Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Г. Мардоян, А. Н. Сисакян, В. М. Тер-Антонян, Базисы и межбазисные преобразования для $SU(2)$ -монополя, *ТМФ*, 2000, том 123, номер 1, 44–56

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf584>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 16:43:31

© 2000 г. Л. Г. Мардоян*, А. Н. Сисакян*, В. М. Тер-Антонян*

БАЗИСЫ И МЕЖБАЗИСНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ $SU(2)$ -МОНОПОЛЯ

Переменные в уравнении Шредингера для связанной системы “заряд- $SU(2)$ -монополь” разделяются в гиперсферических, параболических и сфероидальных координатах в пространстве $\mathbb{R}^5$. Показано, что коэффициенты разложения параболического базиса по гиперсферическому выражаются через коэффициенты Клебша–Гордана группы $SU(2)$. Выведены трехчленные рекуррентные соотношения, которым подчиняются коэффициенты разложения сфероидального базиса по гиперсферическому и параболическому базисам.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пятимерная связанная система “заряд-дион” с $SU(2)$ -монополем Янга [1] описывается уравнением [2]

$$\frac{1}{2m} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j} - \hbar A_j^a \hat{T}_a \right)^2 \psi + \frac{\hbar^2}{2mr^2} \hat{T}^2 \psi - \frac{e^2}{r} \psi = \epsilon \psi, \quad (1)$$

где $j = 0, 1, 2, 3, 4$, $a = 1, 2, 3$. Операторы $\hat{T}_a$ суть генераторы группы $SU(2)$:

$$[\hat{T}_a, \hat{T}_b] = i\epsilon_{abc} \hat{T}_c.$$

Триплет пятимерных векторов $\vec{A}^a$ имеет вид

$$\begin{aligned} \vec{A}^1 &= \frac{1}{r(r+x_0)} (0, -x_4, -x_3, x_2, x_1), \\ \vec{A}^2 &= \frac{1}{r(r+x_0)} (0, x_3, -x_4, -x_1, x_2), \\ \vec{A}^3 &= \frac{1}{r(r+x_0)} (0, x_2, -x_1, x_4, -x_3). \end{aligned}$$

*Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская область, Россия

Каждый член триплета $\vec{A}^a$ совпадает с вектор-потенциалом пятимерного монополя Дирака [1] с единичным топологическим зарядом и с осью сингулярности, направленной вдоль неположительной части оси x_0 . Векторы A_j^a ортогональны как друг к другу:

$$A_j^a A_j^b = \frac{1}{r^2} \frac{(r - x_0)}{(r + x_0)} \delta_{ab},$$

так и к вектору $\vec{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Кратность вырождения энергетического спектра ($N = 0, 1, 2, \dots$)

$$\epsilon_N^T = -\frac{me^4}{2\hbar^2 \left(\frac{N}{2} + 2\right)^2} \quad (2)$$

при фиксированных значениях T задается формулой [3]

$$g_N^T = \frac{1}{12} (2T + 1)^2 \left(\frac{N}{2} - T + 1 \right) \left(\frac{N}{2} - T + 2 \right) \times \\ \times \left\{ \left(\frac{N}{2} - T + 2 \right) \left(\frac{N}{2} - T + 3 \right) + 2T(N + 5) \right\}.$$

При $T = 0$ и четных $N = 2n$ правая часть последней формулы равняется $(n + 1) \times (n + 2)^2(n + 3)/12$, т.е. кратности вырождения чисто кулоновских уровней [4]. Вырождение энергетических уровней системы “заряд–дион” – это следствие скрытой симметрии. В работе [5] нами было доказано, что группа скрытой симметрии рассматриваемой системы есть группа $SO(6)$.

Статья построена следующим образом. В разделах 2 и 4 приводятся решения уравнения (1) в пятимерных гиперсферических и параболических координатах. В разделе 3 доказывается добавочное условие ортогональности гиперсферических радиальных функций по гипермоменту. В разделе 5, пользуясь добавочным условием ортогональности для радиальных функций, мы вычисляем коэффициенты разложения гиперсферического базиса по параболическому. В разделе 6 выводятся соотношения, которым подчиняются коэффициенты разложения сфероидального базиса по гиперсферическому и параболическому.

2. ГИПЕРСФЕРИЧЕСКИЙ БАЗИС

Для полноты в этом разделе мы приводим решения уравнения (1), полученные нами в работе [3].

В пространстве $\mathbb{R}^5$ определим гиперсферические координаты $r \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, \pi]$, $\alpha \in [0, 2\pi)$, $\beta \in [0, \pi]$, $\gamma \in [0, 4\pi)$ следующим образом:

$$x_0 = r \cos \theta, \\ x_1 + ix_2 = r \sin \theta \cos \frac{\beta}{2} e^{i\frac{\alpha+\gamma}{2}}, \\ x_3 + ix_4 = r \sin \theta \sin \frac{\beta}{2} e^{i\frac{\alpha-\gamma}{2}}. \quad (3)$$

Так как

$$iA_j^a \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{2}{r(r+x_0)} \hat{L}_a,$$

где

$$\begin{aligned} \hat{L}_1 &= \frac{i}{2} [D_{41}(x) + D_{32}(x)], \\ \hat{L}_2 &= \frac{i}{2} [D_{13}(x) + D_{42}(x)], \\ \hat{L}_3 &= \frac{i}{2} [D_{12}(x) + D_{34}(x)], \\ D_{ij}(x) &= -x_i \frac{\partial}{\partial x_j} + x_j \frac{\partial}{\partial x_i}, \end{aligned}$$

то уравнение (1) в гиперсферических координатах принимает вид

$$\left(\Delta_{r\theta} - \frac{\hat{L}^2}{r^2 \sin^2 \theta/2} - \frac{\hat{J}^2}{r^2 \cos^2 \theta/2} \right) \psi + \frac{2m}{\hbar^2} \left(\epsilon + \frac{e^2}{r} \right) \psi = 0. \quad (4)$$

Здесь

$$\Delta_{r\theta} = \frac{1}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^4 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^3 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin^3 \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right),$$

а $\hat{J}_a = \hat{L}_a + \hat{T}_a$. Отметим, что

$$[\hat{L}_a, \hat{L}_b] = i\epsilon_{abc} \hat{L}_c, \quad [\hat{J}_a, \hat{J}_b] = i\epsilon_{abc} \hat{J}_c.$$

Решение уравнения (4) имеет вид [3]

$$\psi^{\text{sph}} = R_{N\lambda}(r) Z_{\lambda L J}(\theta) \mathcal{D}_{L T m' t'}^{J M}(\alpha, \beta, \gamma; \alpha_T, \beta_T, \gamma_T), \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{L T m' t'}^{J M}(\alpha, \beta, \gamma; \alpha_T, \beta_T, \gamma_T) &= \sqrt{\frac{(2L+1)(2T+1)}{4\pi^4}} \times \\ &\times \sum_{M=m+t} C_{L, m; T, t}^{J M} D_{m m'}^L(\alpha, \beta, \gamma) D_{t t'}^T(\alpha_T, \beta_T, \gamma_T) \end{aligned}$$

— собственные функции операторов $\hat{L}^2$, $\hat{T}^2$ и $\hat{J}^2$ с собственными значениями $L(L+1)$, $T(T+1)$ и $J(J+1)$, соответственно. Здесь $C_{L, m; T, t}^{J M}$ — коэффициенты Клебша–Гордана, $D_{m m'}^L$ и $D_{t t'}^T$ — функции Вигнера, а α_T , β_T и γ_T — координаты группового пространства $SU(2)$.

Функции $Z_{\lambda L J}(\theta)$ и $R_{N\lambda}(r)$ даются формулами

$$Z_{\lambda L J}(\theta) = N_{J L T}^\lambda (1 - \cos \theta)^L (1 + \cos \theta)^J P_{\lambda - L - J}^{(2L+1, 2J+1)}(\cos \theta), \quad (6)$$

$$R_{N\lambda}(r) = C_{N\lambda} e^{-\kappa r} (2\kappa r)^\lambda F\left(-\frac{N}{2} + \lambda, 2\lambda + 4; 2\kappa r\right), \quad (7)$$

где F – вырожденная гипергеометрическая функция, N_{JT}^λ и $C_{N\lambda}$ – нормировочные константы:

$$N_{LJT}^\lambda = \sqrt{\frac{(2\lambda+3)(\lambda-J-L)!\Gamma(\lambda+J+L+3)}{2^{2J+2L+3}\Gamma(\lambda+J-L+2)\Gamma(\lambda-J+L+2)}},$$

$$C_{N\lambda} = \frac{32}{(N+4)^3} \frac{1}{(2\lambda+3)!} \sqrt{\frac{(\frac{N}{2}+\lambda+3)!}{r_0^5(\frac{N}{2}-\lambda)!}},$$

$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ – многочлены Якоби, $\kappa = 2/[r_0(N+4)]$, $r_0 = \hbar^2/(me^2)$ – боровский радиус. Предполагается, что

$$\int_0^\pi \sin^3 \theta Z_{\lambda' L J}(\theta) Z_{\lambda L J}(\theta) d\theta = \delta_{\lambda' \lambda},$$

$$\int_0^\infty r^4 R_{N' \lambda}(r) R_{N \lambda}(r) dr = \delta_{N' N}. \quad (8)$$

Квантовые числа пробегает значения $|L-T| \leq J \leq L+T$, $\lambda = L+J, L+J+1, \dots, N/2$.

Гиперсферический базис (5) является собственной функцией квадрата оператора гипермомента $\hat{\Lambda}^2$:

$$\hat{\Lambda}^2 \psi^{\text{hsp}} = \lambda(\lambda+3) \psi^{\text{hsp}}, \quad (9)$$

где

$$\hat{\Lambda}^2 = -\frac{1}{\sin^3 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin^3 \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{4}{\sin^2 \theta} \hat{L}^2 + \frac{2}{1+\cos \theta} \hat{T}^2 + \frac{2}{1+\cos \theta} \hat{L}_a \hat{T}_a.$$

В декартовых координатах оператор $\hat{\Lambda}^2$ имеет вид

$$\hat{\Lambda}^2 = -r^2 \Delta_5 + x_i x_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + 4x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{2r}{r+x_0} \hat{T}^2 + 2ir^2 A_j^a \hat{T}_a \frac{\partial}{\partial x_j}. \quad (10)$$

3. ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ ПО ГИПЕРМОМЕНТУ

Докажем, что для радиальных волновых функций $R_{N\lambda}(r)$ наряду с (8) выполняется следующее добавочное условие ортогональности по гипермоменту λ :

$$I_{\lambda\lambda'} = \int_0^\infty r^2 R_{N\lambda'}(r) R_{N\lambda}(r) dr = \frac{16}{r_0^2(N+4)^2} \frac{1}{2\lambda+3} \delta_{\lambda\lambda'}. \quad (11)$$

Это соотношение будет использовано в разделе 6 при нахождении межбазисных разложений. Доказать формулу (11) можно следующим образом.

В соотношение (11) вместо $R_{N\lambda}(r)$ и $R_{N\lambda'}(r)$ подставим их явные выражения (7), учтем, что

$$F\left(-\frac{N}{2}+\lambda, 2\lambda+4; 2\kappa r\right) = \sum_{s=0}^{\frac{N}{2}-\lambda} \frac{\left(-\frac{N}{2}+\lambda\right)_s}{(2\lambda+4)_s} \frac{(2\kappa r)^s}{s!}$$

и [6]

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} x^\nu F(\alpha, \gamma; kx) dx = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\lambda^{\nu+1}} {}_2F_1\left(\alpha, \nu+1; \gamma; \frac{k}{\lambda}\right). \quad (12)$$

Тогда, пользуясь известной формулой для гипергеометрической функции

$${}_2F_1(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \quad (13)$$

приходим к соотношению

$$I_{\lambda\lambda'} = \frac{16}{r_0^2(N+4)^2} \frac{\Gamma(\lambda+\lambda'+3)}{(2\lambda+3)} \sqrt{\frac{(\frac{N}{2}+\lambda+3)!}{(\frac{N}{2}-\lambda)! (\frac{N}{2}-\lambda')! (\frac{N}{2}+\lambda'+3)!}} \times \\ \times \sum_{s=0}^{\frac{N}{2}-\lambda} \frac{(-\frac{N}{2}+\lambda)_s}{s!} \frac{(\lambda+\lambda'+3)_s}{(2\lambda+4)_s} \frac{\Gamma(\frac{N}{2}-\lambda-s+1)}{\Gamma(\lambda-\lambda'-s+1)}. \quad (14)$$

Известно [7], что

$$\frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z-n)} = (-1)^n \frac{\Gamma(-z+n+1)}{\Gamma(-z+1)}, \quad (15)$$

и, следовательно, сумма по s сворачивается в гипергеометрическую функцию типа (13), так что

$$I_{\lambda\lambda'} = \frac{16}{r_0^2(N+4)^2} \frac{1}{\lambda+\lambda'+3} \sqrt{\frac{(\frac{N}{2}-\lambda)! (\frac{N}{2}+\lambda+3)!}{(\frac{N}{2}-\lambda')! (\frac{N}{2}+\lambda'+3)!}} \times \\ \times \frac{1}{\Gamma(\lambda-\lambda'+1)\Gamma(\lambda'+\lambda+1)}. \quad (16)$$

Так как при данном N числа λ и λ' целые или полупелые одновременно, то выражение (16) обращается в нуль при $\lambda \neq \lambda'$ за счет произведения гамма-функций $\Gamma(\lambda-\lambda'+1)$ и $\Gamma(\lambda'+\lambda+1)$, что и приводит к условию ортогональности (11).

Формула (11) обобщает соотношение ортогональности для атома водорода, полученное нами в работе [8]. Наличие добавочного условия ортогональности связано с фактом случайного вырождения энергетического спектра системы “заряд- $SU(2)$ -монополь”.

4. ПАРАБОЛИЧЕСКИЙ БАЗИС

Определим параболические координаты в $\mathbb{R}^5$ следующим образом:

$$x_0 = \frac{1}{2}(\mu - \nu), \\ x_1 + ix_2 = \sqrt{\mu\nu} \cos \frac{\beta}{2} e^{i\frac{\alpha+\gamma}{2}}, \\ x_3 + ix_4 = \sqrt{\mu\nu} \sin \frac{\beta}{2} e^{i\frac{\alpha-\gamma}{2}}, \quad (17)$$

где $\mu, \nu \in [0, \infty)$. Оператор Лапласа в этих координатах имеет вид

$$\Delta_5 = \frac{4}{\mu + \nu} \left[\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu} \right) + \frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\nu^2 \frac{\partial}{\partial \nu} \right) \right] - \frac{4}{\mu\nu} \hat{L}^2,$$

так что вместо уравнения (1) имеем

$$\left[\Delta_{\mu\nu} - \frac{4\hat{J}^2}{\mu(\mu+\nu)} - \frac{4\hat{L}^2}{\nu(\mu+\nu)} \right] \psi^{\text{par}} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(\epsilon + \frac{2e^2}{\mu+\nu} \right) \psi^{\text{par}} = 0, \quad (18)$$

где

$$\Delta_{\mu\nu} = \frac{4}{\mu+\nu} \left[\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu} \right) + \frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\nu^2 \frac{\partial}{\partial \nu} \right) \right].$$

После подстановки

$$\psi^{\text{par}} = f_1(\mu) f_2(\nu) \mathcal{D}_{LTm't'}^{JM}(\alpha, \beta, \gamma; \alpha_T, \beta_T, \gamma_T) \quad (19)$$

переменные в уравнении (18) разделяются, и мы приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \frac{d}{d\mu} \left(\mu^2 \frac{df_1}{d\mu} \right) + \left[\frac{m\epsilon}{2\hbar^2} \mu - \frac{J(J+1)}{\mu} + \frac{\hbar}{2\sqrt{m}} \beta + \frac{me^2}{2\hbar^2} \right] f_1 &= 0, \\ \frac{1}{\nu} \frac{d}{d\nu} \left(\nu^2 \frac{df_2}{d\nu} \right) + \left[\frac{m\epsilon}{2\hbar^2} \nu - \frac{L(L+1)}{\nu} - \frac{\hbar}{2\sqrt{m}} \beta + \frac{me^2}{2\hbar^2} \right] f_2 &= 0, \end{aligned} \quad (20)$$

где β – постоянная разделения. При $T = 0$ (т.е. $J = L$) эти уравнения совпадают с уравнениями для пятимерной задачи Кулона [4], и, следовательно,

$$\psi^{\text{par}} = \kappa^3 \sqrt{2r_0} f_{n_1 J}(\mu) f_{n_2 L}(\nu) \mathcal{D}_{LTm't'}^{JM}(\alpha, \beta, \gamma; \alpha_T, \beta_T, \gamma_T), \quad (21)$$

где

$$f_{pq}(x) = \frac{1}{(2q+1)!} \sqrt{\frac{(p+2q+1)!}{p!}} \exp\left(-\frac{\kappa x}{2}\right) (\kappa x)^q F(-p, 2q+2; \kappa x),$$

а

$$n_1 = -J - 1 + \frac{\hbar}{2\kappa\sqrt{m}} \beta + \frac{1}{2\kappa r_0}, \quad n_2 = -L - 1 - \frac{\hbar}{2\kappa\sqrt{m}} \beta + \frac{1}{2\kappa r_0}$$

– неотрицательные целые числа. Из последних соотношений и из формулы (2) следует, что параболические квантовые числа n_1 , n_2 , J и L связаны с главным квантовым числом N следующим образом:

$$N = 2(n_1 + n_2 + J + L).$$

Исключая энергию из уравнений (20), мы приходим к добавочному интегралу движения

$$\begin{aligned} \widehat{M}_0 = \frac{\hbar}{\sqrt{m}} \left\{ \frac{2}{\mu+\nu} \left[\frac{\mu}{\nu} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\nu^2 \frac{\partial}{\partial \nu} \right) - \frac{\nu}{\mu} \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu} \right) \right] - \right. \\ \left. - \frac{2(\mu-\nu)}{\mu\nu} \hat{L}^2 + \frac{4\nu}{\mu(\mu+\nu)} \hat{L}_a \hat{T}_a + \frac{2\nu}{\mu(\mu+\nu)} \hat{T}^2 + \frac{me}{\hbar^2} \frac{\mu-\nu}{\mu+\nu} \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

с собственными значениями

$$\frac{\hbar^2}{m} \beta = \frac{2e^2 \sqrt{m}}{\hbar} \frac{n_1 - n_2 + J - L}{N + 4}.$$

В декартовых координатах оператор $\widehat{M}_0$ запишется в виде

$$\begin{aligned} \widehat{M}_0 = \frac{\hbar}{\sqrt{m}} \left[x_0 \frac{\partial^2}{\partial x_\sigma \partial x_\sigma} - x_\sigma \frac{\partial^2}{\partial x_0 \partial x_\sigma} + i(r - x_0) A_j^a \widehat{T}_a \frac{\partial}{\partial x_j} - \right. \\ \left. - 2 \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{r - x_0}{r(r + x_0)} \widehat{T}^2 + \frac{me^2}{\hbar^2} \frac{x_0}{r} \right], \end{aligned} \quad (23)$$

где $\sigma = 1, 2, 3, 4$. Оператор $\widehat{M}_0$ — компонента вектора Рунге–Ленца [5]

$$\widehat{M}_k = \frac{1}{2\sqrt{m}} \left(\hat{\pi}_i \hat{L}_{ik} + \hat{L}_{ik} \hat{\pi}_i + \frac{2me^2}{\hbar} \frac{x_k}{r} \right)$$

при $k = 0$.

5. РАЗЛОЖЕНИЕ ПАРКА–ТАРТЕРА

Гиперсферические $(r, \theta, \alpha, \beta, \gamma)$ и параболические $(\mu, \nu, \alpha, \beta, \gamma)$ координаты связаны между собой следующим образом:

$$\mu = r(1 + \cos \theta), \quad \nu = r(1 - \cos \theta). \quad (24)$$

При фиксированных значениях энергии

$$\psi^{\text{par}} = \sum_{\lambda=T}^{\frac{N}{2}} W_{NJLn_1}^\lambda \psi^{\text{hsp}}. \quad (25)$$

Переходя в левой части соотношения (25) от μ и ν к r и θ , положив $\theta = 0$, и с учетом того, что

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(1) = \frac{(\alpha + 1)_n}{n!},$$

мы установим равенство, в которое входит только переменная r . Затем, пользуясь условием ортогональности (11), получим

$$W_{NJLn_1}^\lambda = \frac{1}{(2J+1)!(2\lambda+3)!} E_{JL\lambda}^{Nn_1} K_{JL\lambda}^{Nn_1}, \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} E_{JL\lambda}^{Nn_1} = \sqrt{(2\lambda+3)(\lambda-J-L)! \left(\frac{N}{2} + \lambda + 3 \right)!} \times \\ \times \left[\frac{\Gamma(\lambda+J-L+2)(n_1+2J+1)!(n_2+2L+1)!}{n_1! n_2! \left(\frac{N}{2} - \lambda \right)! \Gamma(\lambda-J+L+2) \Gamma(\lambda+J+L+3)} \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$K_{JL\lambda}^{Nn_1} = \int_0^\infty e^{-x} x^{\lambda+J+L+2} F(-n_1, 2J+2; x) F\left(-\frac{N}{2} + \lambda, 2\lambda+4; x\right) dx. \quad (28)$$

Для вычисления интеграла $K_{JL\lambda}^{Nn_1}$ запишем вырожденную гипергеометрическую функцию $F(-n_1, 2J+2; x)$ в виде многочлена, произведем интегрирование согласно формуле (12) и, учитывая соотношение (13), получим

$$K_{JL\lambda}^{Nn_1} = \frac{(2\lambda+3)! \left(\frac{N}{2} - J - L\right)! \Gamma(\lambda+J+L+3)}{(\lambda-J-L)! \left(\frac{N}{2} + \lambda + 3\right)!} \times \\ \times {}_3F_2 \left\{ \begin{matrix} -n_1, -\lambda+J+L, \lambda+J+L+3 \\ 2J+2, -\frac{N}{2} + J+L \end{matrix} \middle| 1 \right\}. \quad (29)$$

Подстановка (27) и (29) в (26) дает

$$W_{NJLn_1}^\lambda = \left[\frac{(2\lambda+3)\Gamma(\lambda+J+L+3)(n_1+2J+1)!(n_2+2L+1)!}{n_1! n_2! (\lambda-J-L)! \left(\frac{N}{2} - \lambda\right)! \left(\frac{N}{2} + \lambda + 3\right)!} \right]^{\frac{1}{2}} \times \\ \times \frac{\left(\frac{N}{2} - J - L\right)!}{(2J+1)!} \sqrt{\frac{\Gamma(\lambda+J-L+2)}{\Gamma(\lambda-J+L+2)}} {}_3F_2 \left\{ \begin{matrix} -n_1, -\lambda+J+L, \lambda+J+L+3 \\ 2J+2, -\frac{N}{2} + J+L \end{matrix} \middle| 1 \right\}. \quad (30)$$

Известно, что коэффициенты Клебша–Гордана можно записать в виде [9]

$$C_{a\alpha; b\beta}^{c\gamma} = (-1)^{a-\alpha} \delta_{\gamma, \alpha+\beta} \frac{(a+b-\gamma)! (b+c-\alpha)!}{\sqrt{(b-\beta)! (b+\beta)!}} \times \\ \times \left[\frac{(2c+1)(a+\alpha)! (c+\gamma)!}{(a-\alpha)! (c-\gamma)! (a+b+c+1)! (a+b-c)! (a-b+c)! (b-a+c)!} \right]^{\frac{1}{2}} \times \\ \times {}_3F_2 \left\{ \begin{matrix} -a-b-c-1, -a+\alpha, -c+\gamma \\ -a-b+\gamma, -b-c+\alpha \end{matrix} \middle| 1 \right\}. \quad (31)$$

Пользуясь формулой [7]

$${}_3F_2 \left\{ \begin{matrix} s, s', -N \\ t', 1-N-t \end{matrix} \middle| 1 \right\} = \frac{(t+s)_N}{(t)_N} {}_3F_2 \left\{ \begin{matrix} s, t' - s', -N \\ t', t+s \end{matrix} \middle| 1 \right\},$$

соотношение (31) можно записать в виде

$$C_{a\alpha; b\beta}^{c\gamma} = \left[\frac{(2c+1)(b-a+c)! (a+\alpha)! (b+\beta)! (c+\gamma)!}{(b-\beta)! (c-\gamma)! (a+b-c)! (a-b+c)! (a+b+c+1)!} \right]^{\frac{1}{2}} \times \\ \times \delta_{\gamma, \alpha+\beta} \frac{(-1)^{a-\alpha}}{\sqrt{(a-\alpha)!}} \frac{(a+b-\gamma)!}{(b-a+\gamma)!} {}_3F_2 \left\{ \begin{matrix} -a+\alpha, c+\gamma+1, -c+\gamma \\ \gamma-a-b, b-a+\gamma+1 \end{matrix} \middle| 1 \right\}. \quad (32)$$

Наконец, сравнивая (32) и (30), приходим к следующему представлению:

$$W_{NJLn_1}^\lambda = (-1)^{n_1} C_{\frac{N-2J+2L+2}{4}, L+\frac{n_2-n_1+1}{2}; \frac{N+2J-2L+2}{4}, J+\frac{n_1-n_2+1}{2}}^{\lambda+1, J+L+1}. \quad (33)$$

При $T=0$ (т.е. $J=L$) формула (33) переходит в соответствующую формулу для пятимерной задачи Кулона [4].

Обратное разложение, т.е. разложение гиперсферического базиса по параболическому, имеет вид

$$\psi^{\text{hsp}} = \sum_{n_1=0}^{\frac{N}{2}-J-L} \widetilde{W}_{NJL\lambda}^{n_1} \psi^{\text{par}}. \quad (34)$$

Пользуясь условием ортонормируемости коэффициентов Клебша–Гордана группы $SU(2)$, получим

$$\widetilde{W}_{NJL\lambda}^{n_1} = (-1)^{n_1} C^{\lambda+1, J+L+1}_{\frac{N-2J+2L+2}{4}, \frac{N-2J+2L+2}{4} - n_1; \frac{N+2J-2L+2}{4}, n_1+J - \frac{N-2J-2L-2}{4}}. \quad (35)$$

С учетом формул (31) или (32) можно выразить эти коэффициенты и через функции ${}_3F_2$.

6. СФЕРОИДАЛЬНЫЙ БАЗИС

Определим пятимерные сфероидальные координаты следующим образом:

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{R}{2}(\xi\eta + 1), \\ x_1 + ix_2 &= \frac{R}{2}\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \cos \frac{\beta}{2} e^{i\frac{\alpha+\gamma}{2}}, \\ x_3 + ix_4 &= \frac{R}{2}\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \sin \frac{\beta}{2} e^{i\frac{\alpha-\gamma}{2}}, \end{aligned}$$

где $\xi \in [1, \infty)$, $\eta \in [-1, 1]$, $R \in [0, \infty)$. Параметр R есть межфокусное расстояние, и при $R \rightarrow 0$ и $R \rightarrow \infty$ сфероидальные координаты переходят в гиперсферические и параболические, соответственно.

Оператор Лапласа в этих координатах имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta_5 &= \frac{4}{R^2(\xi^2 - \eta^2)} \left\{ \frac{1}{\xi^2 - 1} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(\xi^2 - 1)^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \right] + \frac{1}{1 - \eta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(1 - \eta^2)^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \right] \right\} - \\ &\quad - \frac{16\hat{L}^2}{R^2(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}, \end{aligned}$$

поэтому вместо уравнения (1) имеем

$$\begin{aligned} &\left[\Delta_{\xi\eta} - \frac{8\hat{J}^2}{R^2(\xi + \eta)(\xi + 1)(1 + \eta)} - \frac{8\hat{L}^2}{R^2(\xi + \eta)(\xi - 1)(1 - \eta)} \right] \psi^{\text{spr}} + \\ &\quad + \frac{2m}{\hbar^2} \left[\epsilon + \frac{2e^2}{R(\xi + \eta)} \right] \psi^{\text{spr}} = 0, \end{aligned} \quad (36)$$

где

$$\Delta_{\xi\eta} = \frac{4}{R^2(\xi^2 - \eta^2)} \left\{ \frac{1}{\xi^2 - 1} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(\xi^2 - 1)^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \right] + \frac{1}{1 - \eta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(1 - \eta^2)^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \right] \right\}.$$

После подстановки

$$\psi^{\text{spr}} = \phi_1(\xi)\phi_2(\eta)\mathcal{D}_{LTm't'}^{JM}(\alpha, \beta, \gamma; \alpha_T, \beta_T, \gamma_T) \quad (37)$$

переменные в уравнении (36) разделяются:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{\xi^2 - 1} \frac{d}{d\xi} (\xi^2 - 1)^2 \frac{d}{d\xi} - \frac{2L(L+1)}{\xi - 1} + \frac{2J(J+1)}{\xi + 1} + \frac{R}{r_0} \xi + \frac{mR^2\epsilon}{2\hbar^2} (\xi^2 - 1) \right] \phi_1 = A(R)\phi_1, \\ & \left[\frac{1}{1 - \eta^2} \frac{d}{d\eta} (1 - \eta^2)^2 \frac{d}{d\eta} - \frac{2L(L+1)}{1 - \eta} - \frac{2J(J+1)}{1 + \eta} - \frac{R}{r_0} \eta + \frac{mR^2\epsilon}{2\hbar^2} (1 - \eta^2) \right] \phi_2 = -A(R)\phi_2, \end{aligned} \quad (38)$$

где $A(R)$ – постоянная разделения.

Исключая энергию из системы уравнений (38), мы получим сфероидальный интеграл движения

$$\begin{aligned} \hat{A} = & \frac{1}{\xi^2 - \eta^2} \left[\frac{1 - \eta^2}{\xi^2 - 1} \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi^2 - 1)^2 \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\xi^2 - 1}{1 - \eta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} (1 - \eta^2)^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \right] + \\ & + \frac{4(\xi^2 + \eta^2 - 2)}{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \hat{L}^2 + i \frac{R^2}{2} (\xi^2 + \eta^2 + \xi\eta + \xi + \eta - 1) A_j^a \hat{T}_a \frac{\partial}{\partial x_j} + \\ & + \frac{2(\xi^2 + \eta^2 + \xi\eta + \xi + \eta - 1)}{(\xi + \eta)(\xi + 1)(1 + \eta)} \hat{T}^2 + \frac{R(\xi\eta + 1)}{r_0(\xi + \eta)}. \end{aligned} \quad (39)$$

В последнем выражении, переходя к декартовым координатам и учитывая (10) и (23), получим

$$\hat{A} = \hat{\Lambda}^2 + \frac{R\sqrt{m}}{\hbar} \widehat{M}_0. \quad (40)$$

Итак,

$$\hat{A}\psi^{\text{spr}} = A_q(R)\psi^{\text{spr}}. \quad (41)$$

Индекс q нумерует собственные значения оператора $\hat{A}$ и пробегает следующие значения: $0 \leq q \leq N/2 - L - J$.

Теперь построим сфероидальный базис в виде разложений

$$\psi^{\text{spr}} = \sum_{\lambda=J+L}^{\frac{N}{2}} U_{NqJL}^{\lambda}(R) \psi^{\text{hsp}}, \quad (42)$$

$$\psi^{\text{spr}} = \sum_{n_1=0}^{\frac{N}{2} - J - L} V_{NqJL}^{n_1}(R) \psi^{\text{par}}. \quad (43)$$

Подействуем оператором $\hat{A}$ на левые и правые части разложений (42), (43), тогда с учетом уравнений (9), (41) и

$$\widehat{M}_0 \psi^{\text{par}} = \frac{2e^2 \sqrt{m}}{\hbar(N+4)} (n_1 - n_2 + J - L) \psi^{\text{par}} \quad (44)$$

мы получим две системы линейных однородных уравнений

$$[A_q(R) - \lambda(\lambda + 3)] U_{NqJL}^\lambda(R) = \frac{R\sqrt{m}}{\hbar} \sum_{\lambda'=J+L}^{\frac{N}{2}} U_{NqJL}^{\lambda'}(R) (\widehat{M}_0)_{\lambda\lambda'}, \quad (45)$$

$$\left[A_q(R) - \frac{2R}{r_0(N+4)} (n_1 - n_2 + J - L) \right] V_{NqJL}^{n_1}(R) = \sum_{n'_1=0}^{\frac{N}{2}-J-L} V_{NqJL}^{n'_1}(R) (\hat{\Lambda}^2)_{n_1 n'_1}. \quad (46)$$

Здесь

$$(\widehat{M}_0)_{\lambda\lambda'} = \int \psi_\lambda^{*\text{hsp}} \widehat{M}_0 \psi_{\lambda'}^{\text{hsp}} dv,$$

$$(\hat{\Lambda}^2)_{n_1 n'_1} = \int \psi_{n_1}^{*\text{par}} \hat{\Lambda}^2 \psi_{n'_1}^{\text{par}} dv.$$

Из (34) и (44) следует, что

$$(\widehat{M}_0)_{\lambda\lambda'} = \frac{2e^2 \sqrt{m}}{\hbar(N+4)} \sum_{n_1=0}^{\frac{N}{2}-J-L} \left(2n_1 - \frac{N}{2} + 2J \right) \widetilde{W}_{NqJL}^{n_1} \widetilde{W}_{NqJL}^{n_1}. \quad (47)$$

Теперь после подстановки формулы (35) в (47) и с учетом рекуррентного соотношения [9]

$$C_{a\alpha; b\beta}^{c\gamma} = - \left[\frac{4c^2(2c+1)(2c-1)}{(c+\gamma)(c-\gamma)(b-a+c)(a-b+c)(a+b-c+1)(a+b+c+1)} \right]^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left\{ \left[\frac{(c-\gamma-1)(c+\gamma-1)(b-a+c-1)(a-b+c-1)(a+b-c+2)(a+b+c)}{4(c-1)^2(2c-3)(2c-1)} \right]^{\frac{1}{2}} \times \right.$$

$$\left. \times C_{a\alpha; b\beta}^{c-2, \gamma} - \frac{(\alpha-\beta)c(c-1) - \gamma a(a+1) + \gamma b(b+1)}{2c(c-1)} C_{a\alpha; b\beta}^{c-1, \gamma} \right\}$$

и условия

$$\sum_{\alpha, \beta} C_{a\alpha; b\beta}^{c\gamma} C_{a\alpha; b\beta}^{c'\gamma'} = \delta_{c'c} \delta_{\gamma'\gamma}$$

получим

$$(\widehat{M}_0)_{\lambda\lambda'} = - \frac{e^2 \sqrt{m}}{\hbar(N+4)} \left[\frac{(L-J)(L+J+1)(N+4)}{(\lambda+1)(\lambda+2)} \delta_{\lambda\lambda'} + \right.$$

$$\left. + B_{NqJL}^{\lambda+1} \delta_{\lambda', \lambda+1} + B_{NqJL}^{\lambda} \delta_{\lambda', \lambda-1} \right], \quad (48)$$

где

$$B_{N J L}^{\lambda} = \frac{\sqrt{(N-2\lambda+2)(N+2\lambda+6)}}{(\lambda+1)} \times \\ \times \left[\frac{(\lambda+J+L+2)(\lambda-J-L)(\lambda-J+L+1)(\lambda+J-L+1)}{(2\lambda+1)(2\lambda+3)} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Подставив (48) в (45), мы приходим к трехчленным рекуррентным соотношениям

$$\left[A_q(R) - \lambda(\lambda+3) + \frac{R}{r_0} \frac{(L-J)(L+J+1)}{(\lambda+1)(\lambda+2)} \right] U_{N q J L}^{\lambda}(R) + \\ + \frac{R}{r_0(N+4)} [B_{N J L}^{\lambda+1} U_{N q J L}^{\lambda+1}(R) + B_{N J L}^{\lambda} U_{N q J L}^{\lambda-1}(R)] = 0. \quad (49)$$

Эту систему $N/2 - J - L$ линейных однородных уравнений надо решать совместно с условием нормировки

$$\sum_{\lambda=J+L}^{\frac{N}{2}} |U_{N q J L}^{\lambda}(R)|^2 = 1.$$

Пользуясь разложением (25), получим

$$(\hat{\Lambda}^2)_{n_1 n'_1} = \sum_{\lambda=J+L}^{\frac{N}{2}} \lambda(\lambda+3) W_{N J L n_1}^{\lambda} W_{N J L n'_1}^{\lambda}. \quad (50)$$

Формула (33), соотношение [10]

$$[c(c+1) - a(a+1) - b(b+1) - 2\alpha\beta] C_{a,\alpha;b,\beta}^{c,\gamma} = \\ = \sqrt{(a+\alpha)(a-\alpha+1)(b-\beta)(b+\beta+1)} C_{a,\alpha-1;b,\beta+1}^{c,\gamma} + \\ + \sqrt{(a-\alpha)(a+\alpha+1)(b+\beta)(b-\beta+1)} C_{a,\alpha+1;b,\beta-1}^{c,\gamma}$$

и условие

$$\sum_{c,\gamma} C_{a\alpha;b\beta}^{c\gamma} C_{a\alpha';b\beta'}^{c\gamma} = \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\beta\beta'}$$

позволяют получить для матричного элемента $(\hat{\Lambda}^2)_{n_1 n'_1}$ следующее выражение:

$$(\hat{\Lambda}^2)_{n_1 n'_1} = [n_2(n_1+1) + (n_1+2J+1)(n_2+2L+2) + (L-J)(L-J+1) - 2] \delta_{n'_1 n_1} - \\ - [n_1(n_1+2J+1)(n_2+1)(n_2+2L+2)]^{\frac{1}{2}} \delta_{n'_1, n_1-1} - \\ - [n_2(n_1+1)(n_1+2J+2)(n_2+2L+1)]^{\frac{1}{2}} \delta_{n'_1, n_1+1}.$$

Подставляя последнюю формулу в (46), получим трехчленное рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} & \left[n_2(n_1 + 1) + (n_1 + 2J + 1)(n_2 + 2L + 2) - 2 + (L - J)(L - J + 1) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{R}{r_0(N + 4)}(4n_1 - N + 4J) - A_q(R) \right] V_{NqJL}^{n_1}(R) = \\ & = [n_1(n_2 + 1)(n_1 + 2J + 1)(n_2 + 2L + 2)]^{\frac{1}{2}} V_{NqJL}^{n_1+1}(R) + \\ & \quad + [n_2(n_1 + 1)(n_1 + 2J + 2)(n_2 + 2L + 1)]^{\frac{1}{2}} V_{NqJL}^{n_1-1}(R), \end{aligned}$$

которое нужно решать с условием

$$\sum_{n_1=0}^{\frac{N}{2}-J-L} |V_{NqJL}^{n_1}(R)|^2 = 1.$$

Приведем следующие предельные формулы:

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow 0} U_{NqJL}^{\lambda}(R) &= \delta_{\lambda q}, & \lim_{R \rightarrow \infty} U_{NqJL}^{\lambda}(R) &= \widetilde{W}_{NqJL}^{n_1}, \\ \lim_{R \rightarrow 0} V_{NqJL}^{n_1}(R) &= W_{NqJL}^{n_1}, & \lim_{R \rightarrow \infty} V_{NqJL}^{n_1}(R) &= \delta_{n_1 q}. \end{aligned}$$

Заметим, что при $\widehat{T} = 0$, т.е. при $\widehat{J} = \widehat{L}$, воспроизводятся все формулы, полученные нами [4] для чисто кулоновского случая.

Список литературы

- [1] *C. N. Yang.* J. Math. Phys. 1978. V. 19. P. 320.
- [2] *L. G. Mardoyan, A. N. Sissakian, V. M. Ter-Antonyan.* Oscillator as a hidden non-Abelian monopole. Preprint E2-96-24. Dubna: JINR, 1996; hep-th/9601093.
- [3] *Л. Г. Мардоян, А. Н. Сисакян, В. М. Тер-Антонян.* ЯФ. 1998. Т. 61. С. 1859.
- [4] *Kh. H. Karayan, L. G. Mardoyan, V. M. Ter-Antonyan.* The Eulerian bound states: 5D Coulomb problem. Preprint E2-94-359. Dubna: JINR, 1994.
- [5] *L. G. Mardoyan, A. N. Sissakian, V. M. Ter-Antonyan.* Mod. Phys. Lett. A. 1999. V. 14. P. 1303.
- [6] *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.* Квантовая механика. М.: Наука, 1974.
- [7] *Г. Бейтман, А. Эрдейи.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1965.
- [8] *Л. Г. Мардоян, Г. С. Погосян, В. М. Тер-Антонян.* Изв. АН Армянской ССР. Физика. 1984. Т. 19. С. 3.
- [9] *Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский.* Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975.
- [10] *M. Kibler, G. Grenet.* J. Math. Phys. 1980. V. 21. P. 422.

Поступила в редакцию 3.IX.1999 г.