Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Козориз, Ю. Р. Мусин, Суперсимметричный электрон в кулоновском поле,
ТМФ, 2000, том 123, номер 1, 75–80

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf586>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 13:28:25

СУПЕРСИММЕТРИЧНЫЙ ЭЛЕКТРОН В КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ

Движение электрона в кулоновском поле проанализировано с использованием модели суперсимметричной дираковской частицы Ди Векья–Равндела. Найдено точное аналитическое решение пространственной части псевдоклассических уравнений Баргмана–Мишеля–Телегди.

Введение псевдоклассической механики [1], т.е. классической механики над алгеброй Грассмана, позволяет рассмотреть с новых позиций классическую задачу о движении электрона в кулоновском поле. Известно [2] точное аналитическое решение для заряженной релятивистской частицы, движущейся во внешнем кулоновском поле. Для релятивистской частицы со спином аналитическое решение традиционных уравнений Баргмана–Мишеля–Телегди (БМТ) [3] в кулоновском поле, по-видимому, невозможно. В то же время для нерелятивистской частицы Березин и Маринов [4] в рамках псевдоклассической механики нашли точное решение для общего случая центрального поля и спин-орбитального взаимодействия.

Целью данной работы является построение траектории движения релятивистской частицы со спином в кулоновском поле в терминах псевдоклассической механики.

В качестве псевдоклассической модели электрона возьмем суперсимметричную дираковскую частицу Ди Векья–Равндела [5] с действием вида

$$S = \int ds d\tau DX^\mu DD X_\mu, \quad \mu = 0, 1, 2, 3,$$

где s – четная, τ – нечетная компоненты супервремени, $D = i\tau\partial_s + \partial_\tau$ – ковариантная производная,

$$X^\mu(s, \tau) = x^\mu(s) + i\theta^\mu(s)\tau$$

– суперкоордината, x^μ – пространственная, а θ^μ – спиновая координаты, причем

$$i\theta^\mu = \left. \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \right|_{\tau=0}.$$

*Московский авиационный институт (технический университет) им. Серго Орджоникидзе, Москва, Россия

Взаимодействие с полем $A^\mu(X)$ введено удлинением производной:

$$\begin{aligned} DD X^\mu &\rightarrow DD X^\mu + iq A^\mu(X), & X &= (X^0, X^1, X^2, X^3), \\ A^\mu(X) &= A^\mu(x) + \partial_\nu A^\mu(x) \theta^\nu \tau, & x &= (x^0, x^1, x^2, x^3). \end{aligned}$$

Используя эти формулы, нетрудно получить суперсимметричный лагранжиан

$$L = \frac{1}{2} \dot{x}^\mu \dot{x}_\mu + \frac{1}{2} i \theta^\mu \dot{\theta}_\mu + q \dot{x}^\mu A_\mu + iq \partial_\nu A_\mu \theta^\mu \theta^\nu, \quad (1)$$

где A_μ – 4-потенциал электромагнитного поля, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, $q = -e$ – заряд частицы. Точкой обозначается производная по собственному времени частицы s . Уравнения движения частицы, следующие из (1), имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{x}_\mu - q F_{\mu\nu} \dot{x}^\nu - \frac{q}{2} S^{\nu\alpha} \partial_\mu F_{\nu\alpha} &= 0, \\ \dot{\theta}_\mu - q F_{\mu\nu} \theta^\nu &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $S^{\nu\alpha} = -i\theta^\nu \theta^\alpha$ – тензор спина, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ – тензор электромагнитного поля. Уравнения (2) формально совпадают с традиционными уравнениями БМТ для частицы с гиромагнитным отношением $g = 2$ (следствие суперсимметрии лагранжиана (1)). Однако уравнения (2) являются только грассмановым аналогом уравнения БМТ, поскольку все величины, используемые в (1), являются элементами алгебры Березина. Переход от них к действительным числам может быть осуществлен с помощью функции плотности обычным образом [6].

В сферических координатах r, α, γ , где α – азимутальный, а γ – полярный углы, уравнения (2) в кулоновском поле будут иметь вид

$$\begin{aligned} -\ddot{t} + e \frac{d\varphi}{dr} \dot{r} &= 0, & \frac{1}{2} \ddot{\alpha} + \frac{1}{r} \dot{r} \dot{\alpha} + \operatorname{ctg} \gamma \dot{\gamma} \dot{\alpha} &= 0, \\ \ddot{r} = r \sin^2 \gamma \dot{\alpha}^2 + r \dot{\gamma}^2 + e \dot{t} \frac{d\varphi}{dr} + i e \theta^0 \theta^1 \frac{d^2 \varphi}{dr^2}, & & (3) \\ \ddot{\gamma} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\gamma} &= \sin \gamma \cos \gamma \dot{\alpha}^2 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \dot{\theta}^0 - e \frac{d\varphi}{dr} \theta^1 &= 0, & \dot{\theta}^1 - e \frac{d\varphi}{dr} \theta^0 &= 0, \\ \dot{\theta}^2 + \left(\frac{1}{r} \dot{r} + \operatorname{ctg} \gamma \dot{\gamma} \right) \theta^2 &= 0, & \dot{\theta}^3 + \frac{1}{r} \dot{r} \theta^3 &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\varphi = kQ/r$ – потенциал поля (k – размерная константа), $Q = Ze$ – заряд ядра ($Z \in \mathbb{N}$).

Заметим, что в классическом нерелятивистском пределе собственное время s совпадает с лабораторным временем t . Движение в этом случае становится плоским и из пространственных уравнений остается только уравнение для радиуса r , которое в точности совпадает с уравнением Березина и Маринова [4]

$$\ddot{r} = -\frac{d}{dr} V_0(r) + \frac{L^2}{r^3} - \Lambda \frac{d}{dr} V_1(r),$$

где $V_0 = -e\varphi$, $V_1 = -e\frac{d\varphi}{dr}$, $L = r^2\dot{\alpha}$, $\Lambda = i\theta^0\theta^1$.

Система (3), как легко убедиться, имеет два первых интеграла

$$K_1 = \dot{t} - e\varphi, \quad K_2 = \dot{\alpha} r^2 \sin^2 \gamma, \quad (5)$$

что позволяет, переходя от производных по s к производным по α , записать обыкновенные нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка для траектории электрона

$$\begin{aligned} \frac{K_2^2(2 \operatorname{ctg} \gamma \gamma' R' - R'')}{\sin^4 \gamma} &= \left(K_2^2 (\gamma')^2 \sin^4 \gamma + \frac{K_2^2}{\sin^2 \gamma} - (ekQ)^2 \right) R + \\ &\quad + 2ekQ \Lambda R - eK_1 kQ, \\ \gamma'' - 2 \operatorname{ctg} \gamma (\gamma')^2 &= \frac{1}{2} \sin 2\gamma, \end{aligned} \quad (6)$$

где $R = 1/r$, $\Lambda = i\theta^0\theta^1$ – постоянная величина (как видно из (4)), а штрихом обозначается производная по α . Если опустить в (6) слагаемые, содержащие Λ , то получим известные уравнения для траектории бесспиновой частицы [2].

В силу нильпотентности Λ воспользуемся приемом, предложенным в статье [4], и будем искать решение (6) в виде разложения по Λ :

$$\begin{aligned} R(\alpha, \Lambda) &= R_0(\alpha) + \Lambda R_1(\alpha), \\ \gamma(\alpha, \Lambda) &= \gamma_0(\alpha) + \Lambda \gamma_1(\alpha), \end{aligned} \quad (7)$$

где $R_0(\alpha)$ и $\gamma_0(\alpha)$ – решения уравнений (6) для частицы без спина (нулевое приближение). Это означает, что мы ищем решение методом теории возмущений, который в силу нильпотентности Λ дает не приближенное, а точное решение.

Выберем систему координат так, чтобы невозмущенное решение лежало в плоскости

$$\gamma = \gamma_0 = \frac{\pi}{2},$$

тогда уравнения для нулевого и первого приближений функций R и γ примут вид

$$\begin{aligned} R_0'' + (1 - \rho^2) R_0 &= \frac{ekQ K_1}{K_2^2}, \quad R_1'' + (1 - \rho^2) R_1 = -\frac{2ekQ}{K_2^2} R_0, \\ \gamma_0 &= \frac{\pi}{2}, \quad \gamma_1'' + \gamma_1 = 0, \end{aligned}$$

где $\rho = ekQ/K_2$. Легко видно, что возможны три варианта решения, отвечающие случаям $\rho < 1$, $\rho > 1$ и $\rho = 1$.

Опуская простые, но громоздкие вычисления, приведем окончательный результат.

Для случая $\rho < 1$ траектория имеет вид

$$\begin{aligned} r &= P \left[1 + D_0 \cos \omega \alpha_0 + \Lambda ((M + H) \cos \omega \alpha_0 - H) \right]^{-1}, \\ \gamma &= \frac{\pi}{2} + \Lambda A \cos \alpha_0, \end{aligned} \quad (8)$$

где D_0, A – постоянные интегрирования, переменная α связана с переменной α_0 соотношением $\alpha = \alpha_0 - \Lambda(B/\omega)\alpha_0$ и введены вспомогательные постоянные

$$\omega = \sqrt{1 - \rho^2}, \quad P = \frac{K_2 \omega^2}{K_1 \rho}, \quad H = \frac{2}{K_2} \frac{\rho}{\omega^2}, \quad B = \frac{1}{K_2} \frac{\rho}{\omega}, \quad M = \frac{B}{\omega} \frac{(D_0 + 1)^2}{D_0}.$$

В случае $\rho > 1$ траектория имеет вид

$$r = P[-1 + D_0 \operatorname{ch} \omega \alpha_0 + \Lambda((M + H) \operatorname{ch} \omega \alpha_0 - H)]^{-1},$$

$$\gamma = \frac{\pi}{2} + \Lambda A \cos \alpha_0,$$

где D_0, A – постоянные интегрирования, переменная α связана с переменной α_0 соотношением $\alpha = \alpha_0 + \Lambda(B/\omega)\alpha_0$ и введены постоянные

$$\omega = \sqrt{\rho^2 - 1}, \quad P = \frac{K_2 \omega^2}{K_1 \rho}, \quad H = \frac{2}{K_2} \frac{\rho}{\omega^2}, \quad B = \frac{1}{K_2} \frac{\rho}{\omega}, \quad M = \frac{B}{\omega} \frac{(D_0 - 1)^2}{D_0}.$$

В случае $\rho = 1$ траектория имеет вид

$$R = \frac{K_1}{2K_2} \alpha^2 + C_1 \alpha + C_2 + \Lambda \left[-\frac{1}{K_2} \left(\frac{K_1}{12K_2} \alpha^4 + \frac{C_1}{3} \alpha^3 + C_2 \alpha^2 \right) + C_3 \alpha + C_4 \right],$$

$$\gamma = \frac{\pi}{2} + \Lambda A \cos \alpha_0,$$

где $R = 1/r$, а C_1, C_2, C_3, C_4, A – постоянные интегрирования.

Решение получено над алгеброй Грассмана. Чтобы перейти от грассмановых чисел к действительным, воспользуемся “процедурой усреднения” [6], которая применительно к нашему случаю сводится к отбрасыванию нечетных чисел и замене четных чисел действительными. Таким образом, можно считать в этих решениях величину Λ действительным числом.

Как видно из уравнений (3) и полученных решений, наличие спина приводит к тому, что движение становится трехмерным (в отличие от бесспинового случая [2]) и характер изменения радиальной переменной r со временем более сложен из-за наличия в знаменателе добавки с множителем Λ .

Рис. 1

Рассмотрим более подробно случай $\rho < 1$. Для финитного движения должно выполняться условие

$$-\frac{1+D_0}{M} < \Lambda < \frac{1-D_0}{M+2H}. \quad (9)$$

Траектория движения в этом случае лежит внутри замкнутой поверхности, показанной на рис. 1 и представляющей собой поверхность вращения заштрихованного сегмента относительно оси z . Экстремальные значения радиуса r следующие:

$$r_a = \frac{P}{1+D_0+\Lambda M}, \quad r_b = \frac{P}{1-D_0-\Lambda(M+2H)}. \quad (10)$$

При $-(1+D_0)/M < \Lambda < -D_0/(M+H)$ минимальный радиус $r_{\min} = r_b$, максимальный — $r_{\max} = r_a$. При $-D_0/(M+H) < \Lambda < (1-D_0)/(M+2H)$ минимальный радиус $r_{\min} = r_a$, максимальный — $r_{\max} = r_b$.

Рис. 2

При $\Lambda = -D_0/(M+H)$ радиус постоянен ($r_a = r_b$), траектория частицы (рис. 2) лежит на сфере радиуса

$$r = \frac{(M+H)P}{M+H+HD_0}.$$

Минимальное и максимальное отклонения по полярному углу γ равны соответственно

$$\gamma_{\min} = \frac{\pi}{2} - |\Lambda A|, \quad \gamma_{\max} = \frac{\pi}{2} + |\Lambda A|.$$

Для инфинитного движения при том же условии $\rho < 1$ значение Λ лежит вне интервала (9). Пример траектории показан на рис. 3. Углы α_0 , при которых траектория уходит на бесконечность, определяются величиной

$$\alpha_0^* = \frac{1}{\omega} \arccos\left(\frac{\Lambda H - 1}{\Lambda(M+H) + D_0}\right).$$

Если $\Lambda > (1-D_0)/(M+2H)$, то $\alpha_0 \in [-\alpha_0^*, \alpha_0^*]$, $r_{\min} = r_a$. Если $\Lambda < -(1+D_0)/M$, то $\alpha_0 \in [\alpha_0^*, 2\pi/\omega - \alpha_0^*]$, $r_{\min} = r_b$ (см. (10)).

Рис. 3

В заключение приведем некоторые соображения о статусе полученных решений. Классические уравнения БМТ получены в рамках обычной механики, которая, как известно [1], не является корректным классическим пределом для квантово-механических фермионных систем. Псевдоклассическая механика наиболее точно моделирует на классическом уровне поведение ферми-систем, и ее использование для описания поведения электрона во внешнем электромагнитном поле представляется наиболее логичным. Как известно, классические уравнения БМТ обычно не допускают точных решений. Грасмановы аналоги уравнений БМТ, получающиеся в рамках псевдоклассической механики, более удобны для решения в силу существования нильпотентных параметров. Полученные псевдоклассические решения легко интерпретируются в терминах обычных вещественных чисел с помощью “процедуры усреднения” [6]. Все это позволяет надеяться, что полученные в статье решения и примененные для этого методы можно использовать для изучения движения электрона не только в полях одиночных атомных ядер, но и в кристаллах (задачи каналирования и т. д.).

Список литературы

- [1] *P. G. O. Freund*. Introduction to supersymmetry. Berlin: Springer-Verlag, 1986.
- [2] *В. В. Батыгин, И. Н. Топтыгин*. Сборник задач по электродинамике. М.: Наука, 1970.
- [3] *V. Bargmann, L. Michel, V. L. Telegdi*. Phys. Rev. Lett. 1959. V. 2. P. 435.
- [4] *F. A. Berezin, M. S. Marinov*. Ann. Phys. 1977. V. 104. P. 336.
- [5] *F. Ravndal*. Phys. Rev. D. 1980. V. 21. P. 2832.
- [6] *Ю. Р. Мусин*. Изв. вузов. Физика. 1991. Т. 34. № 7. С. 5.

Поступила в редакцию 22.III.1999 г.,
после доработки 24.VIII.1999 г.