{\lambda}}{d} = \frac{D}{d}. \end{aligned} \quad (38)$$

Б. Долгокоррелированный случай. Приведем результаты для обратного случая, когда флуктуации поля скорости настолько велики, что время корреляции оказывается большим по сравнению с темпом разбегания лагранжевых траекторий. Этот случай отвечает большим значениям параметра $\beta \gg 1$ и оказывается более сложным для исследования. Например, решение для парного коррелятора $F(\xi_1, \xi_2)$ можно искать в виде

$$F(\xi_1, \xi_2) = \exp\left(\bar{\lambda} \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}\right) \Psi_0(\xi_1 - \xi_2). \quad (39)$$

Здесь $\Psi_0(\xi)$ – “волновая функция” основного состояния для уравнения Шредингера

$$\left(\frac{\bar{\lambda}^2}{4} - \partial_\xi^2\right) \Psi_0(\xi) = \beta g(\xi) \Psi_0(\xi), \quad (40)$$

а $\bar{\lambda}$ – его энергия. Понятно, что для этого уравнения возможно лишь оценочное исследование. Так как $\beta \gg 1$, то разумно в этом уравнении произвести разложение “потенциала” $g(\xi)$ вблизи точки $\xi = 0$:

$$g(0) - g(\xi) \propto |\xi|^a. \quad (41)$$

Размер области, в которой функция $\Psi_0(\xi)$ существенно отлична от нуля, можно оценить из соотношения неопределенностей:

$$\xi_{\text{char}} \propto \beta^{-\frac{1}{2+a}}. \quad (42)$$

Для коррелятора $\bar{F}$ также можно написать следующую оценку:

$$\bar{F}(\xi_1, \xi_2, \xi) \propto \beta^{-\frac{a}{2+a}} \exp\left[\bar{\lambda} \left(\xi - \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}\right)\right], \quad (43)$$

в то время как темп разбегания траекторий имеет вид

$$\bar{\lambda} \sim \sqrt{\frac{D}{\tau}}. \quad (44)$$

Подробности получения оценок можно найти в работе [1].

3. РОЛЬ ВЫСШИХ КОРРЕЛЯТОРОВ ГРАДИЕНТА СКОРОСТИ

Исследуем вклады в $\bar{\lambda}$ и Δ , связанные с высшими неприводимыми корреляторами градиента скорости. При значительном отклонении от гауссовой статистики наша техника перестает работать. Поэтому достаточно рассмотреть эффекты, связанные с неприводимым коррелятором четвертого порядка. Поправки, связанные с более высокими корреляторами, станут существенными как раз в случае, если Δ становится порядка $\bar{\lambda}$, т.е.

на границе области применимости теории. Неприводимый коррелятор четвертого порядка записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \langle \langle \sigma_{\alpha\beta}(t_1) \sigma_{\gamma\delta}(t_2) \sigma_{\epsilon\mu}(t_3) \sigma_{\rho\nu}(t_4) \rangle \rangle &= \frac{D^2}{d^3 \tau^2} (h(\xi_1, \xi_2; \xi_3, \xi_4) \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} \delta_{\epsilon\rho} \delta_{\mu\nu} + \\ &+ h(\xi_1, \xi_3; \xi_2, \xi_4) \delta_{\alpha\epsilon} \delta_{\beta\mu} \delta_{\gamma\rho} \delta_{\delta\nu} + h(\xi_1, \xi_4; \xi_2, \xi_3) \delta_{\alpha\rho} \delta_{\beta\nu} \delta_{\gamma\epsilon} \delta_{\delta\mu} + \dots), \end{aligned} \quad (45)$$

где многоточием обозначены члены, несущественные при больших d . Теперь мы можем ввести безразмерный параметр, характеризующий степень отклонения от гауссовой статистики,

$$\alpha = \int d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4 h(0, \xi_2; \xi_3, \xi_4). \quad (46)$$

При учете неприводимого коррелятора четвертого порядка (45) эффективное действие в главном порядке по d принимает вид

$$\begin{aligned} i\mathcal{I}_{\text{eff}} &= i \int d\xi_1 \bar{\mathbf{R}}_1 \partial_t \mathbf{R}_1 - \frac{\beta}{2d} \int d\xi_1 d\xi_2 g(\xi_1 - \xi_2) (\bar{\mathbf{R}}_1 \bar{\mathbf{R}}_2) (\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2) + \\ &+ \frac{1}{24} \frac{\beta^2}{d^3} \int d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4 \{ h(\xi_1, \xi_2; \xi_3, \xi_4) (\bar{\mathbf{R}}_1 \bar{\mathbf{R}}_2) (\bar{\mathbf{R}}_3 \bar{\mathbf{R}}_4) (\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2) (\mathbf{R}_3 \mathbf{R}_4) + \\ &+ h(\xi_1, \xi_3; \xi_2, \xi_4) (\bar{\mathbf{R}}_1 \bar{\mathbf{R}}_3) (\bar{\mathbf{R}}_2 \bar{\mathbf{R}}_4) (\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_3) (\mathbf{R}_2 \mathbf{R}_4) \times \\ &\times h(\xi_1, \xi_4; \xi_2, \xi_3) (\bar{\mathbf{R}}_1 \bar{\mathbf{R}}_4) (\bar{\mathbf{R}}_2 \bar{\mathbf{R}}_3) (\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_4) (\mathbf{R}_2 \mathbf{R}_3) \}. \end{aligned} \quad (47)$$

Теперь можно выписать уравнения на парный “коррелятор” $\mathcal{F}$ в главном порядке по d :

$$\begin{aligned} i\partial_\xi \mathcal{F}(\xi, \xi') - \beta \int d\xi_1 g(\xi - \xi_1) \mathcal{G}(\xi_1, \xi') \mathcal{F}(\xi_1, \xi) + \\ + \frac{1}{2} \beta^2 \int d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \mathcal{G}(\xi_3, \xi') \bar{\mathcal{F}}(\xi_1, \xi_2) \mathcal{F}(\xi_1, \xi_2) \mathcal{F}(\xi, \xi_3) [h(\xi_1, \xi_2; \xi_3, \xi) - \\ - g(\xi_1 - \xi_2) g(\xi_3 - \xi)] + \int d\xi_1 [X(\xi, \xi_1) \mathcal{F}(\xi_1, \xi') + 2Z(\xi_1, \xi) \mathcal{G}(\xi', \xi_1)] = 0. \end{aligned} \quad (48)$$

Используя тождества, полученные путем дифференцирования эффективного действия (см. (47)), можно получить уравнения и на величины $\mathcal{G}$, $\bar{\mathcal{F}}$. Но и не проводя этих операций можно увидеть, что использование негауссовой статистики не влияет на вид этих уравнений в предположении, что внешние поля отсутствуют. Действительно, положив $X = Y = Z = 0$, получим уравнения на парные корреляторы F , G :

$$i\partial_\xi F(\xi, \xi') - \beta \int d\xi_1 g(\xi - \xi_1) G(\xi_1, \xi') F(\xi_1, \xi) = 0, \quad (49)$$

$$i\partial_\xi G(\xi, \xi') = \delta(\xi - \xi'), \quad (50)$$

$$i\partial_\xi G(\xi', \xi) = -\delta(\xi - \xi'). \quad (51)$$

Таким образом, мы приходим к выводу, что для парных корреляторов в главном порядке по d негауссовы добавки ничего не дают, так как не изменяют уравнения на эти величины (ср. уравнения (29)–(31)). Это означает, что величина $\bar{\lambda}$ не меняется в рамках рассматриваемого приближения (большие d). Можно убедиться, что уравнения на

$\bar{F}(\xi, \xi', \xi'')$ и $G(\xi, \xi', \xi'')$ также не изменяются в главном по размерности пространства порядке. Однако уравнение, определяющее неприводимый коррелятор $F(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, претерпевает изменения:

$$i\partial_\xi F(\xi, \xi', \xi'') - \beta \int d\xi_1 g(\xi_1 - \xi) [G(\xi_1, \xi', \xi'') F(\xi_1, \xi) + G(\xi_1, \xi') F(\xi_1, \xi, \xi'')] + \\ + \frac{\beta^2}{2} \int d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 h(\xi_3, \xi; \xi_1, \xi_2) G(\xi_3, \xi') \bar{F}(\xi_1, \xi_2, \xi'') F(\xi_3, \xi) F(\xi_1, \xi_2) = 0. \quad (52)$$

Дифференцированием получаем уравнение

$$[\partial_\xi \partial_{\xi'} - \beta g(\xi - \xi')] F(\xi, \xi', \xi'') = \\ = -\beta^2 \int d\xi_1 d\xi_2 g(\xi - \xi_1) g(\xi' - \xi_2) F(\xi, \xi_1) \bar{F}(\xi_1, \xi_2, \xi'') F(\xi_2, \xi') - \\ - \frac{\beta^2}{2} \int d\xi_1 d\xi_2 h(\xi', \xi; \xi_1, \xi_2) \bar{F}(\xi_1, \xi_2, \xi'') F(\xi_1, \xi_2) F(\xi, \xi'). \quad (53)$$

При выводе этого уравнения было использовано уравнение на $G(\xi, \xi', \xi'')$ (см. [1]). Умножим правую и левую части уравнения (53) на $\bar{F}(\xi, \xi', \xi_3)$ и проинтегрируем по ξ и ξ' . Воспользовавшись уравнением на коррелятор $\bar{F}(\xi, \xi', \xi_3)$, получим для вклада от неприводимого коррелятора четвертого порядка скорости

$$F_h(\xi_3, \xi_3, \xi'') = \frac{\beta^2}{4} \int d\xi d\xi' d\xi_1 d\xi_2 h(\xi, \xi'; \xi_1, \xi_2) \times \\ \times \bar{F}(\xi_1, \xi_2, \xi'') F(\xi_1, \xi_2) \bar{F}(\xi, \xi', \xi_3) F(\xi, \xi'). \quad (54)$$

Произведем оценку интеграла. Для этого вспомним, как ведут себя функции $F(\xi_1, \xi_2)$ и $\bar{F}(\xi_1, \xi_2, \xi'')$. Обе эти функции в пределе $\beta \gg 1$ сильно спадают при $\xi_1 - \xi_2 \approx \xi_{\text{char}}$, поэтому в $h(\xi, \xi'; \xi_1, \xi_2)$ можно положить $\xi \approx \xi'$ и $\xi_1 \approx \xi_2$. В результате интегрирования по разностям $\xi - \xi'$, $\xi_1 - \xi_2$ получим ξ_{char}^2 , по разности $\xi - \xi_1$ — параметр α , а четвертое интегрирование даст $\min(\xi_3, \xi'')$. В итоге приходим к результату:

$$F_h(\xi, \xi, \xi'') \propto \alpha \beta^{\frac{a+3}{a+2}} \min(\xi, \xi'') \exp(\bar{\lambda}(\xi + \xi'')). \quad (55)$$

В то же время

$$F(\xi, \xi) = \Psi_0(0) e^{\bar{\lambda}\xi} \sim \beta^{\frac{1}{2(a+2)}} e^{\bar{\lambda}\xi}.$$

Теперь можно определить дисперсию:

$$\Delta_{\text{LR}} \propto \frac{\alpha}{d\tau} \beta. \quad (56)$$

Рассмотрим противоположный случай короткокоррелированного поля скорости: $\beta \ll 1$. В этом случае корреляционные функции тензора $\sigma_{\alpha\beta}$ заменяются на выражения типа

$$g(\xi) = 2\delta(\xi), \\ h(\xi_1, \xi_2; \xi_3, \xi_4) = \frac{\alpha}{d} \delta(\xi_1 - \xi_2) \delta(\xi_3 - \xi_4) \delta(\xi_2 - \xi_3). \quad (57)$$

Воспользовавшись тем фактом, что корреляторы, стоящие под интегралом (54), не изменились в пределе больших размерностей пространства d под влиянием отклонения статистики скорости от гауссовой, несложно вычислить упомянутый интеграл, подставив в него уже известные выражения:

$$F_h(\xi, \xi, \xi') = R_0^4 \alpha \beta^2 \exp[2\beta(\xi + \xi')] \min(\xi, \xi'). \quad (58)$$

В этом случае коррелятор (16) имеет вид

$$\frac{\langle\langle R^4 \rangle\rangle}{\langle R^2 \rangle^2} = \frac{dF_h(\xi, \xi, \xi)}{d^2 F(\xi, \xi)^2} = \frac{\alpha \beta^2}{d\tau} t. \quad (59)$$

Отсюда непосредственно находим дисперсию:

$$\Delta_{\text{SR}} = \frac{\alpha D^2 \tau}{4d}. \quad (60)$$

Полезно переписать полученные в двух предельных случаях выражения для дисперсии через средний темп разбегания:

$$\Delta_{\text{LR}} \propto \frac{\alpha \bar{\lambda}^2 \tau}{d}, \quad (61)$$

$$\Delta_{\text{SR}} = \frac{\alpha \bar{\lambda}^2 \tau}{4d}. \quad (62)$$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы исследовали статистику расстояния между лагранжевыми траекториями R в крупномасштабном поле скорости. На временах, больших времени корреляции скорости, мы получили логнормальную статистику, которой соответствует выражение (10). Используя технику больших размерностей пространства d , мы оценили влияние различных параметров, характеризующих статистику градиентов скорости, на величины $\bar{\lambda}$ и Δ , входящие в (10). Имеются два основных безразмерных параметра: β (22), определяющий время корреляции градиентов скорости, и α (46), определяющий степень отклонения статистики градиентов скорости от гауссовой. Зависимость $\bar{\lambda}$ и Δ от β исследовалась в работе [1], где было показано, что $\bar{\lambda} \sim D$ при $\beta \ll 1$ и $\bar{\lambda} \sim \sqrt{D/\tau}$ при $\beta \gg 1$. При малых β оценка Δ универсальна: $\Delta \sim D$, в то время как при больших β она зависит от показателя a (см. (41)): $\Delta \sim \beta^{(1+a)/(2+a)}/\tau$. Неприводимый коррелятор четвертого порядка градиентов скорости (45) дает дополнительный вклад в Δ , который можно оценить как $\alpha D^2 \tau$ при $\beta \ll 1$ и $\alpha \beta/\tau$ при $\beta \gg 1$. Можно ввести критическое значение α_{cr} параметра α , начиная с которого роль высших неприводимых корреляторов градиента скорости становится определяющей. Это критическое значение может быть оценено: $\alpha_{\text{cr}} \sim \beta^{-1}$ при $\beta \ll 1$ и $\alpha_{\text{cr}} \sim \beta^{-1/2}$ при $\beta \gg 1$. Область параметров $\alpha \gg \alpha_{\text{cr}}$ требует особого рассмотрения, так как наша техника в этой области не работает.

Благодарности. Автор выражает свою признательность В.В. Лебедеву, сыгравшему руководящую роль при написании этой статьи.

Список литературы

- [1] *G. Falkovich, V. Kazakov, V. Lebedev.* Physica A. 1998. V. 249. P. 36.
- [2] *L. Richardson.* Proc. Roy. Soc. London A. 1926. V. 110. P. 709.
- [3] *R. H. Kraichnan.* Phys. Fluids. 1964. V. 7. P. 1723; 1965. V. 8. P. 575.
- [4] *B. Shraiman, E. Siggia.* Phys. Rev. E. 1994. V. 49. P. 2912.
- [5] *R. H. Kraichnan.* Phys. Fluids. 1966. V. 9. P. 1937.
- [6] *M. Lesieur.* Turbulence in Fluids. London: Kluwer Acad. Publ., 1990.
- [7] *R. H. Kraichnan.* Phys. Fluids. 1968. V. 11. P. 945.
- [8] *R. H. Kraichnan.* J. Fluid Mech. 1974. V. 64. P. 737.
- [9] *G. Falkovich, I. Kolokolov, V. Lebedev, A. Migdal.* Phys. Rev. E. 1996. V. 54. P. 4896.
- [10] *G. K. Batchelor.* J. Fluid Mech. 1959. V. 5. P. 113.
- [11] *M. Chertkov, G. Falkovich, I. Kolokolov, V. Lebedev.* Phys. Rev. E. 1995. V. 51. P. 5609.
- [12] *M. Chertkov, A. Gamba, I. Kolokolov.* Phys. Lett. A. 1994. V. 192. P. 435.
- [13] *G. 't Hooft.* Nucl. Phys. B. 1974. V. 72. P. 461.
- [14] *H. E. Stanley.* Phys. Rev. 1968. V. 176. P. 718.
- [15] *H. W. Wylde.* Ann. Phys. 1961. V. 14. P. 143.
- [16] *P. C. Martin, E. D. Siggia, H. A. Rose.* Phys. Rev. A. 1973. V. 8. P. 423.
- [17] *S. K. Ma.* Modern Theory of Critical Phenomena. New York: Benjamin, 1976.
- [18] *C. de Dominicis.* J. Phys. (Paris). Suppl. Colloque C-1. 1976. V. 37. P. 247.
- [19] *H. K. Janssen.* Z. Phys. B. 1976. V. 23. P. 377.
- [20] *В. Н. Попов.* Функциональные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. М.: Атомиздат, 1976.

Поступила в редакцию 9.IV.1999 г.,
после доработки 28.VI.1999 г.