Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Е. Степанов, Об одном аналитическом методе общей теории относительности,
ТМФ, 2000, том 122, номер 3, 482–496

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf581>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 16:49:40

ОБ ОДНОМ АНАЛИТИЧЕСКОМ МЕТОДЕ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Пятьдесят лет в глобальных римановой и кэлеровой геометриях успешно применяется аналитический метод, названный известным американским математиком Ву “техникой Бохнера”. В статье рассмотрены возможности данного метода при изучении на лоренцевом многообразии конформно киллинговых и гармонических времениподобных векторных полей, а также некоторых гидродинамических моделей Вселенной, вопросов существования замкнутых пространственноподобных сечений и возможности расщепления лоренцевых многообразий.

1. ВВЕДЕНИЕ

Достижения в теории причинности, теории сингулярностей, а также в изучении черных дыр в общей теории относительности вызывают активный интерес физиков к методам дифференциальной геометрии. Вот уже пятьдесят лет в глобальных римановой и кэлеровой геометриях успешно применяется аналитический метод, названный известным американским математиком Ву “техникой Бохнера”. Этот метод является общим для доказательства так называемых “vanishing theorems”, в которых устанавливается обращение в нуль некоторых топологических или геометрических инвариантов (таких как числа Бетти или размерность векторного пространства Киллинга) замкнутого риманова многообразия при определенных ограничениях на его кривизну.

Известны, по крайней мере, три обзора работ [1–3], выполненных с использованием “техники Бохнера”, каждый из которых содержит более 70 ссылок на литературу, куда включены как отдельные статьи, так и монографии.

Целью данной статьи является привлечение внимания отечественных физиков, работающих в общей теории относительности, к возможности разработки на основе “техники Бохнера” аналитических способов доказательств утверждений для лоренцевых многообразий. Это важно еще и потому, что в зарубежной литературе уже встречались отдельные попытки использовать эту технику для изучения некоторых физических моделей [4–7].

Рамки статьи позволяют продемонстрировать возможности “техники” на примере применения интегральных формул одного вида.

*Владимирский государственный педагогический университет, Владимир, Россия

В основе статьи лежит лекция автора, прочитанная на X Международной школе-семинаре по современным проблемам теоретической и математической физики (Казань, 22 июня – 2 июля 1998 г.), а также его работы [8–11].

2. ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ

Рассмотрим n -мерное лоренцево многообразие (M, g) с метрикой g сигнатуры $(-, +, +, \dots, +)$ и связностью Леви-Чевиты ∇ .

Пусть в некоторой области U многообразия задано непрерывное, нигде не обращающееся в нуль мнимое единичное векторное поле ξ . При $U = M$ говорят, что (M, g) – *ориентированное во времени лоренцево многообразие* или по другой терминологии *n -мерное пространство-время* [12, с. 13].

Каждое касательное векторное пространство $\mathbf{E} = T_x M$ в области задания векторного поля ξ представляет собой ортогональную сумму подпространства $\mathbf{V} = \text{span}\{\xi_x\}$ и подпространства $\mathbf{H} = \mathbf{V}^\perp$, состоящего из векторов, ортогональных ξ_x . В 4-мерном пространстве-времени (M, g) , когда единичный времениподобный вектор ξ_x рассматривают в качестве *инфинитезимального наблюдателя*, пространство $\mathbf{H}$ носит название *пространства покоя* [13, с. 131].

Обозначим через $v_x: T_x M \rightarrow \mathbf{V}$ и $h_x: T_x M \rightarrow \mathbf{H}$ операторы ортогонального проектирования такие, что $v = -\varkappa \otimes \xi$ и $h = \text{id} + \varkappa \otimes \xi$ для 1-формы $\varkappa$, дуальной векторному полю ξ по отношению к метрике g лоренцева многообразия (M, g) .

Метрика $q = g_x$ пространства $\mathbf{E} = T_x M$ имеет вид $q = q^h \oplus q^v$ для $q^h = q(h, h)$ и $q^v = q(v, v)$, при этом q^h является положительно-определенной квадратичной формой на $(n - 1)$ -мерном векторном пространстве $\mathbf{H}$. Ортогональная группа $O(q)$, задаваемая формой q и действующая на векторном пространстве $\mathbf{E}$, распадается в произведение $O(q) = O(q^h) \times O(q^v)$ ортогональных групп, действующих соответственно на $\mathbf{H}$ и $\mathbf{V}$.

Мнимое единичное векторное поле ξ порождает на лоренцевом многообразии (M, g) тензорное поле $A_\xi = -\nabla \xi$ типа $(1, 1)$. Путем ковариантного дифференцирования равенства $g(\xi, \xi) = -1$ получаем условие $g(A_\xi X, \xi) = 0$, которому удовлетворяет тензорное поле A_ξ . Поэтому в каждой точке $x \in M$ тензор $A_\xi|_x$ поля A_ξ должен принадлежать тензорному пространству $\mathbf{E}^* \otimes \mathbf{H}$. Здесь $\mathbf{E}^*$ – пространство линейных форм, заданных на векторном пространстве $\mathbf{E}$. $\mathbf{E}^*$ изоморфно $\mathbf{E}$.

Обозначим через $\Lambda^2 \mathbf{H}$ и $S_0^2 \mathbf{H}$ пространства кососимметрических и бесследовых симметрических 2-тензоров на $\mathbf{H}$. Заметим, что форма q^h , являясь невырожденной квадратичной формой на $\mathbf{H}$, индуцирует след, представляющий собой линейное отображение $\text{tr}_{q^h}: S^2 \mathbf{H} \rightarrow \mathbb{R}$.

Согласно [8] для тензорного пространства $\mathbf{E}^* \otimes \mathbf{H}^*$ справедливо следующее его $(O(q^h) \times O(q^v))$ -неприводимое разложение:

$$\mathbf{E}^* \otimes \mathbf{H}^* = (\mathbf{H}^* \otimes \mathbf{V}^*) \otimes \mathbf{H}^* = \Lambda^2 \mathbf{H} \oplus S_0^2 \mathbf{H} \oplus \mathbb{R} q^h \oplus (\mathbf{V}^* \otimes \mathbf{H}^*), \quad (2.1)$$

где $\mathbf{H}^*$ и $\mathbf{V}^*$ суть пространства 1-форм, обращающихся в нуль на векторных пространствах $\mathbf{V}$ и $\mathbf{H}$ соответственно. Пространства $\mathbf{H}^*$ и $\mathbf{V}^*$ изоморфны пространствам $\mathbf{H}$ и $\mathbf{V}$.

В соответствии с (2.1) тензорное поле A_ξ представимо в виде следующей суммы из четырех поточечно $(O(q^h) \times O(q^v))$ -неприводимых тензорных компонент:

$$g(A_\xi X, Y) = \omega(X, Y) + \sigma(X, Y) + \frac{1}{n-1} \theta g^h(X, Y) + g(\xi, X)g(A_\xi \xi, Y), \quad (2.2)$$

для которых в произвольной точке $x \in U$ справедливы включения

$$\omega|_x \in \Lambda^2 \mathbf{H}, \quad \sigma|_x \in S_0^2 \mathbf{H}, \quad (n-1)^{-1} \theta|_x g^h|_x \in \mathbb{R} q^h, \quad g(\xi, \cdot)|_x g(A_\xi \xi, \cdot)|_x \in \mathbf{V}^* \otimes \mathbf{H}^*.$$

При этом для любых $X, Y \in C^\infty TM$ выполняются равенства

$$\omega(X, Y) = \frac{1}{2} [g(hX, A_\xi hY) - g(hY, A_\xi hX)], \quad (2.3)$$

$$\sigma(X, Y) = -\frac{1}{n-1} \theta g^h(X, Y) - \frac{1}{2} [g(hX, A_\xi hY) + g(hY, A_\xi hX)], \quad (2.4)$$

$$\theta = -\operatorname{tr} A_\xi. \quad (2.5)$$

Рассмотрим релятивистскую жидкость, которая движется через 4-мерное пространство-время (M, g) с единичной скоростью так, что линиями тока жидкости являются интегральные кривые векторного поля, образованного ее времениподобными касательными векторами ξ . Кинематика бесконечно малого объема жидкости описывается следующими величинами [14, с. 219; 15, с. 58]: *тензором завихренности или вращения* (2.3), *тензором (поперечного) сдвига* (2.4), *расширением жидких мировых линий* (2.5) и *полем $\xi' = -A_\xi \xi$ векторов 4-ускорения*.

Напомним, что движение релятивистской жидкости в 4-мерном пространстве-времени при $\omega = 0$ будет *невращательным*, при $\sigma = 0$ — *бессдвиговым*, при $\theta = 0$ — *без расширения (несжимаемым)* и, наконец, при $\sigma = \theta = 0$ — *жестким по Борну* [16, с. 106, 153].

Можно также рассмотреть заряженную жидкость с сохраняющимся электрическим зарядом e , т.е. $\operatorname{div} J = 0$ для 4-вектора тока $J = e\xi$. Тогда в дополнение к известным уравнениям электродинамики [17, с. 83; 16, с. 299–306] имеет место представление тензора F электромагнитного поля в виде суммы из двух поточечно $(O(q^h) \times O(q^v))$ -неприводимых компонент [18, 19]:

$$F(X, Y) = F(hX, hY) + \frac{m}{e} [g(\xi, X)g(\xi', Y) - g(\xi, Y)g(\xi', X)], \quad (2.6)$$

где $F(h, h)$ и $P(X, Y) = me^{-1} [g(\xi, X)g(\xi', Y) - g(\xi, Y)g(\xi', X)]$ — *тензоры напряженности магнитного и электрического полей*.

С мнимоединичным векторным полем ξ на n -мерном лоренцевом многообразии (M, g) ассоциируется пространственноподобное распределение $\mathcal{H}: x \in U \rightarrow \mathbf{H} \subset T_x M$ для всех точек x области U , где задано векторное поле ξ .

Тензор интегрируемости A распределения $\mathcal{H}$ [20, с. 148] можно задать следующим равенством [11, 21]:

$$A(X, Y) = \frac{1}{2} v(\nabla_{hX} hY - \nabla_{hY} hX)$$

для произвольных $X, Y \in C^\infty TM$.

Если в каждой точке области U тензор $A = 0$, то распределение $\mathcal{H}$ становится *инволютивным* [22, с. 19] и задает *слоение* из $(n - 1)$ -мерных пространственноподобных интегральных многообразий (M', g') таких, что $T_x M' = \mathbf{H}$ и $g'|_x = g(h_x, h_x) = q^h$ в каждой точке $x \in M'$. Эти многообразия будем называть, как это и принято, *сечениями* пространства-времени.

Дифференцируя ковариантным образом тождество $g(\xi, hY) = 0$ в направлении векторного поля hX , получаем

$$g(A_\xi hX, hY) = g(\xi, \nabla_{hX} hY) = \varkappa(\nabla_{hX} hY). \quad (2.7)$$

На основании равенств (2.7) и (2.3) заключаем, что

$$A = -\omega \otimes \xi \quad (2.8)$$

и, следовательно,

$$\|A\|^2 = -\|\omega\|^2 = -g^{ij}g^{kl}\omega_{ik}\omega_{jl} \leq 0.$$

Согласно (2.8) движение релятивистской жидкости в 4-мерном пространстве-времени является *невращательным* в том и только в том случае, если распределение $\mathcal{H}$ инволютивно [16, с. 153].

Вторую фундаментальную форму G распределения $\mathcal{H}$ [20, с. 148] можно задать равенством [11, 21]

$$G(X, Y) = \frac{1}{2}v(\nabla_{hX} hY + \nabla_{hY} hX). \quad (2.9)$$

При этом величину $H = (n - 1)^{-1} \text{trace}_g G$ называют [20, с. 149] *вектором средней кривизны распределения* $\mathcal{H}$.

При $H = 0$ интегральные многообразия инволютивного распределения $\mathcal{H}$ будут *максимальными подмногообразиями* лоренцева многообразия (M, g) . На этом основании $\mathcal{H}$ назовем *максимальным распределением* (а не минимальным, в отличие от риманова случая [20, с. 149]), если всюду в области его задания $H = 0$.

Распределение $\mathcal{H}$ называется *омбилическим* [20, с. 151], если всюду в области его задания

$$G = g^h \otimes H = \frac{1}{n-1}g^h \otimes (\text{trace}_g G). \quad (2.10)$$

Инволютивное омбилическое распределение $\mathcal{H}$ задает на многообразии (M, g) слоение из $(n - 1)$ -мерных вполне омбилических интегральных многообразий. Метрика такого многообразия (M, g) описана в литературе [23, с. 219]. Частным видом ее является метрика модели “большого взрыва” Робертсона–Уокера [12, с. 117].

Заметим, что бесследовая часть G_0 второй фундаментальной формы G распределения $\mathcal{H}$ определяется равенством

$$G_0 = G - \frac{1}{n-1}g^h \otimes \text{trace}_g G. \quad (2.11)$$

Опираясь на равенства (2.4) и (2.7), убеждаемся, что

$$G_0 = -\sigma \otimes \xi \quad (2.12)$$

и, следовательно,

$$\|G_0\|^2 = -\|\sigma\|^2 = -g^{ij}g^{kl}\sigma_{ik}\sigma_{jl} \leq 0.$$

Сравнивая равенства (2.4), (2.5) и (2.12), заключаем, что

$$\theta^2 = -\|\operatorname{trace}_g G\|^2 = -g(\operatorname{trace}_g G, \operatorname{trace}_g G). \quad (2.13)$$

Теперь на основании равенства (2.12) и (2.13) для 4-мерного пространства-времени (M, g) может быть сформулирована следующая лемма.

ЛЕММА 2.1. *Для того чтобы в области 4-мерного пространства-времени (M, g) с мнимоединичным векторным полем ξ распределение, составленное из ортогональных полю ξ пространств покоя, было омбилическим (максимальным), необходимо и достаточно, чтобы интегральные кривые поля ξ моделировали в этой области бессдиговый (соответственно без расширения) поток релятивистской жидкости.*

3. ТЕОРЕМА СТОКСА ДЛЯ МНИМОЕДИНИЧНОГО ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Пусть V – координатная окрестность на многообразии (M, g) с локальной системой координат $x^0, x^1, \dots, x^{n-1}$. Обозначим через ∇_i символ ковариантного дифференцирования в направлении векторного поля $\partial_i = \partial/\partial x^i$. Тогда для мнимоединичного векторного поля $\xi = \xi^i \partial_i$ имеем

$$\operatorname{div} \xi' = \nabla_i(\xi^j \nabla_j \xi^i) = (\nabla_i \nabla_j \xi^i) \xi^j + (\nabla_i \xi^j)(\nabla_j \xi^i) \quad (3.1)$$

для $i, j, k, l = 0, 1, \dots, n-1$. Воспользуемся тождествами Риччи

$$\xi^k R_{kij}^l = \nabla_i \nabla_j \xi^l - \nabla_j \nabla_i \xi^l,$$

где R_{kij}^l – компоненты тензора R кривизны связности ∇ , определяемые равенством $R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = R_{kij}^l \partial_l$. Тогда имеем

$$\operatorname{div} \xi' = R_{ij} \xi^i \xi^j + \xi^j (\nabla_j \nabla_i \xi^i) + (\nabla_i \xi^j)(\nabla_j \xi^i). \quad (3.2)$$

Здесь $R_{ij} = R_{ikj}^k$ – компоненты тензора Риччи Ric лоренцева многообразия (M, g) . Обозначая через $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$ компоненты метрики g , а через g^{ij} ее контравариантные компоненты, равенству (3.2) можно придать следующий вид:

$$\operatorname{div} \xi' = R_{ij} \xi^i \xi^j + \xi^j (\nabla_j \nabla_i \xi^i) + g^{il} g^{kj} (\nabla_i \xi_k)(\nabla_j \xi_l).$$

Далее, воспользовавшись разложением (2.2), придем к уравнению

$$\operatorname{div} \xi' = \operatorname{Ric}(\xi, \xi) - \|\omega\|^2 + \|\sigma\|^2 + \frac{1}{n-1}\theta^2 + \xi(\theta), \quad (3.3)$$

больше известному для случая $n = 4$ как уравнение Ландау–Райчаудхури [16, с. 97].

Для векторного поля $\theta\xi$ будем иметь

$$\operatorname{div}(\theta\xi) = \xi(\theta) + \theta^2,$$

тогда

$$\operatorname{div}(\xi' - \theta\xi) = \operatorname{Ric}(\xi, \xi) - \|\omega\|^2 + \|\sigma\|^2 - \frac{n-2}{n-1}\theta^2. \quad (3.4)$$

Рассмотрим ориентированную область U n -мерного многообразия M . Обозначим через ∂U границу области U , представляющую собой связное $(n-1)$ -мерное подмногообразие в M , на котором (с помощью направленного наружу в каждой точке $x \in \partial U$ вектора $\mathcal{N}$) задается естественная ориентация. Тогда для произвольной гладкой $(n-1)$ -формы Ω на U имеет место *теорема Стокса*

$$\int_U d\Omega = \int_{\partial U} \Omega, \quad (3.5)$$

где под знаком интеграла в левой части стоит внешний дифференциал $(n-1)$ -формы Ω , а в правой части – ограничение Ω на ∂U .

Полагаем M лоренцевым многообразием с метрикой g , тогда элемент объема (M, g) задается равенством $\eta = \sqrt{|\det(g)|}$. При этом задание трансверсального ∂U -поля $\mathcal{N}$ направленных наружу векторов определяет не только ориентацию границы ∂U , но и позволяет задать ее элемент объема η' равенством $\eta'(e_1, \dots, e_{n-1}) = \eta(\mathcal{N}, e_1, \dots, e_{n-1})$, выполняющимся для ориентированных адаптированных базисов $\{\mathcal{N}, e_1, \dots, e_{n-1}\}$ во всех точках $x \in \partial U$ таких, что $T_x \partial U = \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ [9].

При $\Omega = \operatorname{trace}[(\xi' - \theta\xi) \otimes \eta]$ на основании соотношения (3.4) теореме Стокса (3.5) можно придать следующий вид [9]:

$$\int_U \left[\operatorname{Ric}(\xi, \xi) - \|\omega\|^2 + \|\sigma\|^2 - \frac{n-2}{n-1}\theta^2 \right] \eta = \int_{\partial U} \operatorname{trace}[(\xi' - \theta\xi) \otimes \eta]. \quad (3.6)$$

В случае, если границей ∂U служит связное $(n-1)$ -мерное времениподобное подмногообразие [12, с. 55] с ортогональными в каждой ее точке единичными векторами поля $\mathcal{N}$, а мнимое единичное векторное поле ξ касается границы ∂U во всех ее точках, интегральную формулу (3.6) представим в следующем виде [9]:

$$\int_U \left[\operatorname{Ric}(\xi, \xi) - \|\omega\|^2 + \|\sigma\|^2 - \frac{n-2}{n-1}\theta^2 \right] \eta = \int_{\partial U} Q'(\xi, \xi) \eta'. \quad (3.7)$$

Здесь Q' – вторая фундаментальная форма границы ∂U [12, с. 56], определяемая из уравнения Гаусса $Q'(X', Y') = g(\nabla_{X'} Y', \mathcal{N})$ для произвольных $X', Y' \in C^\infty T \partial U$. Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.1. *Времениподобное векторное поле ζ , не обращающееся в нуль в точках области U лоренцева многообразия (M, g) и касающееся ее времениподобной границы ∂U , удовлетворяет интегральному уравнению (3.7).*

Рассмотрим теперь область U лоренцева многообразия (M, g) , границей ∂U которой служит связное $(n - 1)$ -мерное пространственноподобное подмногообразие [12, с. 55]. Предположим также, что в области U задано времениподобное единичное векторное поле ξ , ортогональное границе ∂U области U во всех ее точках. Тогда

$$\xi = \varepsilon \mathcal{N} \quad (3.8)$$

для $\varepsilon = \pm 1$. Дифференцируя ковариантным образом вдоль ∂U левую и правую части равенства (3.8), получим

$$A_\xi hX = \varepsilon S hX \quad (3.9)$$

для операторов ортогонального проектирования $h_x: T_x M \rightarrow T_x \partial U$ и оператора Вейнгартена S , связанного со второй фундаментальной формой Q' края ∂U равенством $g(SX', Y') = Q'(X', Y')$ для всех $X', Y' \in C^\infty T\partial U$.

Возьмем след в левой и правой частях равенства (3.9). В левой части будем иметь

$$\text{trace}(hA_\xi) = \text{trace}(A_\xi \cdot (\text{id} + \xi \otimes \varkappa)) = \text{trace} A_\xi + \varepsilon \varkappa(A_\xi \xi) = -\theta.$$

Соответственно в правой части равенства (3.9) при взятии следа получим

$$\text{trace}(\varepsilon S \cdot h) = \varepsilon \text{trace}(S \cdot h) = \varepsilon(n - 1)H',$$

где $H' = (n - 1)^{-1} \text{trace}_{g'} Q'$ — средняя кривизна границы ∂U . В результате заключаем, что $\theta = -\varepsilon(n - 1)H'$. На основании этого будем иметь

$$\eta(\xi' - \theta\xi, e_2, \dots, e_{n-1}) = (n - 1)H'\eta'. \quad (3.10)$$

Интегральная формула (3.6) примет следующий вид:

$$\int_U \left[\text{Ric}(\xi, \xi) - \|\omega\|^2 + \|\sigma\|^2 - \frac{n-2}{n-1}\theta^2 \right] \eta = (n - 1) \int_{\partial U} H'\eta'. \quad (3.11)$$

Вышеизложенные результаты можно сформулировать в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 3.2. *Мнимоеединичное векторное поле ξ , не обращающееся в нуль в области U лоренцева многообразия (M, g) и ортогональное ее пространственноподобной границе ∂U , удовлетворяет интегральному уравнению (3.11).*

На основании равенства (3.3) можно получить еще одно интегральное уравнение

$$\int_U [\xi(\theta) + \theta^2] \eta = (n - 1) \int_{\partial U} H'\eta',$$

которое связывает расхождение в области U со средней кривизной ее границы ∂U .

4. ПРЕПЯТСТВИЯ К СУЩЕСТВОВАНИЮ КОНФОРМНО КИЛЛИНГОВА И ГАРМОНИЧЕСКОГО ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

Векторное поле ζ , заданное на псевдоримановом многообразии (M, g) , называется *конформно киллинговым*, если порождаемая им однопараметрическая группа диффеоморфизмов состоит из локальных конформных преобразований [23, с. 277–281]. Последнее означает, что

$$(\mathcal{L}_\zeta g)(X, Y) = g(A_\zeta X, Y) + g(X, A_\zeta Y) = 2\lambda g(X, Y), \quad (4.1)$$

где $\mathcal{L}_\zeta$ — производная Ли по направлению векторного поля ζ , тензорное поле $A_\zeta = -\nabla\zeta$, $\lambda = -(1/n)\text{trace} A_\zeta$ и векторы $X, Y \in C^\infty TM$ произвольны. Если $\lambda = 0$ всюду в области U , то группа диффеоморфизмов состоит из локальных изометрий, а векторное поле ζ является киллинговым [13, с. 61].

Обозначим через U область лоренцева многообразия (M, g) , где времениподобное конформно киллингово векторное поле ζ не обращается в нуль. Обозначим через ξ орт поля ζ , тогда $\zeta = \sqrt{|g(\zeta, \zeta)|} \xi$ и

$$A_\zeta = |g(\zeta, \zeta)| A_\xi - (\text{grad} \sqrt{|g(\zeta, \zeta)|}) \otimes \xi. \quad (4.2)$$

Из (4.2) следует, что $g(A_\zeta X, hY) = \sqrt{|g(\zeta, \zeta)|} g(A_\xi X, hY)$, а потому, принимая во внимание уравнение (4.1), будем иметь

$$g(A_\xi hX, hY) + g(hX, A_\xi hY) = 2\lambda' g(hX, hY), \quad (4.3)$$

где

$$\lambda' = \lambda (\sqrt{|g(\zeta, \zeta)|})^{-1} = -(n-1)^{-1} \text{trace} A_\xi.$$

Сравнивая (4.3) с (2.4), заключаем, что $\sigma = 0$.

Предположим теперь, что область U имеет времениподобную границу ∂U , которой векторное поле ζ касается во всех ее точках. Обратимся тогда к интегральной формуле (3.7), которая в нашем случае принимает вид

$$\int_U \left[\text{Ric}(\xi, \xi) - \|\omega\|^2 - \frac{n-2}{n-1} \theta^2 \right] \eta = \int_{\partial U} Q'(\xi, \xi) \eta'. \quad (4.4)$$

Если положить, что $\text{Ric}(\xi, \xi) \leq 0$ всюду в области U , $Q'(\xi, \xi) \geq 0$ на ее границе ∂U и $Q'(\xi_x, \xi_x) > 0$ хотя бы в одной ее точке $x \in \partial U$, то из интегральной формулы (4.4) последовало бы, что $\xi = 0$. Последнее противоречит сделанному предположению относительно векторного поля ζ . В результате мы можем сформулировать утверждение, выражающее условия препятствия к существованию времениподобного конформно киллингова векторного поля на лоренцевом многообразии (M, g) .

ТЕОРЕМА 4.1. *Не существует n -мерного ($n \geq 3$) лоренцева многообразия (M, g) с времениподобным конформно киллинговым векторным полем ζ , удовлетворяющего следующим условиям:*

- 1) *существует в (M, g) такая область U с времениподобной границей ∂U , где векторное поле ζ не обращается в нуль и касается границы во всех ее точках;*
- 2) *$\text{Ric}(\zeta, \zeta) \leq 0$ в области U ;*
- 3) *вторая фундаментальная форма границы $Q'(\zeta, \zeta) \geq 0$, за исключением хотя бы одной точки $x \in \partial U$, где $Q'(\zeta_x, \zeta_x) > 0$.*

Если ослабить условия этой теоремы, потребовав в пункте 3, чтобы вторая фундаментальная форма границы во всех времениподобных направлениях принимала неотрицательные значения, то, как это нетрудно установить, векторное поле ζ будет рекуррентным.

Предположим, что в многообразии (M, g) существует область U с пространственноподобной границей ∂U , которой ортогонально времениподобное конформно киллингово векторное поле ζ . Обозначим через ξ его орт и воспользуемся интегральной формулой (3.11), которая принимает в нашем случае следующий вид:

$$\int_U \left[\text{Ric}(\xi, \xi) - \|\omega\|^2 - \frac{n-2}{n-1} \theta^2 \right] \eta = (n-1) \int_{\partial U} H' \eta'. \quad (4.5)$$

Если положить, что $\text{Ric}(\xi, \xi) \leq 0$ всюду в области U , $H' \geq 0$ на ее границе ∂U и $H'(x) > 0$ хотя бы в одной ее точке $x \in \partial U$, то из интегральной формулы (4.5) будет следовать, что $\xi = 0$. Это противоречит сделанному предположению относительно векторного поля ζ .

ТЕОРЕМА 4.2. *Не существует n -мерного ($n \geq 3$) лоренцева многообразия (M, g) с времениподобным конформно киллинговым векторным полем ζ , удовлетворяющего следующим условиям:*

- 1) *существует в (M, g) область U с пространственноподобной границей ∂U , где векторное поле не обращается в нуль и ортогонально границе во всех ее точках;*
- 2) *$\text{Ric}(\zeta, \zeta) \leq 0$ в области U ;*
- 3) *средняя кривизна границы неотрицательна, за исключением хотя бы одной точки, где она больше нуля.*

Очевидно, что если в теореме условие 3 заменить более слабым условием неотрицательности средней кривизны границы, то векторное поле ζ будет рекуррентным.

Времениподобное векторное поле ζ на лоренцевом многообразии (M, g) называется гармоническим [24], если тензорное поле A_ζ удовлетворяет следующим условиям:

$$g(A_\zeta X, Y) - g(X, A_\zeta Y) = 0, \quad \text{trace } A_\zeta = 0,$$

для произвольных векторных полей $X, Y \in C^\infty TM$.

Пусть существует область U лоренцева многообразия (M, g) , где времениподобное гармоническое векторное поле ζ не обращается в нуль. Обозначим через ξ орт векторного поля ζ . Тогда, как и в случае с конформно киллинговым векторным полем, можно убедиться, что $\omega = \theta = 0$.

Рассуждая так же, как в начале этого раздела, можно прийти к утверждению, аналогичному теореме 4.1.

ТЕОРЕМА 4.3. *Не существует n -мерного ($n \geq 3$) лоренцева многообразия (M, g) с времениподобным гармоническим векторным полем ζ , удовлетворяющего следующим условиям:*

- 1) *существует в (M, g) такая область U с времениподобной границей ∂U , где векторное поле не обращается в нуль и касается границы во всех ее точках;*
- 2) *$\text{Ric}(\zeta, \zeta) \geq 0$ в области U ;*
- 3) *вторая фундаментальная форма границы $Q'(\zeta, \zeta) \leq 0$, за исключением хотя бы одной точки $x \in \partial U$, где $Q'(\zeta_x, \zeta_x) < 0$.*

Предположим, что в области U существует $(n-1)$ -мерное замкнутое односвязное пространственноподобное подмногообразие (M', g') , ортогональное в каждой своей точке гармоническому векторному полю ζ , тогда $\xi'_x \in T_x M'$ для всех $x \in M'$.

Поскольку $\text{div } \xi' = g^{ij} \nabla_i \xi'_j = h^{ij} \nabla_i \xi'_j - v^{ij} \nabla_i \xi'_j = h^{ij} \nabla_i \xi'_j$, то в точках подмногообразия (M', g') будем иметь $\text{div } \xi' = \text{div}_{M'} \xi'$. Замкнутое односвязное многообразие ориентируемо на основании теоремы Грина [22, с. 259]

$$\int_{M'} \text{div}_{M'} \xi' \eta' = 0.$$

Учитывая это и уравнение (3.3), видим, что

$$\int_{M'} [\text{Ric}(\xi, \xi) + \|\sigma\|^2] \eta' = 0. \quad (4.6)$$

Анализ уравнения (4.6) позволяет заключить, что справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4.4. *Не существует n -мерного ($n \geq 3$) лоренцева многообразия (M, g) с времениподобным гармоническим векторным полем такого, что в (M, g) найдется $(n-1)$ -мерное замкнутое пространственноподобное подмногообразие, в точках которого:*

- 1) *векторное поле не обращается в нуль и ортогонально последнему;*
- 2) *времениподобная кривизна Риччи неотрицательна.*

5. ТЕХНИКА БОХНЕРА В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

Изучим динамику релятивистской жидкости в области U 4-мерного пространства-времени (M, g) , полагая, что заданное в этой области мнимоединичное векторное поле ξ образовано времениподобными касательными векторами к линиям тока релятивистской жидкости.

Согласно уравнению Эйнштейна

$$\text{Ric} - 2^{-1}sg = T$$

для скалярной кривизны s лоренцева многообразия (M, g) и тензора энергии-импульса материи T находим

$$\text{Ric}(\xi, \xi) = \rho - 2^{-1}s, \quad (5.1)$$

где $\rho = T(\xi, \xi)$ — плотность массы-энергии жидкости [14, с. 219].

Назовем величину $\rho(U) = \int_U \rho \eta$ *суммарной плотностью массы-энергии релятивистской жидкости* в области U , а величину $s(U) = \int_U s \eta$ в соответствии с общей теорией назовем *полной скалярной кривизной* области U пространства-времени (M, g) .

Тогда для жидкости, текущей через область U и пересекающей ортогонально ее пространственноподобную границу ∂U , имеет место следующая интегральная формула:

$$\rho(U) - \frac{1}{2}s(U) = \int_U \left[\|\omega\|^2 - \|\sigma\|^2 + \frac{3}{2}\theta^2 \right] \eta + (n-1) \int_{\partial U} H' \eta'. \quad (5.2)$$

Если же предположить, что область U имеет времениподобную границу ∂U , то для жидкости, заполняющей эту область и текущей по ее границе ∂U , без труда выводится следующая интегральная формула:

$$\rho(U) - \frac{1}{2}s(U) = \int_U \left[\|\omega\|^2 - \|\sigma\|^2 + \frac{3}{2}\theta^2 \right] \eta + \int_{\partial U} Q'(\xi, \xi) \eta'. \quad (5.3)$$

Задача о жестком по Борну движении жидкости вследствие параболического характера системы дифференциальных уравнений оказалась сложной и привлекла внимание многих специалистов [16, с. 153]. С помощью “техники Бохнера” найдем условия, препятствующие существованию бессдвигового движения, включающего жесткое по Борну движение.

Рассмотрим бессдвиговой поток жидкости через область U , линии тока которого ортогонально пересекают ее пространственноподобную границу ∂U . В этом случае согласно (5.2) имеет место интегральная формула

$$2\rho(U) - s(U) = 2 \left(\int_U \left[\|\omega\|^2 + \frac{3}{2}\theta^2 \right] \eta + (n-1) \int_{\partial U} H' \eta' \right). \quad (5.4)$$

Это позволит сделать вывод, что $2\rho(U) \geq s(U)$, если $H' \geq 0$, а потому справедлива нижеприведенная теорема.

ТЕОРЕМА 5.1. *Следующие требования для четырехмерного пространства-времени (M, g) несовместимы:*

- 1) *имеется область U с пространственноподобной границей ∂U неотрицательной средней кривизны;*
- 2) *существует бессдвиговой поток релятивистской жидкости, заполняющий область U и ортогонально пересекающий ее границу;*

3) *удвоенная суммарная плотность массы-энергии релятивистской жидкости в области U больше полной скалярной кривизны этой области.*

Требование на знакоопределенность средней кривизны H границы ∂U области U можно заменить в утверждении более жестким требованием – быть максимальным подмногообразием (M, g) .

Рассмотрим бессдвиговый поток релятивистской жидкости, который заполняет область U и течет по ее времениподобной границе ∂U . Тогда справедлива следующая интегральная формула:

$$2\rho(U) - s(U) = 2 \left(\int_U \left[\|\omega\|^2 + \frac{3}{2}\theta^2 \right] \eta + \int_{\partial U} Q'(\xi, \xi) \eta' \right). \quad (5.5)$$

Уравнение Эйлера релятивистской гидродинамики [14, с. 216]

$$(p + \rho)g(\xi', X) = -X(p) - \xi'(p)g(\xi, X),$$

где p – давление, на границе ∂U при $X = \mathcal{N}$ для поля $\mathcal{N}$ векторов нормалей ∂U принимает следующий вид:

$$(\rho + p)g(\xi', \mathcal{N}) = -\mathcal{N}(p).$$

Поэтому

$$(\rho + p)Q'(\xi, \xi) = -\mathcal{N}(p). \quad (5.6)$$

Тогда с учетом (5.6) формулу (5.5) можно переписать в виде

$$2\rho(U) - s(U) = 2 \left(\int_U \left[\|\omega\|^2 + \frac{3}{2}\theta^2 \right] \eta - \int_{\partial U} \frac{1}{\rho + p} \mathcal{N}(p) \eta' \right). \quad (5.7)$$

Из интегральной формулы (5.7) при $\mathcal{N}(p) \leq 0$ на границе области ∂U следует неравенство $2\rho(U) \geq s(U)$ для самой области U .

ТЕОРЕМА 5.2. *Следующие требования для четырехмерного пространства-времени (M, g) несовместимы:*

- 1) *существует бессдвиговый поток релятивистской жидкости, заполняющей некоторую область U и текущей по ее времениподобной границе ∂U ;*
- 2) *$\mathcal{N}(p) \leq 0$ для векторного поля нормалей $\mathcal{N}$ границы ∂U и давления p релятивистской жидкости;*
- 3) *удвоенная суммарная плотность массы-энергии релятивистской жидкости в области U больше полной скалярной кривизны этой области.*

Рассмотрим поток релятивистской жидкости в области U пространства-времени (M, g) , линии тока которого ортогональным образом пересекают замкнутое односвязное вполне омбилическое сечение (M', g') .

Используя зависимость [23, с. 181] между тензорами кривизны многообразия (M, g) и вложенного в него подмногообразия (M', g') , выводим равенство

$$K_\pi = K'_\pi + g(H, H), \quad (5.8)$$

связывающее их секционные кривизны K_π и K'_π в произвольном 2-мерном направлении $\pi \subset T_x M'$ со скалярным квадратом вектора средней кривизны H подмногообразия (M', g') .

Полагаем, что жидкость заряженная и электромагнитное поле описывается “специальными уравнениями Максвелла” [11, 18, 19], которые в терминах локальных координат имеют вид

$$\nabla_i F_{jk} = \frac{4\pi}{3}(J_j g_{ik} - J_k g_{ij}).$$

В этом случае 2-форма электромагнитного поля ω является *замкнутой конформно киллинговой* или по другой терминологии *плоской* формой [11, 19, 25]. Ее проекция $\omega(h, h)$ на омбилическое подмногообразие (M', g') будет также замкнутой конформно киллинговой формой [10]. При этом согласно разложению (2.6) проекция $\omega(h, h)$ будет 2-формой магнитной напряженности поля.

В работе [25] была доказана теорема, согласно которой на замкнутом римановом многообразии (M', g') отрицательной секционной кривизны замкнутая конформно киллингова форма ω' имеет постоянную норму $\|\omega'\|$. Если принять во внимание равенство (5.8), то отрицательной секционной кривизны для (M', g') можно добиться, потребовав, чтобы секционная кривизна пространства-времени (M, g) во всех пространственноподобных 2-направлениях была неположительной.

В итоге можно сформулировать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 5.3. *Пусть в области пространства-времени, где секционные кривизны по всем пространственноподобным 2-направлениям неположительны, поток заряженной жидкости пересекает ортогонально замкнутое односвязное вполне омбилическое сечение. Если электромагнитное поле жидкости описывается специальными уравнениями Максвелла, то норма тензора магнитной напряженности поля будет постоянной вдоль данного сечения.*

Если положить поток бессдвиговым, то сечение многообразия (M', g') с необходимостью станет вполне омбилическим, а потому требование омбиличности в условии теоремы можно опустить.

В заключение рассмотрим невращательный, без расширения поток релятивистской жидкости через область U . Принимая во внимание теорему 4.4, можно сформулировать следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5.4. *Не существует в 4-мерном пространстве-времени невращательного, без расширения потока релятивистской жидкости, который бы ортогональным образом пересекал наперед заданное 3-мерное замкнутое односвязное пространственноподобное сечение, в точках которого времениподобная кривизна Риччи неотрицательна.*

6. ТЕХНИКА БОХНЕРА И ПРОБЛЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ ЗАМКНУТОЙ ВСЕЛЕННОЙ

Вопросы существования замкнутых пространственноподобных сечений и расслоения пространств-времен на их 1-параметрические семейства актуальны в общей тео-

рии относительности [26]. Классическим результатом принято считать теорему Хоккинга [27, с. 164], выражающую условия препятствия к $(3+1)$ -расщеплению пространства-времени с замкнутыми пространственноподобными сечениями.

На основании установленного выше равенства (2.12) интегральной формулы (3.11) придадим следующий вид:

$$\int_U [\text{Ric}(\xi, \xi) + \|A\|^2 - \|G_0\|^2 + (n-1)(n-2)\|H\|^2] \eta = (n-1) \int_{\partial U} H' \eta', \quad (6.1)$$

для пространственноподобного распределения $\mathcal{H}$, заданного в области U с пространственноподобной границей ∂U , которую $\mathcal{H}$ касается в каждой ее точке. В последнем случае граница ∂U является замкнутым интегральным многообразием распределения $\mathcal{H}$.

Рассмотрим омбилическое распределение $\mathcal{H}$ в области U , границей ∂U которой служит интегральное многообразие распределения $\mathcal{H}$. В этом случае интегральная формула (6.1) принимает вид

$$\int_U [\text{Ric}(\xi, \xi) + \|A\|^2 + (n-1)(n-2)\|H\|^2] \eta = - \int_{\partial U} H' \eta'. \quad (6.2)$$

Поскольку $\|A\|^2 \leq 0$ и $\|H\|^2 \leq 0$, то из анализа интегральной формулы (6.2) выводим, что справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 6.1. *Не существует в n -мерном ($n \geq 3$) лоренцевом многообразии такой области с пространственноподобной границей, что:*

- 1) *временноподобная кривизна Риччи в области неположительна;*
- 2) *граница области имеет неотрицательную среднюю кривизну, за исключением хотя бы одной точки, где эта кривизна больше нуля;*
- 3) *в области существует омбилическое пространственноподобное распределение, интегральным многообразием которого служит граница области.*

Из этой теоремы следует, что при определенных условиях пространственноподобное вполне омбилическое слоение в области U не может содержать замкнутого слоя — ее границы ∂U .

Рассмотрим теперь инволютивное максимальное распределение $\mathcal{H}$ в области U . Предположим, что одно из интегральных многообразий $\mathcal{H}$ является замкнутым односвязным подмногообразием (M', g') лоренцева многообразия (M, g) . Тогда уравнение (4.6) можно представить в следующем виде:

$$\int_{M'} [\text{Ric}(\xi, \xi) - \|G_0\|^2] \eta' = 0. \quad (6.3)$$

Анализ уравнения (6.3) позволяет заключить, что справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 6.2. *Слоение из максимальных сечений не имеет замкнутого слоя в области n -мерного ($n \geq 3$) лоренцева многообразия, если во всех ее точках временноподобная кривизна Риччи неотрицательна, за исключением хотя бы одной точки, где она принимает положительные значения.*

Список литературы

- [1] *H. Wu.* The Bochner technique. In: Proc. Beijing Symp. Differ. Geom. and Differ. Equat. Aug.18–Sept.21, 1980. Eds. S. S. Chern, Wen-tsuen Wu. New York: Science-Press and Gordon-Breach, 1982. P. 929–1071.
- [2] *P. H. Berard.* Bull. Amer. Math. Soc. 1988. V. 19. № 2. P. 371–406.
- [3] *W. Matthias.* Bonn. Math. Schr. 1989. № 198. P. 1–58.
- [4] *I. J. Muzinich.* J. Math. Phys. 1986. V. 27. № 5. P. 1393–1397.
- [5] *M. Blau.* Rep. Math. Phys. 1988. V. 25. № 1. P. 109–116.
- [6] *A. Romero, M. Sanchez.* Proc. Amer. Math. Soc. 1995. V. 123. P. 2831–2833.
- [7] *A. Romero, M. Sanchez.* Pacific J. Math. 1998. V. 186. № 1. P. 141–148.
- [8] *С. Е. Степанов.* Изв. вузов. Физика. 1993. № 6. С. 82–86.
- [9] *С. Е. Степанов.* Алгебра и анализ. 1998. Т. 10. № 4. С. 192–209.
- [10] *С. Е. Степанов.* Дифференциальная геометрия многообразий фигур. 1996. № 27. С. 107–111.
- [11] *S. E. Stepanov.* Tensor, N. S. 1997. V. 58. P. 245–255.
- [12] *Дж. Бим, П. Эрлих.* Глобальная лоренцева геометрия. М.: Мир, 1985.
- [13] *А. Бессе.* Многообразия Эйнштейна. М.: Мир, 1990.
- [14] *Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уиллер.* Гравитация. Т. 2. М.: Мир, 1977.
- [15] *Д. Крамер и др.* Точные решения уравнений Эйнштейна. М.: Энергоиздат, 1982.
- [16] *Дж. Синг.* Общая теория относительности. М.: ИЛ, 1963.
- [17] *С. Хокинг, Дж. Эллис.* Крупномасштабная структура пространства-времени. М.: Мир, 1977.
- [18] *С. Е. Степанов.* ТМФ. 1997. Т. 111. № 1. С. 32–43.
- [19] *С. Е. Степанов.* Изв. вузов. Физика. 1996. № 5. С. 90–93.
- [20] *B. L. Reinhart.* Differential geometry of foliations. Berlin: Springer-Verlag, 1983.
- [21] *С. Е. Степанов.* Изв. вузов. Математика. 1999. № 1. С. 61–68.
- [22] *Ш. Кобаяси, К. Номидзу.* Основы дифференциальной геометрии. Т. 1. М.: Наука, 1981.
- [23] *Л. П. Эйзенхарт.* Риманова геометрия. М.: ИЛ, 1948.
- [24] *В. Д. Захаров.* Гравитационные волны в теории тяготения Эйнштейна. М.: Наука, 1972.
- [25] *С. Е. Степанов.* Изв. вузов. Математика. 1996. № 9. С. 53–59.
- [26] *Helio V. Fagundes.* Gen. Relat. Gravit. 1992. V. 24. № 2. P. 199–217.
- [27] *Р. Пенроуз.* Структура пространства-времени. М.: Мир, 1972.

Поступила в редакцию 24.XII.1998 г.,
после доработки 29.VI.1999 г.