Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. М. Мухамедов, Об алгебрах фон Неймана, соответствующих трансляционно-инвариантным гиббсовским состояниям модели Изинга на решетке Бете, *ТМФ*, 2000, том 123, номер 1, 88–93

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf588>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 17:43:32

ОБ АЛГЕБРАХ ФОН НЕЙМАНА,
СООТВЕТСТВУЮЩИХ
ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНЫМ
ГИББСОВСКИМ СОСТОЯНИЯМ
МОДЕЛИ ИЗИНГА НА РЕШЕТКЕ БЕТЕ

Рассматривается модель Изинга на решетке Бете порядка $k \geq 2$. Для экстремальных трансляционно-инвариантных гиббсовских состояний этой модели найдены связи между алгебрами фон Неймана, порожденными при ГНС-представлении этими состояниями. Показано, что эти алгебры могут иметь типы III_λ , $\lambda \in (0, 1)$, и III_1 .

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно [1, теорема 5.3.30], что при существовании фазового перехода в некоторой гамильтоновой системе любые два из экстремальных предельных гиббсовских состояний либо совпадают, либо дизъюнкты [2]. Поэтому естествен вопрос об алгебраической эквивалентности таких состояний, т.е. об изоморфизме алгебр фон Неймана, порожденных конструкцией Гельфанда–Наймарка–Сигала (ГНС) по таким состояниям. По-видимому, общий ответ на этот вопрос получить невозможно, но представляет интерес рассмотрение конкретных систем. Одной из них является модель Изинга, изучению которой посвящено много работ (см., например, [3–6]).

В статье [7] рассматривалась свободная решетчатая квантовая спиновая система с двумя состояниями в каждой точке, причем первое состояние занято с вероятностью p , а второе – с вероятностью $q = 1 - p$. Было показано, что соответствующая алгебра фон Неймана является фактором типа III_λ , где $\lambda = p/q$.

В работе [8] изучались марковские состояния на одномерной квантовой спиновой системе, порождаемые стохастическими матрицами. Было показано, что, как правило, эти состояния порождают фактор типа III_1 . Однако существуют и марковские состояния, которые порождают фактор типа III_λ . Заметим, что модулярные свойства таких состояний были изучены в работе [9].

*Институт математики им. В.И. Романовского АН РУз, Ташкент, Республика Узбекистан.
E-mail: root@im.tashkent.su

В данной статье рассматривается модель Изинга на решетке Бете порядка $k \geq 2$. Для экстремальных трансляционно-инвариантных гиббсовских состояний этой модели найдены связи между алгебрами фон Неймана, порожденными при ГНС-представлении такими состояниями. Показано, что эти алгебры могут иметь типы III_λ , $\lambda \in (0, 1)$, и III_1 .

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Решетка Бете $\mathcal{G}^k$ (или дерево Кэли в другой терминологии [10]) порядка $k \geq 1$ есть бесконечное дерево, т.е. граф без циклов, из каждой вершины которого выходят ровно $k + 1$ ребер. Пусть $\mathcal{G}^k = (V, \Lambda, i)$, где V – множество вершин $\mathcal{G}^k$, Λ – его множество ребер и i – функция инцидентности, сопоставляющая каждому ребру $l \in \Lambda$ его концевые точки $x, y \in V$. Если $i(l) = \{x, y\}$, то x и y называются *соседними вершинами*, и в этом случае мы будем писать, что $l = \langle x, y \rangle$. Расстояние $d(x, y)$, $x, y \in V$, на решетке Бете вводится формулой

$$d(x, y) = \min \{d \mid \exists x = x_0, x_1, \dots, x_{d-1}, x_d = y \in V \text{ такие, что пары } \langle x_0, x_1 \rangle, \dots, \langle x_{d-1}, x_d \rangle \text{ – ближайшие соседи}\}.$$

Для произвольной точки $x^0 \in V$ положим

$$\begin{aligned} W_n &= \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\}, \\ V_n &= \bigcup_{m=0}^n W_m = \{x \in V \mid d(x, x^0) \leq n\}, \\ L_n &= \{l = \langle x, y \rangle \in L \mid x, y \in V_n\}. \end{aligned}$$

В ферромагнитной модели Изинга на решетке Бете спинные переменные $\sigma(x)$, $x \in V$, принимают значения ± 1 и гамильтониан имеет вид

$$H(\sigma) = -J\beta \sum_{\langle x, y \rangle} \sigma(x)\sigma(y),$$

где суммирование ведется по всем парам ближайших соседей $\langle x, y \rangle$ и $J > 0$, $\beta > 0$.

Напомним некоторые факты из теории алгебр фон Неймана. Пусть $B(H)$ – алгебра всех ограниченных линейных операторов на гильбертовом пространстве H (над полем комплексных чисел).

Слабо (операторная) замкнутая *-подалгебра M в $B(H)$ называется *алгеброй фон Неймана*, если она содержит тождественный оператор $\mathbf{1}$. Алгебру фон Неймана называют *фактором*, если ее центр $Z(M) = \{x \in M \mid xy = yx, \forall y \in M\}$ тривиален, т.е. $Z(M) = \{\lambda \mathbf{1} \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$.

Алгебры фон Неймана разбиваются на классы I (I_n , $n < \infty$; I_∞), II (II_1 ; II_∞) и III.

Линейный функционал ω на M называется *положительным*, если $\omega(x^*x) \geq 0$ для всех $x \in M$. Положительный функционал ω на M с $\omega(\mathbf{1}) = 1$ называется *состоянием*.

Состояние ω называется *нормальным*, если для любой ограниченной возрастающей сети $\{x_\alpha\}$ положительных элементов из M выполнено условие $\omega(\sup_\alpha x_\alpha) = \sup_\alpha \omega(x_\alpha)$. Состояние ω называется *следом* (соответственно точным следом), если выполнено условие $\omega(xy) = \omega(yx)$ для всех $x, y \in M$ (соответственно $\omega(x^*x) = 0 \Rightarrow x = 0$).

Пусть M – фактор, ω – точное нормальное состояние на M и σ_t^ω – модулярная группа, ассоциированная с ω на M [2, определение 2.5.15]. Через $\Gamma(\sigma^\omega)$ обозначим спектр Конна модулярной группы σ_t^ω [11, определение 2.2.1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [11]. Фактор M имеет типы:

- 1) III_1 , если $\Gamma(\sigma^\omega) = R$;
- 2) III_λ , если $\Gamma(\sigma^\omega) = \{n \ln \lambda, n \in \mathbb{Z}\}$, $\lambda \in (0, 1)$;
- 3) III_0 , если $\Gamma(\sigma^\omega) = 0$.

Более подробно об алгебрах фон Неймана и модулярной теории операторных алгебр можно прочитать в книгах [12, 13].

3. ПОСТРОЕНИЕ ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНЫХ ГИББСОВСКИХ СОСТОЯНИЙ МОДЕЛИ ИЗИНГА

Рассмотрим C^* -алгебру $A = \bigotimes_{G^k} M_2(C)$, где $M_2(C)$ – алгебра матриц 2×2 над полем комплексных чисел C и $k \geq 2$. Легко видеть [14], что квантованный гамильтониан рассматриваемой модели Изинга имеет вид

$$H = - \sum_{\langle x, y \rangle} \Phi_{\langle x, y \rangle}, \quad \Phi_{\langle x, y \rangle} = \begin{pmatrix} \ln \frac{e^\alpha}{e^\alpha + e^{-\alpha}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ln \frac{e^{-\alpha}}{e^\alpha + e^{-\alpha}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ln \frac{e^{-\alpha}}{e^\alpha + e^{-\alpha}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ln \frac{e^\alpha}{e^\alpha + e^{-\alpha}} \end{pmatrix},$$

где $\alpha = J\beta$ и суммирование ведется по всем парам ближайших соседей $\langle x, y \rangle$. Обозначим

$$p_{11}^{(\alpha)} = \frac{e^\alpha}{e^\alpha + e^{-\alpha}}, \quad p_{12}^{(\alpha)} = \frac{e^{-\alpha}}{e^\alpha + e^{-\alpha}}, \quad p_{21}^{(\alpha)} = p_{12}^{(\alpha)}, \quad p_{22}^{(\alpha)} = p_{11}^{(\alpha)}.$$

Известно [1, п. 6.2.2], что гиббсовские состояния в конечном объеме V_n на алгебре $A(V_n) = \bigotimes_{x \in V_n} M_2(C)$ определяются следующим образом:

$$\omega_{V_n}(x) = \frac{\text{tr}(\exp\{-H(V_n) + H(V_n, \partial V_n)\}x)}{\text{tr}(\exp\{-H(V_n) + H(V_n, \partial V_n)\})}, \quad x \in A(V_n),$$

где

$$H(V_n) = - \sum_{\langle x, y \rangle \in L_n} \Phi_{\langle x, y \rangle}, \quad H(V_n, \partial V_n) = \sum_{x \in W_n} h_x \sigma_x^z, \quad \sigma_x^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$h_x \in R$ – вещественнозначная функция $x \in V$.

Из результатов статьи [5] следует, что предельные гиббсовские состояния для $\{\omega_{V_n}\}$ существуют, если функция h_x удовлетворяет некоторому условию согласования. Трансляционно-инвариантным состояниям [14] соответствует функция $\{h_x = h = \text{const}, x \in V\}$, где h удовлетворяет уравнению

$$h = k \operatorname{arcth}(\theta \operatorname{th} h), \quad \theta = \operatorname{th} \alpha.$$

При условии $1/k < \theta < 1$ существуют три различных решения $h = 0, \pm h_*$, $h_* > 0$ этого уравнения. В противном случае решение $h = 0$ единственно. Через $\omega_{\pm h_*}$ и ω_0 обозначим соответствующие трансляционно-инвариантные состояния. Из результатов [5, 15] вытекает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *При условии $k^{-1} < \theta < k^{-1/2}$ все три состояния ω_0 и $\omega_{\pm h_*}$ являются экстремальными.*

Далее будет рассматриваться случай, когда все три состояния являются экстремальными гиббсовскими состояниями на множестве всех предельных гиббсовских состояний.

4. АЛГЕБРЫ ФОН НЕЙМАНА, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ СОСТОЯНИЯМ $\omega_{\pm h_*}$ И ω_0 ПРИ ГНС-ПРЕДСТАВЛЕНИИ

В этом разделе определим типы алгебр фон Неймана $\pi_{\omega_\gamma}(A)^n$, $\gamma = 0, \pm h_*$, где π_{ω_γ} — ГНС-представления, ассоциированные с состояниями ω_γ ($\gamma = 0, \pm h_*$) [2, определение 2.3.18]. Из теоремы 1 и теоремы 5.3.30 в книге [1] вытекает, что состояния ω_γ , $\gamma = 0, \pm h_*$, взаимно дизъюнкты. В силу экстремальности этих состояний очевидно, что алгебры фон Неймана $\pi_{\omega_\gamma}(A)''$, $\gamma = 0, \pm h_*$, являются факторами. Так как состояние ω_0 марковское [16], то, рассуждая так же, как и в работе [8], получаем в силу равенств

$$\frac{p_{11}^{(\alpha)}}{p_{12}^{(\alpha)}} = \lambda^{-1}, \quad \frac{p_{11}^{(\alpha)}}{p_{21}^{(\alpha)}} = 1, \quad \frac{p_{12}^{(\alpha)}}{p_{22}^{(\alpha)}} = 1, \quad \frac{p_{21}^{(\alpha)}}{p_{22}^{(\alpha)}} = \lambda, \quad (1)$$

где $\lambda = e^{-2\alpha}$, что алгебра фон Неймана $\pi_{\omega_0}(A)''$ является фактором типа III_λ . Итак, справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. *Алгебра фон Неймана $\pi_{\omega_0}(A)''$ является фактором типа III_λ .*

Теперь рассмотрим состояние $\omega_{\pm h_*}$. Пусть $M_{\pm h_*}$ обозначают факторы $\pi_{\omega_{\pm h_*}}(A)''$ соответственно. Через $\sigma^{\pm h_*}$ обозначим модулярные группы, ассоциированные с состояниями $\omega_{\pm h_*}$, которые определяются на $M_{\pm h_*}$ соответственно следующим образом:

$$\sigma_t^\pm(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{it\tilde{H}(V_n)} x e^{-it\tilde{H}(V_n)}, \quad x \in M_{\pm h_*},$$

$$\tilde{H}(V_n) = -H(V_n) + H(V_n, \partial V_n).$$

Существование предела доказано в работе [1, теорема 6.2.4]. Через $M_{\pm h_*}^\sigma$ обозначаются централизаторы $\sigma^\pm$, определенные следующим образом:

$$M_{\pm h_*}^\sigma = \{x \in M_{\pm h_*} : \sigma_t^\pm(x) = x, \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Экстремальность состояний $\omega_{\pm h_*}$ позволяет, так же как в [8], доказать следующую лемму.

ЛЕММА. *Централизаторы $M_{\pm h_*}^\sigma$ являются факторами типа II_1 .*

ТЕОРЕМА 3. *Если существует целое число $p \in Z$ такое, что $e^{h_*} = \lambda^p$, где $\lambda = e^{-2\alpha}$, то алгебры фон Неймана $M_{\pm h_*}$ являются факторами типа III_λ , в противном случае – факторами типа III_1 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы имеем $Z(M_{\pm h_*}^\sigma) = C\mathbf{1}$. Согласно предложению 2.2.2 из [11] получим $\Gamma(\sigma^\pm) = \text{Sp}(\sigma^\pm)$, где $\text{Sp}(\sigma^\pm)$ – спектр Арвесона [11, 13]. Если положить

$$\sigma_t^{\pm, n} = e^{it\tilde{H}(V_n)} x e^{-it\tilde{H}(V_n)},$$

то

$$\text{Sp}(\sigma^{\pm, n}) = \text{Sp}(\tilde{H}(V_n)) - \text{Sp}(\tilde{H}(V_n)) \equiv \{\lambda - \mu : \lambda, \mu \in \text{Sp}(\tilde{H}(V_n))\}.$$

Из вида $H(V_n)$, $H(V_n, \partial V_n)$ и равенств (1) можно легко получить, что

$$\text{Sp}(\sigma^{\pm, n}) = \{m \ln \lambda + 2kh_*\}_{m=-q, k=-l}^{q, l}, \quad (2)$$

где q, l – числа, зависящие от n . Отсюда, если существует такое целое число $p \in Z$, в котором $e^{h_*} = \lambda^p$, из соотношения (2) вытекает, что

$$\text{Sp}(\sigma^\pm) = \{n \ln \lambda\}_{n \in Z}.$$

Следовательно, факторы $M_{\pm h_*}$ имеют тип III_λ . В противном случае имеем $\Gamma(\sigma^\pm) = R$, т.е. получаем, что $M_{\pm h_*}$ являются факторами типа III_1 . Теорема доказана.

Из единственности гиперфинитных факторов III_λ и III_1 в силу доказанной теоремы вытекает, что факторы M_{h_*} и M_{-h_*} изоморфны. При условии $e^{h_*} = \lambda^p$, $p \in Z$, факторы $M_0 = \pi_{\omega_0}(A)''$ и $M_{\pm h_*}$ также изоморфны. В противном случае факторы M_0 и $M_{\pm h_*}$ неизоморфны.

Список литературы

- [1] *O. Bratteli, D. Robinson.* Operator algebras and Quantum Statistical Mechanics. II. Berlin: Springer-Verlag, 1981.
- [2] *У. Брателли, Д. Робинсон.* Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. I. М.: Мир, 1982.
- [3] *Р. Л. Добрушин.* Теор. вероятн. и ее примен. 1968. Т. 13. № 2. С. 201–229.
- [4] *C. M. Series, Ya. G. Sinai.* Commun. Math. Phys. 1990. V. 128. P. 63–76.
- [5] *П. М. Блехер, Н. Н. Ганиходжаев.* Теор. вероятн. и ее примен. 1990. Т. 35. № 2. С. 220–230.
- [6] *Н. Н. Ганиходжаев, У. А. Розиков.* ТМФ. 1997. Т. 111. № 1. С. 109–117.
- [7] *R. Powers.* Ann. Math. 1967. V. 81. P. 138–171.
- [8] *N. N. Ganikhodjaev, F. M. Mukhamedov.* Methods Funct. Anal. Topol. 1998. V. 4. № 3. P. 33–38.
- [9] *В. Я. Голодец, Г. Н. Жолткевич.* ТМФ. 1983. Т. 56. № 1. С. 80–86.
- [10] *Р. Бэкстер.* Точно решаемые модели в статистической физике. М.: Мир, 1985.
- [11] *A. Connes.* Ann. Sci. Ec. Norm. Super. IV. Ser. 6. 1973. P. 133–252.
- [12] *S. Stratila, L. Zsido.* Lectures on von Neumann algebras. Bucuresti: Editura Academici & Abacus Press, 1979.
- [13] *S. Stratila.* Modular theory in operator algebras. Bucuresti: Abacus Press, 1981.
- [14] *Я. Г. Синай.* Теория фазовых переходов. Строгие результаты. М.: Наука, 1980.
- [15] *P. M. Bleher.* Commun. Math. Phys. 1990. V. 128. P. 411–419.
- [16] *Л. Аккарди.* Функ. анализ и его прилож. 1975. Т. 8. № 1. С. 1–8.

Поступила в редакцию 13.VII.1999 г.