Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Талалов, Замечание о геометрическом описании релятивистской струны,
ТМФ, 2000, том 123, номер 1, 38–43

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf583>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 12:06:44

ЗАМЕЧАНИЕ О ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ОПИСАНИИ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ СТРУНЫ

Рассматривается теория классической трехмерной релятивистской струны в терминах квадратичных форм мирового листа. Показано, что существенным является учет не только первой, но и второй квадратичной формы. Получена система нелинейных эволюционных уравнений, конформно-инвариантным образом описывающая струнную динамику на поверхности первичных связей. Результаты обобщаются на $4D$ -случай.

Пусть $\mathbf{X} = X_\mu(\xi^0, \xi^1)\mathbf{b}^\mu$ – радиус-вектор мирового листа бесконечной¹⁾ релятивистской струны в плоском псевдоевклидовом пространстве $E_{1,2}$. Хорошо известно [1], что параметризация ξ^0, ξ^1 всегда может быть выбрана конформно-плоской, т.е. так, что

$$\left(\frac{\partial X}{\partial \xi^0}\right)^2 > 0$$

почти всюду, поля $X_\mu(\xi^0, \xi^1)$ удовлетворяют свободным уравнениям $\partial_+ \partial_- X_\mu = 0$, а также связям $(\partial_\pm X_\mu)^2 = 0$. Символами $\partial_\pm$ обозначены производные по “конусным” параметрам $\xi_\pm = \xi^1 \pm \xi^0$. Уравнения движения и связи инвариантны относительно преобразований конформной группы двумерного пространства-времени (ξ^0, ξ^1) :

$$\xi_\pm \longrightarrow \tilde{\xi}_\pm = A'_\pm(\xi_\pm), \quad A'_\pm > 0. \quad (1)$$

В работе [2] показано, что уравнения Гаусса и Петерсона–Кодаши для мирового листа рассматриваемой струны могут быть сведены к единственному уравнению Лиувилля (УЛ) $\partial_+ \partial_- \varphi = e^\varphi$. При этом был рассмотрен класс струнных конфигураций такой, что каждая орбита группы (1) содержит мировой лист, имеющий всюду постоянную вторую квадратичную форму $\Pi = \rho_{ij} d\xi^i d\xi^j$. Между тем такой класс не является максимально общим. Действительно, предположим, что существуют сегменты $[a_\pm, b_\pm]$ такие, что $\rho_{ij} \equiv 0$ при $\xi_+ \in [a_+, b_+]$, $\xi_- \in [a_-, b_-]$, причем в других точках $\rho_{ij} \neq 0$. В этом случае, вообще говоря, никаким преобразованием (1) форму Π нельзя сделать постоянной всюду. Заметим, что соответствующий вывод УЛ, предложенный в статье [3], также

¹⁾Рассмотрение для открытой и периодической струны аналогично.

* Филиал Самарского государственного педагогического института им. В. В. Куйбышева, Тольятти, Самарская обл., Россия

не работает для указанного примера. В предлагаемой работе исследуется максимально общий случай, который, как будет показано, имеет существенные отличия.

Рассматриваемая струнная теория является масштабно-инвариантной в пространстве $E_{1,2}$. Поэтому далее мы будем использовать в основном проективные переменные $x_\mu = X_\mu/p$, где p – некоторая константа, имеющая размерность длины ($p > 0$). Сделаем необходимые вспомогательные построения. Для этого используем тот факт, что всегда существуют светоподобные векторы $\mathbf{n}_\pm(\xi^0, \xi^1)$, обладающие свойствами

$$n_\pm^\mu \partial_\pm x_\mu = \pm \frac{1}{2}, \quad (2)$$

$$\partial_\pm n_\mp^\mu = 0. \quad (3)$$

Произвол в их выборе исчерпывается преобразованиями из групп $G_\pm \subset SO(1, 2)$, которые являются стационарными для векторов $\partial_+ x_\mu$ и $\partial_- x_\mu$, соответственно. Явная форма таких преобразований такова:

$$n_\pm^\mu \longrightarrow \tilde{n}_\pm^\mu = \pm g_\pm^2 \partial_\pm x^\mu + n_\pm^\mu - g_\pm z_\pm^\mu, \quad (4)$$

где $z^\mu = \varepsilon^{\mu\nu\rho} n_\nu \partial x_\rho$, а $g_\pm = g_\pm(\xi_\pm)$ – произвольные дифференцируемые функции. Указанный произвол мы обсудим позже, а сейчас воспользуемся лишь фактом существования $\mathbf{n}_\pm(\xi_\pm)$.

Выберем для определенности в пространстве $E_{1,2}$ мнимое представление матриц Дирака: $\Gamma^0 = \sigma_2$, $\Gamma^1 = i\sigma_1$ и $\Gamma^2 = i\sigma_3$. Кроме этого, мы используем представление координат (проективных) векторов $\mathbf{x}$ в виде бесшпуровых матриц 2×2 :

$$\hat{x} = -ix_\mu \Gamma^\mu = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 - x_0 \\ x_1 + x_0 & -x_2 \end{pmatrix}.$$

Для соответствия $\mathbf{x} \leftrightarrow \hat{x}$ определим также вектор-матрицу $\hat{\mathbf{E}}_0$, отвечающую выбранному трансляционно-инвариантному базису $\mathbf{b}^\mu$: $\hat{\mathbf{E}}_0 = -i\mathbf{b}_\mu \Gamma^\mu$, так что $\mathbf{x} = \text{Tr } \hat{x} \hat{\mathbf{E}}_0$.

В силу сделанных выше определений в каждой точке мирового листа струны обе тройки векторов

$$(\pm \partial_\pm \mathbf{x} + \mathbf{n}_\pm, \partial_\pm \mathbf{x} \mp \mathbf{n}_\pm, \mathbf{z}_\pm)$$

являются ортонормированными в $E_{1,2}$. Соответствующие им вектор-матрицы $\hat{\mathbf{E}}_\pm$ имеют вид

$$\hat{\mathbf{E}}_+ = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_+ & -2\mathbf{n}_+ \\ 2\partial_+ \mathbf{x} & -\mathbf{z}_+ \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{E}}_- = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_- & 2\partial_- \mathbf{x} \\ 2\mathbf{n}_- & -\mathbf{z}_- \end{pmatrix}.$$

Не ограничивая общности, преобразования $\hat{\mathbf{E}}_0 \rightarrow \hat{\mathbf{E}}_\pm$ мы можем считать собственными, заменив, если это не так, $\mathbf{z} \rightarrow -\mathbf{z}$. Поэтому в силу локального изоморфизма $SO(1, 2) \approx SL(2, R)$ имеем

$$\hat{\mathbf{E}}_\pm = T_\pm \hat{\mathbf{E}}_0 T_\pm^{-1} \quad (5)$$

при некоторых $T_\pm(\xi_\pm) \in SL(2, R)$, определенных, вообще говоря, с точностью до знака. Рассмотрим матрицу

$$K(\xi^0, \xi^1) \equiv T_-(\xi_-) T_+^{-1}(\xi_+).$$

Ее геометрический смысл – преобразование пространства $E_{1,2}$, переводящее базис $\widehat{\mathbf{E}}_+(\xi_+)$ в базис $\widehat{\mathbf{E}}_-(\xi_-)$. Важен факт, что компоненты K_{ij} являются релятивистскими инвариантами. Действительно, их трансляционная инвариантность очевидна, т.к. при построении мы исходили из аффинных векторов $\partial_\pm X$. Что касается лоренц-преобразований пространства $E_{1,2}$, то в соответствии с (5) при таких преобразованиях $T_\pm \rightarrow T_\pm B$, где $B \in SL(2, R)$, так что матрица K инвариантна.

Введенное $SL(2, R)$ -значное поле $K(\xi^0, \xi^1)$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_- (K^{-1} \partial_+ K) = 0, \quad (6)$$

которое представляет собой частный случай уравнения кирального поля модели Веса–Зумино–Новикова–Виттена [4, 5]. Если поле принимает значения в компактной группе, действие модели для общего случая записывается в виде $S(K) + aW(K)$, где $S(K)$ – действие главного кирального поля, а многозначный функционал $W(K)$ имеет однозначную вариацию (см., например, [6]). Заметим, что функционал W не существует, вообще говоря, для некомпактных групп.

Чтобы построить действие для динамической системы (6), мы поступим следующим образом. Запишем разложение Гаусса для матрицы $K(\xi^0, \xi^1)$:

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha_- & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(-\frac{\varphi}{2}) & 0 \\ 0 & \exp(\frac{\varphi}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha_+ \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

которое, как известно, однозначно определяет вещественные числа φ и $\alpha_\pm$ для всех $K \in SL(2, R)$, за исключением тех матриц, у которых $K_{11} = 0$. Последнее равенство может быть записано в виде

$$\exp\left(-\frac{\varphi(\xi^0, \xi^1)}{2}\right) = 0, \quad (8)$$

так что разложение (7) однозначно определяет сингулярные функции $\varphi = \varphi(\xi^0, \xi^1)$ и $\alpha_\pm = \alpha_\pm(\xi^0, \xi^1)$.

Исходя из (7) легко получить систему уравнений, которой должны удовлетворять поля φ и $\alpha_\pm$. При этом удобно явно выделить переменные $\rho_\pm = (\partial_\pm \alpha_\mp) e^{-\varphi}$. В итоге имеем

$$-\frac{1}{2} \partial_+ \partial_- \varphi + \rho_+ \rho_- e^\varphi = 0, \quad (9)$$

$$\partial_\pm \rho_\mp = 0, \quad (10)$$

$$\partial_\pm \alpha_\mp - \rho_\pm e^\varphi = 0. \quad (11)$$

Данные уравнения суть уравнения Лагранжа–Эйлера для действия

$$\mathcal{S} = \int d\xi^0 d\xi^1 \left[\frac{1}{4} (\partial_+ \varphi) (\partial_- \varphi) + \rho_+ \rho_- e^\varphi - \rho_+ \partial_- \alpha_+ - \rho_- \partial_+ \alpha_- \right]. \quad (12)$$

Система (9)–(11) была впервые исследована в работе [7] для случая $\rho_\pm \geq 0$, где она интерпретировалась как система уравнений взаимодействующих полей: скалярного φ и спинорного Θ с компонентами $\Theta_\pm = \sqrt{\rho_\pm} \exp(\pm 4i\alpha_\pm)$.

Если $\rho_{\pm} > 0$, то, как показано в работе [7], решение задачи Коши для системы (9)–(11) строится по решению таковой для уравнения (9). Заметим, что лишь в случае, когда функции $\rho_{\pm}$ не обращаются в нуль, преобразованиями (1) возможно сделать эти функции постоянными всюду и, следовательно, свести (9) к УЛ. В нашем случае функции $\rho_{\pm}(\xi_{\pm})$ являются динамическими переменными (канонически-сопряженными для “конфигурационных” полей $\alpha_{\pm}$), так что ограничения типа неравенств на них отсутствуют.

Система (9)–(11) обладает широкой группой инвариантности $\mathcal{G}$, которая обобщает группу (1). Действительно, пусть $f_{\pm}$, $g_{\pm}$ и $A_{\pm}$, где $A'_{-}A'_{+} \neq 0$, – произвольные дифференцируемые функции. Тогда преобразование

$$(\varphi, \rho_{\pm}, \alpha_{\pm}) \longrightarrow (\tilde{\varphi}, \tilde{\rho}_{\pm}, \tilde{\alpha}_{\pm}) \quad (13)$$

вновь дает решение рассматриваемой системы, если

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(\xi_{+}, \xi_{-}) &= \varphi(A_{+}(\xi_{+}), A_{-}(\xi_{-})) + f_{+}(\xi_{+}) + f_{-}(\xi_{-}), \\ \tilde{\rho}_{\pm}(\xi_{\pm}) &= \rho(A_{\pm}(\xi_{\pm}))A'_{\pm}(\xi_{\pm}) \exp(-f_{\pm}(\xi_{\pm})), \\ \tilde{\alpha}_{\pm}(\xi_{+}, \xi_{-}) &= \alpha_{\pm}(A_{+}(\xi_{+}), A_{-}(\xi_{-})) \exp(f_{\pm}(\xi_{\pm})) + g_{\pm}(\xi_{\pm}). \end{aligned}$$

Преобразования вида $\alpha_{\pm} \rightarrow \alpha_{\pm} + g_{\pm}$ в точности соответствуют произволу (4) в выборе светоподобных векторов $n_{\pm}^{\mu}$, а преобразование $\varphi \rightarrow \varphi + f_{+} + f_{-}$ – преобразованию 2-метрики мирового листа. Действительно, используя тот факт, что матрица $K(\xi^0, \xi^1) \in SL(2, R)$ связывает между собой матрицы $\hat{\mathbf{E}}_{\pm}(\xi_{\pm})$, а также учитывая определения этих вектор-матриц, для первой квадратичной формы мирового листа мы имеем

$$\mathbf{I} = \partial_{+}X^{\mu}\partial_{-}X_{\mu}d\xi_{+}d\xi_{-} = -\frac{p^2}{2}e^{-\varphi}d\xi_{+}d\xi_{-}.$$

Заметим, что в соответствии с (13) преобразования 2-метрики не всегда связаны с переопределением (1) параметров $\xi_{\pm}$, что вследствие известной вейлевской инвариантности в теории струн является вполне естественным. Для второй квадратичной формы мирового листа находим

$$\mathbf{II} = p(\rho_{+}d\xi_{+}^2 - \rho_{-}d\xi_{-}^2),$$

так что уравнения (9) и (10) суть не что иное, как уравнения Гаусса и Петерсона–Кодацци, записанные для мирового листа 3D-струны [1]. Как уже отмечалось, преобразованиями (1) мы можем добиться выполнения равенств $\rho_{\pm} = \text{const}$ и свести (9)–(11) к УЛ, наложив ограничение $\rho_{+}\rho_{-} \neq 0$. То, что такое ограничение является существенным, следует из принципиальных отличий, которые полученная система имеет по отношению к УЛ. Данные отличия следующие:

1. Имеется вырожденный трансляционно-инвариантный “вакуум” $\varphi \equiv \text{const}$, $\alpha_{\pm} \equiv \text{const}$, $\rho_{\pm} \equiv 0$ [7]. Отсутствие такового у УЛ всегда приводило к дополнительным сложностям, в частности при квантовании (см., например, [8]). Заметим, что указанному “вакуумному” решению системы (9)–(11) отвечает прямолинейная струна, движущаяся с постоянной линейной скоростью.

2. Структура множества сингулярных точек какого-либо решения системы (9)–(11) является, вообще говоря, более сложной. Действительно, с помощью методов, развитых в работе [9], можно показать, что множество $\mathfrak{R}$ точек ξ^0, ξ^1 , удовлетворяющих условию (8), содержит в себе линии, которые могут быть времениподобными в (ξ^0, ξ^1) -плоскости (там, где $\rho_+ \rho_- > 0$), пространственноподобными (где $\rho_+ \rho_- < 0$), а также замкнутыми, поскольку возможно чередование и тех, и других областей. В случае открытой 3D-струны такие типы особенностей функции $\varphi(\xi^0, \xi^1)$ полностью соответствуют сингулярностям мирового листа, исследованным в работе [10]. Интересно, что для решений системы (9)–(11) допустимы и иные типы особенностей. Так, например²⁾, если $\rho_+ \rho_- \equiv 0$ на множестве $\Xi = [a_+, b_+] \times [a_-, b_-]$, где $a_{\pm} < b_{\pm}$, то возможно включение $\Xi \subset \mathfrak{R}$. Если мы требуем, чтобы при любом ξ^0 функции $\varphi(\xi^1)$, $\alpha_{\pm}(\xi^1)$ имели сингулярности только в точках, то мы должны считать, что для указанных решений киральное поле $K(\xi^0, \xi^1)$ определено лишь на подмножестве (ξ^0, ξ^1) -плоскости, получаемом исключением из нее всех прямоугольников $(a_+, b_+) \times (a_-, b_-)$. В случае, если хотя бы для одного такого прямоугольника все числа $a_{\pm}, b_{\pm}$ конечны, такое подмножество не является односвязным. По-видимому, такие решения могут быть использованы для описания мировых листов, которые имеют разрывы (конечные или бесконечные), т.е. для описания распада и слияния струн.

3. Динамическая система (9)–(11) имеет иную по отношению к УЛ гамильтонову структуру. Подробные результаты, касающиеся данного вопроса в общем (сингулярном) случае, получены в работе [11], где для исследования указанной системы применен метод обратной задачи.

С помощью формулы (5) и определения вектор-матриц $\hat{\mathbf{E}}_{\pm}$ введенные в начале статьи векторы $\mathbf{n}_{\pm}$ можно представить в виде $n_{\pm}^{\mu} = (1/2) \bar{\Psi}_{\pm} \Gamma^{\mu} \Psi_{\pm}$, где

$$\Psi_{+} = \pm \begin{pmatrix} -t_{12+} \\ t_{11+} \end{pmatrix}, \quad \Psi_{-} = \pm \begin{pmatrix} -t_{22-} \\ t_{21-} \end{pmatrix}, \quad t_{ij\pm} \equiv (T_{\pm})_{ij}.$$

Как уже отмечалось, преобразования $T_{\pm} \rightarrow T_{\pm} B$, где $B \in SL(2, R)$, являются лоренц-преобразованиями пространства $E_{1,2}$, так что объекты $\Psi_{\pm}$ – майорановские спиноры в данном пространстве. Эти спиноры могут быть рассмотрены как дополнительные (по отношению к X_{μ}) струнные переменные. Таким образом, предложенная теория описывает либо бозонную струну в произвольной конформно-плоской параметризации, либо некоторую спиновую струну, причем формулу (2) в этом случае необходимо рассматривать как дополнительное условие, фиксирующее произвол (1). Различные точки какой-либо орбиты группы $\mathcal{G}$ в такой теории будут отвечать различным струнным конфигурациям $(X_{\mu}, \Psi_{\pm})$. Модель в “спиновой” интерпретации была рассмотрена ранее автором в работе [12].

Как было замечено в работе [1], существует альтернативная возможность гамильтонова описания струнной динамики в терминах геометрических переменных, приводящая к иным физическим результатам. Действительно, в нашем случае орбиты группы $\mathcal{G}$,

²⁾ Автор благодарен А. К. Погребкову, указавшему ему на существование такого типа особенностей.

действующей в пространстве сингулярных полей $\varphi(\xi^0, \xi^1)$ и $\alpha_{\pm}(\xi^0, \xi^1)$, параметризуют множество струнных конфигураций $X_{\mu}(\xi^0, \xi^1)$ взаимно однозначно с точностью до движений и масштабных преобразований пространства $E_{1,2}$. Следовательно, гамильтонова структура, каноническая для действия (12), описывает также и динамику исходных струнных переменных X_{μ} , удовлетворяющих условиям $(\partial_{\pm} X)^2 = 0$. Между тем такая структура не является канонической для обычного струнного действия.

В заключение заметим, что случай $4D$ -струны рассматривается аналогично. Отличие состоит в том, что вводимые функции φ и $\alpha_{\pm}$, а также параметризующие калибровочный произвол функции $f_{\pm}$ и $g_{\pm}$ будут комплекснозначными. При этом метрика на мировом листе определяется квадратичной формой

$$\mathbf{I} = -\frac{p^2}{2} e^{-\operatorname{Re} \varphi} d\xi_+ d\xi_-;$$

пара же вторых квадратичных форм Π_i , где $i = 1, 2$, компактно записывается в комплексном виде

$$\Pi_1 + i\Pi_2 = p \left(|\rho_+| e^{i[\beta+\chi]} d\xi_+^2 - |\rho_-| e^{i[\beta-\chi]} d\xi_-^2 \right),$$

где $\chi \equiv (\operatorname{Im} \varphi + \arg \rho_+ + \arg \rho_-)/2$, а число $\beta \in [0, 2\pi)$ произвольно. Как показано в работе [13], с помощью преобразований (13) всегда можно сделать так, что $K(\xi^0, \xi^1) \in SU(2)$. Выписывая явные выражения векторов $\partial_{\pm} x$ через матричные элементы t_{ij} (см. [12]), легко убедиться, что такой выбор соответствует известной калибровке $X^0 = \xi^0$ в теории струн (для выбранных нормировок $X^0 = p\xi^0$).

Теория спиновой струны в $4D$ -пространстве-времени, основанная на нестандартном (в указанном смысле) гамильтоновом формализме и приводящая соответственно к иному спектру, построена в ряде работ автора (см, например, [14]). В этой связи уместно отметить статью [15], где обсуждается возможность описания динамических систем со связями первого рода без фиксации калибровки.

Список литературы

- [1] Б. М. Барбашов, В. В. Нестеренко. Модель релятивистской струны в физике адронов. М.: Энергоатомиздат, 1987.
- [2] Б. М. Барбашов, В. В. Нестеренко, А. М. Червяков. ТМФ. 1979. Т. 40. № 1. С. 15.
- [3] Г. П. Пронько, А. В. Разумов, Л. Д. Соловьев. ЭЧАЯ. 1983. Т. 14. № 3. С. 558.
- [4] С. П. Новиков. ДАН СССР. 1981. Т. 260. № 1. С. 31.
- [5] E. Witten. Commun. Math. Phys. 1984. V. 92. P. 455.
- [6] Л. А. Таттаджян, Л. Д. Фаддеев. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.
- [7] А. К. Погребков, С. В. Талалов. ТМФ. 1987. Т. 70. № 3. С. 342.
- [8] E. D'Hoker, R. Jackiw. Phys. Rev. D. 1982. V. 26. P. 3517.
- [9] Г. П. Джорджадзе, А. К. Погребков, М. К. Поливанов. ТМФ. 1979. Т. 40. № 2. С. 221.
- [10] С. В. Клименко, И. Н. Никитин. ТМФ. 1998. Т. 114. № 3. С. 380.
- [11] С. В. Талалов. ТМФ. 1987. Т. 71. № 3. С. 357.
- [12] С. В. Талалов. ТМФ. 1989. Т. 79. № 1. С. 41.
- [13] С. В. Талалов. ТМФ. 1992. Т. 93. № 3. С. 506.
- [14] S. V. Talalov. J. Phys. A. 1999. V. 32. P. 845.
- [15] S. I. Muslih, Y. Güler. Nuovo Cimento B. 1998. V. 113. № 3. P. 277.

Поступила в редакцию 17.V.1999 г.