Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Гладков, В. В. Дмитриева, Р. А. Шарипов, О некоторых нелинейных уравнениях, сводящихся к уравнениям диффузионного типа, *ТМФ*, 2000, том 123, номер 1, 26–37

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf582>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 06:05:54

© 2000 г. А. В. Гладков*, В. В. Дмитриева†, Р. А. Шарипов‡

О НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЯХ, СВОДЯЩИХСЯ К УРАВНЕНИЯМ ДИФФУЗИОННОГО ТИПА

Рассмотрен вопрос о сводимости системы квазилинейных параболических дифференциальных уравнений второго порядка к уравнениям диффузионного типа. В невырожденном случае предложен эффективный алгоритм решения этого вопроса.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, задаваемую некоторой матрицей $A = A(y^1, \dots, y^n)$ с ненулевым детерминантом,

$$\frac{\partial y^i}{\partial t} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x} \left(A_j^i \frac{\partial y^j}{\partial x} \right), \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.1)$$

Класс уравнений вида (1.1) не является инвариантным относительно точечных замен переменных вида

$$\tilde{y}^1 = \tilde{y}^1(y^1, \dots, y^n), \quad \dots, \quad \tilde{y}^n = \tilde{y}^n(y^1, \dots, y^n). \quad (1.2)$$

Однако его можно расширить до точечно инвариантного класса уравнений

$$\frac{\partial y^i}{\partial t} = \sum_{j=1}^n A_j^i \left(\frac{\partial^2 y^j}{\partial x^2} + \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \Gamma_{rs}^i \frac{\partial y^r}{\partial x} \frac{\partial y^s}{\partial x} \right). \quad (1.3)$$

Здесь коэффициенты A_j^i и Γ_{rs}^i зависят от $y^1, \dots, y^n$, причем $\det A \neq 0$. Обозначим через T матрицу Якоби для замены переменных (1.2) и через S матрицу Якоби для обратной замены переменных:

$$S_j^i = \frac{\partial y^i}{\partial \tilde{y}^j}, \quad T_j^i = \frac{\partial \tilde{y}^i}{\partial y^j}.$$

Матрицы S и T в геометрии называются соответственно матрицами прямого и обратного переходов (имеется в виду переход от $y^1, \dots, y^n$ к $\tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^n$).

*Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа, Россия. E-mail: gladkov@math.ugatu.ac.ru

†Башкирский государственный университет, Уфа, Россия. E-mail: DmitrievaVV@ic.bashedu.ru

‡Башкирский государственный университет, Уфа, Россия. E-mail: R_Sharipov@ic.bashedu.ru

ТЕОРЕМА 1.1. При точечной замене переменных (1.2) уравнение (1.3) переходит в уравнение точно такого же вида

$$\frac{\partial \tilde{y}^i}{\partial t} = \sum_{j=1}^n \tilde{A}_j^i \left(\frac{\partial^2 \tilde{y}^j}{\partial x^2} + \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \tilde{\Gamma}_{rs}^i \frac{\partial \tilde{y}^r}{\partial x} \frac{\partial \tilde{y}^s}{\partial x} \right), \quad (1.4)$$

причем связь параметров уравнений (1.3) и (1.4) определяется соотношениями

$$A_i^k = \sum_{m=1}^n \sum_{p=1}^n S_m^k T_i^p \tilde{A}_p^m, \quad (1.5)$$

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_{m=1}^n \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n S_m^k T_i^p T_j^q \tilde{\Gamma}_{pq}^m + \sum_{m=1}^n S_m^k \frac{\partial T_i^m}{\partial y^j}. \quad (1.6)$$

Если переменные $y^1, \dots, y^n$ понимать как локальные координаты на некотором многообразии M , то в силу теоремы 1.1 величины A_i^k задают тензорное поле $\mathbf{A}$ типа $(1, 1)$ на M , а величины Γ_{ij}^k определяют аффинную связность на M . Это открывает путь для применения геометрических методов к исследованию уравнений (1.3). Здесь мы рассмотрим одну из задач, имеющих изящное геометрическое решение. Похожие задачи исследования некоторых классов дифференциальных уравнений геометрическими методами рассматривались в работах [1–6].

2. СВОДИМОСТЬ К ДИФФУЗИОННЫМ УРАВНЕНИЯМ

Уравнения (1.1) возникают в задачах диффузии для многокомпонентных смесей [7–24], а также в теории интегрируемости [25–30]. Их принято называть уравнениями *диффузионного типа*. К уравнениям диффузионного типа, очевидно, следует отнести также уравнения (1.3), которые приводятся к виду (1.1) в результате некоторой замены переменных (1.2). Возникает проблема эффективного описания класса диффузионных уравнений.

ЗАДАЧА. Каким условиям должны удовлетворять операторное поле $\mathbf{A}$ и симметричная аффинная связность Γ для того, чтобы существовала замена переменных (1.2), сводящая уравнение (1.3) к виду (1.1)?

Пусть уравнение (1.3) удалось свести к виду (1.1) в переменных $\tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^n$. Тогда в этих переменных для компонент связности Γ имеем

$$\tilde{\Gamma}_{pq}^m = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \tilde{B}_s^m \left(\frac{\partial \tilde{A}_p^s}{\partial \tilde{y}^q} + \frac{\partial \tilde{A}_q^s}{\partial \tilde{y}^p} \right). \quad (2.1)$$

Здесь $\tilde{B}_s^m$ – компоненты матрицы $\tilde{B}$, обратной к матрице $\tilde{A}$, составленной из компонент операторного поля $\mathbf{A}$ в переменных $\tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^n$. Применим формулы (1.5) для преобразования компонент поля $\mathbf{A}$ в (2.1):

$$\tilde{A}_p^s = \sum_{r=1}^n \sum_{i=1}^n T_r^s S_p^i A_i^r.$$

Продифференцируем это соотношение по $\tilde{y}^q$:

$$\frac{\partial \tilde{A}_p^s}{\partial \tilde{y}^q} = \sum_{r=1}^n \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial T_r^s}{\partial \tilde{y}^q} S_p^i A_i^r + T_r^s \frac{\partial S_p^i}{\partial \tilde{y}^q} A_i^r + T_r^s S_p^i \frac{\partial A_i^r}{\partial \tilde{y}^q} \right). \quad (2.2)$$

Выразим производные $\partial A_i^r / \partial \tilde{y}^q$, $\partial S_p^i / \partial \tilde{y}^q$ и $\partial T_r^s / \partial \tilde{y}^q$ через частные производные по естественным переменным $y^1, \dots, y^n$. Для этого используем формулы

$$\frac{\partial A_i^r}{\partial \tilde{y}^q} = \sum_{j=1}^n S_q^j \frac{\partial A_i^r}{\partial y^j}, \quad \frac{\partial T_r^s}{\partial \tilde{y}^q} = \sum_{j=1}^n S_q^j \frac{\partial T_r^s}{\partial y^j}, \quad \frac{\partial S_p^i}{\partial \tilde{y}^q} = - \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n S_{\beta}^i S_q^j \frac{\partial T_{\alpha}^{\beta}}{\partial y^j} S_p^{\alpha}.$$

Подставим их в формулу (2.2), после чего полученное выражение подставим в формулу (2.1) для компонент связности Γ . Недостающее выражение для производной $\partial \tilde{A}_q^s / \partial \tilde{y}^p$ найдем простой перестановкой индексов p и q . В итоге имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{pq}^m &= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \tilde{B}_s^m \frac{\partial T_r^s}{\partial y^j} A_i^r (S_p^i S_q^j + S_q^i S_p^j) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \tilde{B}_s^m T_r^s \frac{\partial A_i^r}{\partial y^j} (S_p^i S_q^j + S_q^i S_p^j) - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \tilde{B}_s^m \tilde{A}_{\beta}^s \frac{\partial T_{\alpha}^{\beta}}{\partial y^j} (S_p^{\alpha} S_q^j + S_q^{\alpha} S_p^j). \end{aligned}$$

Подставим это выражение в формулу (1.6). В результате получим следующее выражение для компонент связности Γ_{ij}^k :

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_{r=1}^n \frac{B_r^k}{2} \left(\frac{\partial A_i^r}{\partial y^j} + \frac{\partial A_j^r}{\partial y^i} \right) + \sum_{r=1}^n \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n B_r^k \theta_{pq}^r \frac{A_i^p \delta_j^q + A_j^p \delta_i^q}{2}. \quad (2.3)$$

Здесь δ_i^q – символ Кронекера (компоненты единичной матрицы):

$$\delta_i^q = \begin{cases} 1 & \text{при } q = i, \\ 0 & \text{при } q \neq i. \end{cases}$$

Через B_r^k обозначены компоненты операторного поля $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$, а величины θ_{pq}^r зависят от компонент матриц перехода S и T :

$$\theta_{pq}^r = \sum_{m=1}^n S_m^r \frac{\partial T_p^m}{\partial y^q} = \sum_{m=1}^n S_m^r \frac{\partial^2 \tilde{y}^m}{\partial y^p \partial y^q}. \quad (2.4)$$

Из (2.4) видно, что $\theta_{pq}^r = \theta_{qp}^r$. Если известно, что система уравнений (1.3) допускает приведение к диффузионному виду (1.1), и известны переменные $\tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^n$, в которых она имеет диффузионный вид, то формула (2.4) однозначно определяет величины θ_{pq}^r для последующей подстановки в формулу (2.3). В тех же случаях, когда переменные

$\tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^n$ не заданы, величины θ_{pq}^r следует определять из (2.3) и рассматривать соотношения (2.4) как уравнения, определяющие искомую замену переменных вида (1.2). Запишем эти уравнения следующим образом:

$$\frac{\partial T_p^m}{\partial y^q} = \sum_{r=1}^n \theta_{pq}^r T_r^m. \quad (2.5)$$

Уравнения (2.5) представляют собой полную систему линейных уравнений Пфаффа относительно компонент матрицы T . Они хорошо известны в дифференциальной геометрии. Условие совместности уравнений (2.5) получается из условия равенства смешанных частных производных

$$\frac{\partial^2 T_p^m}{\partial y^q \partial y^k} = \frac{\partial^2 T_p^m}{\partial y^k \partial y^q}. \quad (2.6)$$

Вычислив левую и правую части равенства (2.6) с учетом уравнений (2.5), получаем так называемое “условие нулевой кривизны”¹⁾

$$\frac{\partial \theta_{kp}^m}{\partial y^q} - \frac{\partial \theta_{qp}^m}{\partial y^k} + \sum_{r=1}^n \theta_{qr}^m \theta_{kp}^r - \sum_{r=1}^n \theta_{kr}^m \theta_{qp}^r = 0. \quad (2.7)$$

На основе теории пфаффовых уравнений (см., например, [4, приложение А]) может быть доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть v – некоторая точка многообразия M . Матричные уравнения Пфаффа (2.5) имеют решение с ненулевым детерминантом $\det T \neq 0$ в некоторой окрестности точки v на M тогда и только тогда, когда выполнено условие совместности (2.7).

Симметричность величин θ_{pq}^r по паре нижних индексов обеспечивает выполнение следующего условия для всякого решения уравнений (2.5):

$$\frac{\partial T_p^m}{\partial y^q} = \frac{\partial T_q^m}{\partial y^p}. \quad (2.8)$$

Условие (2.8), в свою очередь, является условием совместности для уравнений

$$\frac{\partial \tilde{y}^m}{\partial y^p} = T_p^m(y^1, \dots, y^n),$$

которыми определяются переменные $\tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^n$. Итог приведенных рассуждений сформулируем в виде следующих двух теорем.

ТЕОРЕМА 2.2. Величины $\theta_{pq}^r = \theta_{qp}^r$ определяются соотношениями (2.4) в силу некоторой замены локальных координат (1.2) в окрестности точки v на многообразии M тогда и только тогда, когда они удовлетворяют условию нулевой кривизны (2.7).

¹⁾ Отметим, что “условие нулевой кривизны” (2.7) отнюдь не означает обращения в нуль тензора кривизны для аффинной связности Γ .

ТЕОРЕМА 2.3. Система уравнений (1.3) допускает локально (в окрестности любой точки v на многообразии M) приведение к диффузионному виду (1.1) в результате некоторой замены переменных вида (1.2) тогда и только тогда, когда найдутся величины $\theta_{pq}^r = \theta_{qr}^r$, удовлетворяющие соотношениям (2.3) и (2.7) одновременно.

Теорема 2.3 выделяет два случая в теории квазилинейных уравнений вида (1.3): случай *общего положения* и *вырожденный случай*. В случае общего положения величины θ_{pq}^r однозначно определяются соотношениями (2.3). Последующая подстановка их в (2.7) позволяет записать условие сводимости (1.3) к виду (1.1) в форме эффективно проверяемого тождества на операторное поле $\mathbf{A}$ и аффинную связность Γ .

В вырожденном случае соотношения (2.3) не определяют величин θ_{pq}^r либо определяют их неоднозначно, требуются анализ алгебраических соотношений (2.3) (на предмет их разрешимости относительно величин θ_{pq}^r) и анализ их совместности с дифференциальными соотношениями (2.7).

3. УСЛОВИЕ НЕВЫРОЖДЕННОСТИ

Условие невырожденности, выделяющее случай общего положения, формулируется как условие однозначной разрешимости соотношений (2.3) относительно величин θ_{pq}^r . Эти соотношения можно преобразовать к виду

$$\sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \theta_{pq}^r \frac{A_i^p \delta_j^q + A_j^p \delta_i^q}{2} = \sum_{k=1}^n A_k^r \Gamma_{ij}^k - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_i^r}{\partial y^j} + \frac{\partial A_j^r}{\partial y^i} \right). \quad (3.1)$$

Уравнения (3.1) линейны относительно θ_{pq}^r , причем эта система линейных уравнений разделяется на n частей. При каждом фиксированном $r = 1, \dots, n$ мы имеем замкнутую систему из n^2 уравнений. Матрицы всех таких систем уравнений одинаковы. Они определяются компонентами тензорного поля Λ :

$$\Lambda_{ij}^{pq} = \frac{A_i^p \delta_j^q + A_j^p \delta_i^q + A_i^q \delta_j^p + A_j^q \delta_i^p}{4}. \quad (3.2)$$

Обозначим через w_{ij}^r правую часть уравнений (3.1). Тогда эти уравнения можно переписать в виде

$$\sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \Lambda_{ij}^{pq} \theta_{pq}^r = w_{ij}^r. \quad (3.3)$$

Пусть v — некоторая фиксированная точка на многообразии M . Обозначим через V касательное пространство к M в этой точке: $V = T_v(M)$. Через V^* обозначим пространство, сопряженное к V , и рассмотрим тензорное произведение двух экземпляров сопряженного пространства

$$W = V^* \otimes V^* = T_2^0(v, M).$$

При таком определении W есть пространство билинейных форм на пространстве V . Оно естественным образом разбивается в прямую сумму двух своих подпространств – подпространства симметричных билинейных форм и подпространства кососимметричных билинейных форм:

$$W = W_{\text{sym}} \oplus W_{\text{skew}}. \quad (3.4)$$

Тензор $\mathbf{A}$ с компонентами (3.3) можно рассматривать как линейный оператор в пространстве W . Оба подпространства в разложении (3.4) инвариантны относительно оператора $\mathbf{A}: W \rightarrow W$, причем сужение оператора $\mathbf{A}$ на W_{skew} оказывается нулевым (это вытекает из симметричности Λ_{ij}^{pq} как по верхней, так и по нижней паре индексов).

Правая часть уравнений (3.3) симметрична по индексам i и j . Величины θ_{pq}^r , которые следует определить из уравнения (3.1), также симметричны по своим нижним индексам p и q . Поэтому условие, выделяющее невырожденный случай, можно сформулировать как условие обратимости сужения оператора $\mathbf{A}$ на подпространство симметричных билинейных форм $\mathbf{A}_{\text{sym}}: W_{\text{sym}} \rightarrow W_{\text{sym}}$. Это условие можно записать как условие невырожденности оператора $\mathbf{A}_{\text{sym}}$:

$$\det \mathbf{A}_{\text{sym}} \neq 0. \quad (3.5)$$

Компоненты оператора $\mathbf{A}$ определяются компонентами оператора $\mathbf{A}$ по формуле (3.2). Однако условие (3.5) не является следствием условия $\det \mathbf{A} \neq 0$. Его следует проверять отдельно.

4. ПРОВЕРКА УСЛОВИЯ НЕВЫРОЖДЕННОСТИ

Рассмотрим вопрос о том, как осуществить проверку условия (3.5), зная компоненты матрицы оператора $\mathbf{A}$. Начнем со случая, когда оператор $\mathbf{A}$ имеет простой спектр, т.е. когда его собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ различны, а его характеристический полином не имеет кратных корней:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = (-\lambda)^n + \sum_{s=1}^n \sigma_s(n) (-\lambda)^{n-s} = \prod_{s=1}^n (\lambda_s - \lambda). \quad (4.1)$$

Здесь $\sigma_1(n), \dots, \sigma_n(n)$ – элементарные симметричные многочлены, определяемые следующей формулой:

$$\sigma_s(n) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq n} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_s}. \quad (4.2)$$

Последний из этих многочленов $\sigma_s(n) = \lambda_1 \dots \lambda_n$ совпадает с детерминантом оператора $\mathbf{A}$ (подробнее о симметричных многочленах см. в [31]).

Оператор $\mathbf{A}$ с простым спектром в конечномерном пространстве $V = T_v(M)$ диагонализуем, он имеет базис из собственных векторов $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$. Разумеется, построение такого базиса может потребовать комплексификации пространства V , поскольку корни характеристического полинома (4.1), вообще говоря, комплексны. Обозначим через $\mathbf{h}^1, \dots, \mathbf{h}^n$ дуальный базис в сопряженном пространстве V^* . Имеют место следующие соотношения:

$$\mathbf{A} \mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{A}^* \mathbf{h}^i = \lambda_i \mathbf{h}^i, \quad \mathbf{h}^i(\mathbf{e}_k) = \delta_k^i. \quad (4.3)$$

Здесь $\mathbf{A}^*: V^* \rightarrow V^*$ – оператор, сопряженный оператору $\mathbf{A}$. Используя ковекторы $\mathbf{h}^1, \dots, \mathbf{h}^n$, построим базис в пространстве W_{sym} :

$$\mathbf{w}^{ij} = \mathbf{h}^i \otimes \mathbf{h}^j + \mathbf{h}^j \otimes \mathbf{h}^i, \quad 1 \leq i \leq j \leq n. \quad (4.4)$$

Обозначим через N размерность пространства W_{sym} . Непосредственным подсчетом числа векторов в построенном базисе (4.4) находим

$$N = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (4.5)$$

В силу (3.2) и (4.3) имеем

$$\mathbf{A}(\mathbf{h}^p \otimes \mathbf{h}^q) = \frac{\lambda_p + \lambda_q}{2} \mathbf{h}^p \otimes \mathbf{h}^q. \quad (4.6)$$

Применим оператор (4.6) к векторам базиса (4.4). Прямым вычислением находим

$$\mathbf{A}_{\text{sym}}(\mathbf{w}^{ij}) = \mathbf{A}(\mathbf{w}^{ij}) = \frac{\lambda_i + \lambda_j}{2} \mathbf{w}^{ij}. \quad (4.7)$$

Соотношение (4.7) показывает, что оператор $\mathbf{A}_{\text{sym}}$ диагонализуем, а базис (4.4) служит базисом из собственных векторов этого оператора. Соответствующие векторам $\mathbf{w}^{ij}$ собственные числа μ_{ij} определяются формулой

$$\mu_{ij} = \frac{\lambda_i + \lambda_j}{2}, \quad 1 \leq i \leq j \leq n. \quad (4.8)$$

Формула (4.8) решает вопрос о вычислении детерминанта оператора $\mathbf{A}_{\text{sym}}$:

$$\det \mathbf{A}_{\text{sym}} = \sigma_N(N) = \prod_{i \leq j} \left(\frac{\lambda_i + \lambda_j}{2} \right). \quad (4.9)$$

Введем на множестве пар индексов (i, j) с $i \leq j$ лексикографическое упорядочение, считая, что $(i_1, j_1) < (i_2, j_2)$, если $j_1 < j_2$, или в случае совпадения $j_1 = j_2$, если $i_1 < i_2$. Рассмотрим сумму

$$\sigma_s(N) = \sum_{(i_1, j_1) < \dots < (i_s, j_s)} \frac{(\lambda_{i_1} + \lambda_{j_1}) \dots (\lambda_{i_s} + \lambda_{j_s})}{2^s}. \quad (4.10)$$

Формула (4.10) определяет элементарные симметрические многочлены для набора чисел μ_{ij} из (4.8). При $s = N$ она переходит в (4.9). Нетрудно видеть, что правые части не меняются при любых перестановках чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Они являются симметричными многочленами относительно $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и [31, гл. 6, §2] могут быть выражены через элементарные симметричные многочлены $\sigma_1(n), \dots, \sigma_n(n)$ из (4.2). Запишем этот факт следующим образом:

$$\sigma_s(N) = P_s(\sigma_1(n), \dots, \sigma_n(n)), \quad s = 1, \dots, N. \quad (4.11)$$

Для каждого конкретного значения n может быть найден явный вид многочленов $P_s(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$. Например, при $n = 2$ имеем

$$P_1 = \frac{3}{2}\sigma_1, \quad P_2 = \frac{1}{2}\sigma_1^2 + \sigma_2, \quad P_3 = \frac{1}{2}\sigma_2\sigma_1. \quad (4.12)$$

Здесь $N = 3$, что вытекает из формулы (4.5). Величина $\sigma_2(2) = \det A$ отлична от нуля, поэтому при $n = 2$ условие невырожденности (3.5) можно записать в виде

$$\sigma_1(2) = \text{tr } \mathbf{A} \neq 0. \quad (4.13)$$

ТЕОРЕМА 4.1. При $n = 2$ система уравнений (1.3) соответствует невырожденному случаю тогда и только тогда, когда $\det \mathbf{A} \neq 0$ и $\operatorname{tr} \mathbf{A} \neq 0$.

Соотношение (4.13) означает, что оператор $\mathbf{A}$ не должен иметь двух характеристических чисел противоположного знака. В такой форме условие невырожденности можно формулировать и в многомерном случае для произвольного n . Это вытекает из формулы (4.9). Действительно

$$\prod_{i \leq j} \left(\frac{\lambda_i + \lambda_j}{2} \right) = (\det \mathbf{A}) \prod_{i < j} \left(\frac{\lambda_i + \lambda_j}{2} \right) \neq 0, \quad (4.14)$$

что эквивалентно условиям $\det \mathbf{A} \neq 0$ и $\lambda_i \neq -\lambda_j$ при $i \neq j$.

Для проверки условия (4.14) нет необходимости находить собственные числа оператора $\mathbf{A}$. Это условие можно записать через коэффициенты характеристического полинома (4.1), если найти явный вид многочлена $P_N(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ в (4.11), что является алгоритмически разрешимой задачей.

Другой способ проверки условия (4.14) состоит в использовании результатов. Пусть $f(\lambda)$ – характеристический полином оператора $\mathbf{A}$. Он не имеет нулевых корней в силу условия $\det \mathbf{A} \neq 0$, поэтому условие $\lambda_i \neq -\lambda_j$ при $i \neq j$ означает, что многочлены $f(\lambda)$ и $f(-\lambda)$ не имеют общих корней, т.е. результат этих многочленов отличен от нуля [31, 32]:

$$\operatorname{Res}_{\lambda} [\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}), \det(\mathbf{A} + \lambda \mathbf{I})] \neq 0. \quad (4.15)$$

ТЕОРЕМА 4.2. Система уравнений (1.3) соответствует невырожденному случаю тогда и только тогда, когда $\det \mathbf{A} \neq 0$ и выполнено условие (4.15).

5. ОБРАЩЕНИЕ ОПЕРАТОРА $\mathbf{A}_{\text{sym}}$

Записав условие невырожденности в форме (4.15), допускающей проверку без вычисления собственных чисел оператора $\mathbf{A}$, займемся обращением оператора $\mathbf{A}_{\text{sym}}: W_{\text{sym}} \rightarrow W_{\text{sym}}$. Это необходимо для нахождения величин θ_{pq}^r из уравнения (3.3). Пусть $f(\lambda)$ – характеристический полином оператора $\mathbf{A}$. Рассмотрим пару многочленов $f(\lambda + \mu)$ и $f(\mu - \lambda)$, где μ – параметр. Эти многочлены имеют следующие разложения на линейные множители:

$$\begin{aligned} f(\lambda + \mu) &= (-1)^n \prod_{i=1}^n (\lambda - (\lambda_i - \mu)), \\ f(\mu - \lambda) &= \prod_{i=1}^n (\lambda - (\mu - \lambda_i)). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Для вычисления результата многочленов (5.1) воспользуемся следующей теоремой [31, 32].

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть два многочлена $g(\lambda)$ и $h(\lambda)$ с коэффициентами a и b при старших степенях λ разложены в произведение линейных множителей

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= a(\lambda - \alpha_1) \dots (\lambda - \alpha_n), \\ h(\lambda) &= b(\lambda - \beta_1) \dots (\lambda - \beta_m). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Результант этих многочленов вычисляется по формуле

$$\text{Res}_\lambda[g(\lambda), h(\lambda)] = a^n b^m \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (\alpha_i - \beta_j). \quad (5.3)$$

Сравнив (5.1) с (5.2), из (5.3) находим результат многочленов $f(\lambda + \mu)$ и $f(\mu - \lambda)$:

$$\begin{aligned} \text{Res}_\lambda[f(\mu - \lambda), f(\lambda + \mu)] &= (-1)^n \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (2\mu - \lambda_i - \lambda_j) = \\ &= 2^{n^2} \prod_{i < j} \left(\frac{\lambda_i + \lambda_j}{2} - \mu \right) \prod_{i \leq j} \left(\frac{\lambda_i + \lambda_j}{2} - \mu \right). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Сравнив формулу (5.4) с формулой (4.8) для собственных чисел оператора $\mathbf{A}_{\text{sym}}$, получаем

$$\varphi(\mu)^2 = 2^{-n^2} f(\mu) \text{Res}_\lambda[f(\mu - \lambda), f(\lambda + \mu)]. \quad (5.5)$$

Здесь $\varphi(\mu) = \det(\mathbf{A}_{\text{sym}} - \mu \mathbf{I})$ — характеристический полином оператора $\mathbf{A}_{\text{sym}}$. Формула (5.5) выражает квадрат характеристического полинома оператора $\mathbf{A}_{\text{sym}}$ через характеристический полином оператора $\mathbf{A}$.

Обозначим через $\varepsilon(\mu)$ полином, стоящий в правой части соотношения (5.5). Согласно теореме Гамильтона–Кэли [32, 33] подстановка оператора $\mathbf{A}_{\text{sym}}$ в его характеристический полином $\varphi(\mu)$ дает нулевой оператор. Это же справедливо и для многочлена $\varepsilon(\mu) = \varphi(\mu)^2$, т.е.

$$\varepsilon(\mathbf{A}_{\text{sym}}) = \sum_{i=0}^M \varepsilon_i \mathbf{A}_{\text{sym}}^i = 0. \quad (5.6)$$

Здесь $M = 2N = n(n+1)$ — степень полинома $\varepsilon(\mu) = \varphi(\mu)^2$. Соотношение (5.6) можно переписать в следующем виде:

$$\left(\sum_{i=1}^M \varepsilon_i \mathbf{A}_{\text{sym}}^{i-1} \right) \cdot \mathbf{A}_{\text{sym}} = -\varepsilon_0 \mathbf{I}. \quad (5.7)$$

Величина ε_0 в правой части (5.7) — это значение полинома $\varepsilon(\lambda)$ при $\lambda = 0$:

$$\varepsilon_0 = \varepsilon(0) = \varphi(0)^2 = (\det \mathbf{A}_{\text{sym}})^2.$$

В силу условия невырожденности (3.5) величина ε_0 отлична от нуля, что позволяет использовать соотношение (5.7) для вычисления оператора

$$\Lambda_{\text{sym}}^{-1} = - \sum_{i=1}^M \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_0} \Lambda_{\text{sym}}^{i-1}.$$

Оператор $\Lambda_{\text{sym}}^{-1} : W_{\text{sym}} \rightarrow W_{\text{sym}}$ можно доопределить нулем на пространстве кососимметричных билинейных форм W_{skew} . После этого он становится оператором, действующим на всем пространстве билинейных форм W , хотя при этом оказывается вырожденным. Доопределенный таким образом оператор $\Lambda_{\text{sym}}^{-1}$ можно задать формулой

$$\Lambda_{\text{sym}}^{-1} = - \sum_{i=1}^M \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_0} \Lambda^{i-1}. \quad (5.8)$$

Оператору (5.8) соответствует тензорное поле $\mathbf{D}$ типа $(2, 2)$, компоненты D_{pq}^{ij} которого симметричны как по верхним, так и по нижним индексам.

ТЕОРЕМА 5.2. *Условие $\det A \neq 0$ вместе с условием невырожденности (3.5), записанным в форме (4.15), определяет симметричное тензорное поле $\mathbf{D} = \Lambda_{\text{sym}}^{-1}$ типа $(2, 2)$, которое позволяет найти параметры θ_{pq}^r из уравнений (3.3) в форме*

$$\theta_{pq}^r = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{pq}^{ij} w_{ij}^r. \quad (5.9)$$

Компоненты тензорного поля $\mathbf{D}$ можно вычислять при помощи формулы (5.8).

Разумеется, есть и более прямой путь вычисления компонент тензорного поля $\mathbf{D}$, не использующий формулу (5.8). Достаточно лишь знать, что поле $\mathbf{D}$ задает оператор, обратный оператору Λ_{sym} в пространстве W_{sym} :

$$\mathbf{D} \cdot \Lambda_{\text{sym}} = \mathbf{I}. \quad (5.10)$$

При записи в координатах соотношение (5.10) выглядит следующим образом:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{rs}^{ij} \Lambda_{ij}^{pq} = \frac{\delta_r^p \delta_s^q + \delta_s^p \delta_r^q}{2}.$$

Оно представляет собой систему из N^2 линейных уравнений относительно величин D_{rs}^{ij} , где число N определяется соотношением (4.5). Условие невырожденности (4.15) гарантирует совместность этой системы уравнений и единственность ее решения.

6. КРИТЕРИЙ СВОДИМОСТИ К УРАВНЕНИЯМ ДИФФУЗИОННОГО ТИПА

Разрешив уравнения (3.3) относительно величин θ_{pq}^r , заданных в форме (5.9), можно подставить получившееся выражение в (2.7) и воспользоваться теоремой 2.3. Это приводит нас к следующему результату.

ТЕОРЕМА 6.1. *В невырожденном случае система уравнений (1.3) допускает локальное приведение к диффузионному виду (1.1) в результате некоторой замены переменных вида (1.2) тогда и только тогда, когда величины*

$$\theta_{pq}^r = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{pq}^{ij} \left(\sum_{k=1}^n A_k^r \Gamma_{ij}^k - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_i^r}{\partial y^j} + \frac{\partial A_j^r}{\partial y^i} \right) \right) \quad (6.1)$$

удовлетворяют дифференциальным уравнениям “нулевой кривизны” (2.7).

Формулы, полученные выше в разделах 3, 4 и 5, позволяют проверять выполнение условия невырожденности и находить явный вид параметров D_{pq}^{ij} по компонентам A_j^i операторного поля $\mathbf{A}$ в исходных переменных $y^1, \dots, y^n$, в которых записаны уравнения (1.3). Это обстоятельство превращает теорему 6.1 в алгоритмически эффективный критерий сводимости уравнений (1.3) к диффузионному виду (1.1) в невырожденном случае. Предложенный алгоритм можно легко реализовать на базе любого из существующих в настоящее время программных пакетов для аналитических вычислений.

ЗАМЕЧАНИЕ. Результаты разделов 3, 4 и 5 были получены в предположении, что оператор $\mathbf{A}$ имеет простой спектр. Однако они справедливы и для произвольных операторов, поскольку всякий оператор с вырожденным спектром может быть получен как предел последовательности операторов с простым спектром.

Благодарности. Авторы признательны фонду Сороса (институт “Открытое общество”), Российскому фонду фундаментальных исследований и АН Республики Башкортостан за финансовую поддержку в 1998 г.

Список литературы

- [1] М. В. Павлов, С. И. Свинолутов, Р. А. Шарипов. Функциональный анализ и его приложения. 1996. Т. 30. № 1. С. 18–29; В сб.: Интегрируемость в динамических системах. Ред. Л. А. Калякин. Уфа: Институт математики с ВЦ РАН, 1994. С. 27–48; solv-int/9407003.
- [2] Е. В. Ферапонтов, Р. А. Шарипов. ТМФ. 1996. Т. 108. № 1. С. 109–128; solv-int/9607003.
- [3] V. V. Dmitrieva, R. A. Sharipov. On the point transformations for the second order differential equations. solv-int/9703003.
- [4] R. A. Sharipov. On the point transformations for the equation $y'' = P + 3Qy' + 3Ry'^2 + Sy'^3$. solv-int/9706003.
- [5] O. N. Mikhailov, R. A. Sharipov. On the point expansion for the certain class of differential equations of the second order. solv-int/9712001.
- [6] R. A. Sharipov. Effective procedure of point classification for the equations $y'' = P + 3Qy' + 3Ry'^2 + Sy'^3$. Math. DG #9802027.
- [7] G. W. Bluman, K. Kumei. Symmetries and Differential Equations. In: Applied Mathematical Science: 81. Berlin: Springer, 1989.

- [8] *P. Broadbridge, I. White.* Water Resources Res. 1987. V. 24. P. 145–154.
- [9] *D. A. De Vries.* Trans. Amer. Geophys. Union. 1958. V. 39. P. 909–916.
- [10] *M. P. Edwards, P. Broadbridge.* J. Phys. A. 1994. V. 27. P. 5455–5465.
- [11] *R. D. Jackson.* Proc. Amer. Soil Science Soc. 1973. V. 37. P. 505–509.
- [12] *W. A. Jury, J. Letey, L. H. Stolzy.* Flow of water and energy under desert conditions. In: Water in Desert Ecosystems. Eds. D.D. Evans, J.L. Thames. Stroudsburg, PA: Dowden, Hutchinson and Ross, 1981. P. 92–113.
- [13] *J. H. Knight, J. R. Philip.* J. Eng. Math. 1974. V. 8. P. 219–227.
- [14] *M. R. Myerscough, J. D. Murray.* Bull. Math. Biol. 1992. V. 54. № 1. P. 77–94.
- [15] *Л. Б. Овсянников.* Докл. АН СССР. 1959. Т. 123. № 3. С. 492–495.
- [16] *J. R. Philip.* Quasianalytic and analytic approaches to unsaturated flow. In: Flow and Transport in the Natural Environment: Advances and Applications. Eds. W.L. Steffen, O.T. Denmead. Berlin: Springer, 1988. P. 30–48.
- [17] *J. R. Philip, D. A. De Vries.* Trans. Amer. Geophys. Union. 1957. V. 38. P. 222–232.
- [18] *C. W. Rose.* Aust. J. Soil Res. 1968. V. 6. P. 31–44.
- [19] *R. Shepherd, R. J. Wiltshire.* Trans. Porous Media. 1995. V. 20. P. 281–304.
- [20] *R. Shepherd, R. J. Wiltshire.* IMA J. Appl. Math. 1996. V. 56. P. 277–287.
- [21] *J. A. Sherratt.* Bull. Math. Biol. 1994. V. 56. № 1. P. 129–146.
- [22] *C. Sophocleous.* J. Phys. A. 1996. V. 29. P. 6951–6959.
- [23] *R. J. Wiltshire.* J. Phys. A. 1994. V. 27. P. 7821–7829.
- [24] *V. A. Baikov, A. V. Gladkov, R. J. Wiltshire.* J. Phys. A. 1998. V. 31. P. 7483–7499.
- [25] *A. V. Mikhailov, A. B. Shabat.* Integrability conditions for the system of two equations of the form $u_t = A(u)u_{xx} + F(u, u_x)$. Preprint of Landau Inst. for Theor. Phys. Ghermogolovka: Academie of Science of USSR, 1985.
- [26] *С. И. Свинолунов.* О многополевых аналогах уравнения Бюргерса. Препринт доклада Президиуму Башкирского филиала АН СССР. Уфа: Башкирский филиал АН СССР, 1987.
- [27] *S. I. Svinolupov.* Phys. Lett. A. 1989. V. 135. № 1. P. 32.
- [28] *С. И. Свинолунов, И. Т. Хабибуллин.* Мат. заметки. 1996. Т. 60. № 6. С. 888–901.
- [29] *И. З. Голубчик, В. В. Соколов.* Функц. анализ и его прилож. 1996. Т. 30. № 4. С. 68–71.
- [30] *И. З. Голубчик, В. В. Соколов.* ТМФ. 1997. Т. 112. № 3. С. 375–383.
- [31] *А. И. Кострикин.* Введение в алгебру. М.: Наука, 1977.
- [32] *С. Ленг.* Алгебра. М.: Мир, 1968.
- [33] *Р. А. Шарипов.* Курс линейной алгебры и многомерной геометрии. Уфа: Изд-во Башкирского государственного университета, 1996.

Поступила в редакцию 6.V.1999 г.,
после доработки 12.VII.1999 г.