Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ж. И. Абдуллаев, Существенный спектр оператора Шредингера одной системы четырех частиц на решетке, *ТМФ*, 2000, том 123, номер 1, 81–87

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf587>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 08:32:20

СУЩЕСТВЕННЫЙ СПЕКТР ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА ОДНОЙ СИСТЕМЫ ЧЕТЫРЕХ ЧАСТИЦ НА РЕШЕТКЕ

Рассматривается оператор энергии одной системы четырех частиц на решетке, в которой взаимодействуют только две пары частиц. Показано существование четырех взаимно ортогональных подпространств, инвариантных относительно оператора энергии и исчерпывающих все пространство. Найден спектр оператора энергии, отвечающего этим инвариантным подпространствам. Изучено место расположения существенного спектра в зависимости от парного взаимодействия и установлено отсутствие связанных состояний этого оператора.

1. ВВЕДЕНИЕ

Спектральные свойства многочастичных операторов Шредингера на евклидовом пространстве достаточно хорошо изучены [1–3]. В частности, установлена конечность или бесконечность числа собственных значений вне существенного спектра этого оператора. При доказательстве конечности или бесконечности дискретного спектра решающим является получение для резольвенты трехчастичного оператора Шредингера фредгольмовской системы интегральных уравнений типа уравнений Фаддеева или уравнений Вайнберга [1–3]. Для резольвенты гамильтониана системы четырех квантовых частиц на евклидовом пространстве фредгольмовская система интегральных уравнений типа Фаддеева получена Фаддеевым и Якубовским [2, 4]. Компактное интегральное уравнение типа Фаддеева для резольвенты гамильтониана системы трех и четырех квантовых частиц на решетке получено в работах [5–8].

В данной статье описан оператор энергии одной системы четырех частиц на решетке как ограниченный самосопряженный оператор (дискретный оператор Шредингера – ДОШ), действующий в гильбертовом пространстве. Показано существование инвариантных подпространств $\mathcal{J}_0, \mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3$ относительно ДОШ, исчерпывающих все пространство. Найден спектр оператора Шредингера, отвечающего этим инвариантным подпространствам. Изучено место расположения существенного спектра в зависимости

* Самаркандский государственный университет, Самарканд, Республика Узбекистан

от двухчастичных взаимодействий и установлено отсутствие собственных значений вне существенного спектра.

2. ПОСТРОЕНИЕ ГАМИЛЬТониАНА

Пусть Z^ν – ν -мерная решетка, $l_2((Z^\nu)^4)$ – гильбертово пространство квадратично-суммируемых функций, определенных на $(Z^\nu)^4$, $l_2^{ss}((Z^\nu)^4)$ – подпространство, состоящее из функций $\psi(n_1, n_2, n_3, n_4)$, симметричных относительно перестановки переменных n_1, n_2 и n_3, n_4 , т.е.

$$\psi(n_1, n_2, n_3, n_4) = \psi(n_2, n_1, n_3, n_4) = \psi(n_1, n_2, n_4, n_3).$$

Рассмотрим оператор энергии (оператор Шредингера) системы четырех квантовых частиц на решетке Z^ν . В системе существует только два контактных взаимодействия: первая частица взаимодействует со второй, а третья – с четвертой.

В координатном представлении оператор Шредингера этой системы действует в гильбертовом пространстве $l_2^{ss}((Z^\nu)^4)$ по формуле

$$(F_\mu \phi)(n_1, n_2, n_3, n_4) = \sum_{s \in Z^\nu} \hat{\varepsilon}(s) [\phi(n_1 + s, n_2, n_3, n_4) + \phi(n_1, n_2 + s, n_3, n_4) + \\ + \phi(n_1, n_2, n_3 + s, n_4) + \phi(n_1, n_2, n_3, n_4 + s)] - \mu [\delta_{n_1 n_2} + \delta_{n_3 n_4}] \phi(n_1, n_2, n_3, n_4).$$

Здесь $\hat{\varepsilon}(s)$, $s = (s_1, s_2, \dots, s_\nu) \in Z^\nu$, – вещественнозначная функция, определенная на решетке Z^ν , зависящая только от $|s_1|, |s_2|, \dots, |s_\nu|$ и удовлетворяющая неравенству $|\hat{\varepsilon}(s)| \leq C \exp(-a|s|)$ для некоторых чисел $a > 0$, $C > 0$, где $|s| = |s_1| + |s_2| + \dots + |s_\nu|$; $\mu > 0$ – энергия взаимодействия двух частиц, δ_{nm} – символ Кронекера.

Оператор F_μ , представляющий большой интерес, возникает при исследовании гамильтониана четырех бозонов, взаимодействующих с помощью парных контактных потенциалов притяжения [8].

Оператор F_μ коммутирует с группой сдвига $\tilde{U}_s^4: l_2^{ss}((Z^\nu)^4) \rightarrow l_2^{ss}((Z^\nu)^4)$, где

$$(\tilde{U}_s^4 \phi)(n_1, n_2, n_3, n_4) = \phi(n_1 + s, n_2 + s, n_3 + s, n_4 + s), \quad s \in Z^\nu.$$

Пусть T^ν – ν -мерный тор, $L_2((T^\nu)^4)$ – гильбертово пространство всех квадратично-интегрируемых функций, определенных на $(T^\nu)^4$. $L_2^{ss}((T^\nu)^4)$ – подпространство пространства $L_2((T^\nu)^4)$, состоящее из функций $f(k_1, k_2, k_3, k_4)$, симметричных относительно перестановки переменных k_1, k_2 и k_3, k_4 . В импульсном представлении оператор Шредингера системы действует в $L_2^{ss}((T^\nu)^4)$ по формуле

$$F_\mu f = F_0 f + [V_{12} + V_{34}]f, \quad f \in L_2^{ss}((T^\nu)^4).$$

Здесь

$$(F_0 f)(k_1, k_2, k_3, k_4) = \sum_{i=1}^4 \varepsilon(k_i) f(k_1, k_2, k_3, k_4),$$

где

$$\varepsilon(k) = \sum_{s \in Z^\nu} \hat{\varepsilon}(s) \exp(i(k, s))$$

– преобразование Фурье функции $\hat{\varepsilon}$, $(k, s) = \sum_{i=1}^\nu k_i s_i$ – скалярное произведение векторов $k \in T^\nu$ и $s \in Z^\nu$. Из свойств функции $\hat{\varepsilon}$ следует, что функция ε является аналитической в некоторой комплексной окрестности тора T^ν и для любого k удовлетворяет условию $\varepsilon(-k) = \varepsilon(k)$. V_{12}, V_{34} – частично-интегральные операторы с обобщенным ядром, например

$$(V_{12}f)(k_1, k_2, k_3, k_4) = \int_{(T^\nu)^2} \delta(k_3 + k_4 - k'_3 - k'_4) f(k_1, k_2, k'_3, k'_4) dk'_3 dk'_4.$$

На торе T^ν выбрана единичная мера, т.е. $\int_{T^\nu} dk = 1$.

После преобразования Фурье оператор сдвига $\tilde{U}_s^4$, $s \in Z^\nu$, переходит в оператор $U_s^4: L_2^{ss}((T^\nu)^4) \rightarrow L_2^{ss}((T^\nu)^4)$, определенный формулой

$$(U_s^4 f)(k_1, k_2, k_3, k_4) = \exp\{-i(s, k_1 + k_2 + k_3 + k_4)\} f(k_1, k_2, k_3, k_4).$$

Пусть $N = k_1 + k_2 + k_3 + k_4$ – полный квазиимпульс системы четырех частиц и $\Gamma_N = \{(k_1, k_2, k_3, k_4) \in (T^\nu)^4 : k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = N\}$ – многообразие размерности 3ν . Обозначим через $L_2^{ss}(\Gamma_N)$ гильбертово пространство всех квадратично-интегрируемых функций на Γ_N , симметричных относительно переменных k_1, k_2 и k_3, k_4 . Если в качестве координат на многообразии Γ_N взять переменные $k = k_1 + k_2$, $p = k_2$, $q = k_3$, то элементы пространства $f \in L_2^{ss}(\Gamma_N)$ удовлетворяют условиям

$$f(k, p, q) = f(k, k - p, q) = f(k, p, N - k - q).$$

Пространство $L_2^{ss}((T^\nu)^4)$ представляется в виде

$$L_2^{ss}((T^\nu)^4) = \int_{T^\nu} \oplus L_2^{ss}(\Gamma_N) dN.$$

Оператор F_μ коммутирует с группой $\{U_s^4, s \in Z^\nu\}$, поэтому его можно представить в виде следующего прямого интеграла:

$$F_\mu = \int_{T^\nu} \oplus F_\mu(N) dN,$$

где ограниченный самосопряженный оператор $F_\mu(N)$ действует в гильбертовом пространстве $L_2^{ss}(\Gamma_N)$ по формуле

$$(F_\mu(N)f)(k, p, q) = \varepsilon_N(k, p, q) f(k, p, q) - \mu \int [\varepsilon(k, p, s) + \varepsilon(k, s, q)] ds.$$

Здесь $\varepsilon_N(k, p, q) = \varepsilon(k - p) + \varepsilon(p) + \varepsilon(q) + \varepsilon(N - k - q)$.

Легко проверить, что оператор $F_\mu(N)$ коммутирует с любым оператором $(u_s f)(k, p, q) = e^{i(k, s)} f(k, p, q)$, $s \in Z^\nu$, поэтому оператор $F_\mu(N)$ разлагается на прямой операторный интеграл [1]

$$F_\mu(N) = \int \oplus F_\mu(N, k) dk, \quad (1)$$

где ограниченный самосопряженный оператор $F_\mu(N, k)$ действует в гильбертовом пространстве $\tilde{L}_2((T^\nu)^2)$ по формуле

$$F_\mu(N, k) f(p, q) = [\varepsilon_k(p) + \varepsilon_{N-k}(q)] f(p, q) - \mu \int [f(p, s) + f(s, q)] ds. \quad (2)$$

Здесь $\varepsilon_k(p) = \varepsilon(k - p) + \varepsilon(p)$. Элементы f пространства $\tilde{L}_2((T^\nu)^2)$ при каждом фиксированном $k \in T^\nu$ удовлетворяют условиям

$$f(p, q) = f(k - p, q) = f(p, N - k - q).$$

3. ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Из формулы (2) следует, что оператор $F_\mu(N, k)$ представляется в виде тензорного произведения

$$F_\mu(N, k) = h_\mu(k) \otimes I + I \otimes h_\mu(N - k). \quad (3)$$

Здесь $h_\mu(k): \tilde{L}_2(T^\nu) \rightarrow \tilde{L}_2(T^\nu)$ — двухчастичный оператор Шредингера, определяемый по формуле [7]

$$(h_\mu(k)f)(p) = \varepsilon_k(p) f(p) - \mu \int_{T^\nu} f(s) ds.$$

Здесь $\tilde{L}_2(T^\nu)$ — подпространство, состоящее из функций $f \in L_2(T^\nu)$, удовлетворяющих условию $f(p) = f(k - p)$, I — единичный оператор в $\tilde{L}_2(T^\nu)$.

ТЕОРЕМА 1. *Справедливо равенство*

$$\sigma(F_\mu(N, k)) = \sigma(h_\mu(k)) + \sigma(h_\mu(N - k)). \quad (4)$$

Здесь сумма $A + B$ понимается в смысле $A + B = \{z = \lambda + \mu : \lambda \in A, \mu \in B\}$.

Доказательство теоремы следует из представления (3) оператора $F_\mu(N, k)$ и теоремы о спектре тензорных произведений операторов [1].

Приведем некоторые факты из работы [9]. Обозначим через $m(k)$ и $M(k)$ соответственно минимальное и максимальное значения функции $\varepsilon_k(p)$, т.е. $m(k) = \min_p \varepsilon_k(p)$, $M(k) = \max_p \varepsilon_k(p)$.

Для любого $z \in C \setminus [m(k), M(k)]$ обозначим через $D(k, z)$ функцию

$$D(k, z) = \int (\varepsilon_k(q) - z)^{-1} dq.$$

Для каждого $\mu > 0$ обозначим через $G_\mu \subset T^\nu$ множество $\{k \in T^\nu : D(k, m(k)) > 1/\mu\}$. Имеет место следующая теорема [9].

ТЕОРЕМА 2. Для любого $k \in G_\mu$ оператор $h_\mu(k)$ имеет единственное простое собственное значение $z_\mu(k) < m(k)$, и ему соответствует собственная функция $f_k(p) = (\varepsilon_k(p) - z_\mu(k))^{-1}$ и $\sigma_{\text{ess}}(h_\mu(k)) = [m(k), M(k)]$.

ЛЕММА. Если

$$\varepsilon(p) = \sum_{i=1}^{\nu} (1 - \cos p_i),$$

то собственное значение $z_\mu(k) = z_\mu(k_1, k_2, \dots, k_\nu)$, $k_i \in [-\pi, \pi]$, $i = \overline{1, \nu}$, симметрично относительно перестановки любых двух переменных k_i и k_j , четно по каждой переменной $k_i \in [-\pi, \pi]$ и строго возрастает по k_i , $i = \overline{1, \nu}$, на отрезке $[0, \pi]$. При этом имеют место равенства

$$\min_k z_\mu(k) = z_\mu(0), \quad \max_k z_\mu(k) = z_\mu(\pi) = 2\nu - \mu.$$

Пусть L_k – собственное подпространство, натянутое на собственную функцию $f_k(p)$, $L_k^\perp$ – его ортогональное дополнение. Сужение $h_\mu^\perp(k) = h_\mu(k)|_{L_k^\perp}$ оператора $h_\mu(k)$ на подпространство $L_k^\perp$ унитарно-эквивалентно оператору умножения на функцию $\varepsilon_k(p)$.

Из представления (3) и теоремы 2 следует, что существенный спектр оператора $F_\mu(N, k)$ состоит из объединения областей значений трех функций $\varepsilon_k(p) + \varepsilon_{N-k}(q) = \varepsilon_N(k, p, q)$, $z_\mu(k) + \varepsilon_{N-k}(q)$, $z_\mu(N-k) + \varepsilon_k(p)$, а дискретный спектр состоит из одной точки $e_{\mu, N}(k) = z_\mu(k) + z_\mu(N-k)$. Число $e_{\mu, N}(k)$ лежит левее существенного спектра $\sigma_{\text{ess}}(F_\mu(N, k))$ и является простым собственным значением оператора $F_\mu(N, k)$. Ему соответствует собственная функция $f_k(p)f_{N-k}(q)$, где $f_k(p)$ – собственная функция двухчастичного оператора $h_\mu(k)$, отвечающая простому собственному значению $z_\mu(k)$.

Разложение $\tilde{L}_2(T^\nu) = L_k^\perp \oplus L_k$ порождает разложение

$$\tilde{L}_2((T^\nu)^2) = \mathfrak{I}_0(k) \oplus \mathfrak{I}_1(k) \oplus \mathfrak{I}_2(k) \oplus \mathfrak{I}_3(k),$$

где

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_0(k) &= L_k^\perp \otimes L_{N-k}^\perp, & \mathfrak{I}_1(k) &= L_k \otimes L_{N-k}^\perp, \\ \mathfrak{I}_2(k) &= L_k^\perp \otimes L_{N-k}, & \mathfrak{I}_3(k) &= L_k \otimes L_{N-k}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 3. Подпространства $\mathfrak{I}_0(k)$, $\mathfrak{I}_1(k)$, $\mathfrak{I}_2(k)$, $\mathfrak{I}_3(k)$ инвариантны относительно оператора $F_\mu(N, k)$. При этом:

- а) пространство $\mathfrak{I}_3(k) = \{cf_k(p)f_{N-k}(q)\}$ одномерно и оператор $F_\mu(N, k)$ действует в нем как оператор умножения на число $e_{\mu, N}(k) = z_\mu(k) + z_\mu(N-k)$;
- б) сужение $F_\mu^{(0)}(N, k)$ оператора $F_\mu(N, k)$ в подпространстве $\mathfrak{I}_0(k)$ унитарно-эквивалентно невозмущенному оператору $F_0(N, k)$;
- в) сужение $F_\mu^{(i)}(N, k)$ оператора $F_\mu(N, k)$ в подпространстве $\mathfrak{I}_i(k)$, $i = 1, 2$, унитарно-эквивалентно соответственно оператору умножения $z_\mu(k) + \varepsilon_{N-k}(q)$ и $z_\mu(N-k) + \varepsilon_k(p)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение “а” теоремы непосредственно проверяется. Утверждения “б” и “в” следуют из унитарной эквивалентности $h_\mu^\perp(k)$ оператору умножения на функцию $\varepsilon_k(p)$ в подпространстве $L_k^\perp$ и представления (3) для $F_\mu(N, k)$.

Пусть

$$\mathfrak{I}_i = \int \oplus \mathfrak{I}_i(k) dk, \quad F_\mu^{(i)}(N) = \int \oplus F_\mu^{(i)}(N, k) dk, \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

По построению $\mathfrak{I}_0 \oplus \mathfrak{I}_1 \oplus \mathfrak{I}_2 \oplus \mathfrak{I}_3 = L_2^{ss}(\Gamma_N)$. Данные подпространства попарно ортогональны и инвариантны относительно оператора $F_\mu(N)$.

Обозначим

$$\begin{aligned} J_0(N) &= \text{Im } \varepsilon_N, \\ J_1(\mu, N) &= \text{Im} [z_\mu(k) + \varepsilon_{N-k}(q)], \\ J_2(\mu, N) &= \text{Im} [z_\mu(N-k) + \varepsilon_k(p)], \\ J_3(\mu, N) &= \text{Im} [z_\mu(k) + z_\mu(N-k)], \end{aligned}$$

где $\text{Im } f$ — область значений функции f . Функция $z_\mu(k) + \varepsilon_{N-k}(q)$ понимается как функция двух переменных $k \in G_\mu$, $q \in T^\nu$, а функция $z_\mu(k) + z_\mu(N-k)$ определена только для тех значений $k \in G_\mu$, при которых $N-k \in G_\mu$.

При помощи замены $N-k = k'$ легко убедиться, что отрезки $J_1(\mu, N)$ и $J_2(\mu, N)$ совпадают.

Из теоремы 3 и разложения (1) вытекает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. В пространстве $\mathfrak{I}_3$ оператор $F_\mu(N)$ действует как оператор умножения на функцию $e_{\mu, N}(k) = z_\mu(k) + z_\mu(N-k)$. Спектр оператора $F_\mu^{(i)}(N)$ совпадает с отрезком $J_i(\mu, N)$, $i = 0, 1, 2, 3$, т.е. $\sigma(F_\mu^{(i)}(N)) = J_i(\mu, N)$, $i = 0, 1, 2, 3$.

СЛЕДСТВИЕ. Дискретный спектр оператора $F_\mu(N)$ отсутствует, т.е. $\sigma(F_\mu(N)) = \sigma_{\text{ess}}(F_\mu(N))$.

Изучим место расположения спектра оператора $F_\mu(N)$ в случае $\nu = 3$, $N = 0$,

$$\varepsilon(p) = \sum_{i=1}^3 (1 - \cos p_i).$$

Заметим, что область значений функции

$$\varepsilon_0(k, p, q) = \sum_{i=1}^3 [4 - \cos p_i - \cos q_i - \cos(k_i - p_i) - \cos(0 - k_i - q_i)]$$

совпадает с отрезком $[0, 24] = J_0$. Действительно, минимум функции ε_0 достигается в единственной точке $k_i = p_i = q_i = 0$, $i = 1, 2, 3$, и $\varepsilon_0(0, 0, 0) = 0$, а максимум достигается в точке $k_i = 2\pi$, $p_i = q_i = \pi$, $i = 1, 2, 3$, и $\varepsilon_0(2\pi, \pi, \pi) = \max_{k, p, q} \varepsilon_0(k, p, q) = 24$.

Из монотонности функции z_μ и явного вида функции $\varepsilon(p)$ следует, что

$$\operatorname{Im}[z_\mu(k) + \varepsilon_{0-k}(q)] = J_1(\mu, 0) = J_2(\mu, 0) = [z_\mu(0), \max_k \{z_\mu(k) + M(k)\}].$$

Из неравенства $\max_k [z_\mu(k) + M(k)] < 24$ следует, что $J_1(\mu, 0) \subset J_0$, если $z_\mu(0) \geq 0$. Последнее неравенство выполняется при

$$\mu \leq \mu_0 = 2 \left(\int (\varepsilon(p))^{-1} dp \right)^{-1}.$$

Для любого $\mu \in (0, \mu_0)$ имеем

$$J_3(\mu, 0) = [2z_\mu(0), 12 - 2\mu] \subset J_1(\mu, 0) \subset J_0.$$

При $\mu = \mu_0$ левые концы отрезков $J_i(\mu, 0)$, $i = 0, 1, 2, 3$, совпадают, они равны нулю. Это означает, что точки спектра, лежащие на отрезке $J_i(\mu, 0)$, $i = 1, 2, 3$, являются кратными. При $\mu > 6$ отрезки $J_3(\mu, 0)$ и J_0 не пересекаются. При больших значениях μ ($\mu > 18$) отрезки J_0 , $J_1(\mu, 0)$ и $J_3(\mu, 0)$ не пересекаются.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность Р.А. Минлосу и С.Н. Лакаеву за внимание и обсуждение полученных результатов.

Работа финансируется фондом ПФИ РУз.

Список литературы

- [1] *М. Рид, Б. Саймон.* Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов. М.: Мир, 1982.
- [2] *С.П. Меркурьев, Л.Д. Фаддеев.* Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц. М.: Наука, 1985.
- [3] *Х. Цикон, Р. Фрези, В. Кириш, Б. Саймон.* Операторы Шредингера с приложениями к квантовой механике и глобальной геометрии. М.: Мир, 1990.
- [4] *Э. Шмид, Х. Цигельман.* Проблемы трех тел в квантовой механике. М.: Наука, 1979.
- [5] *D. C. Mattis.* Rev. Mod. Phys. 1986. V. 58. № 2. P. 361–379.
- [6] *С.Н. Лакаев.* ТМФ. 1991. Т. 89. № 1. С. 94–104.
- [7] *С.Н. Лакаев.* Функц. анализ и его прилож. 1993. Т. 27. № 3. С. 15–28.
- [8] *С.Н. Лакаев, Ж.И. Абдуллаев.* Усп. матем. наук. 1998. Т. 53. № 3. С. 201–203.
- [9] *Ж.И. Абдуллаев, С.Н. Лакаев.* ТМФ. 1997. Т. 111. № 1. С. 94–108.

Поступила в редакцию 1.VII.1999 г.