Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Башкиров, А. Д. Суханов, Энтропия открытых квантовых систем и распределение Пуассона, *ТМФ*, 2000, том 123, номер 1, 107–115

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf590>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 14:51:03

ЭНТРОПИЯ ОТКРЫТЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА

Рассмотрена энтропия гармонического осциллятора и квантового поля Клейна–Гордона–Фока со статическим источником, находящихся в так называемом когерентном состоянии. В обоих случаях полученные выражения для энтропии совпадают с точностью до численного множителя с энтропией Бекенштейна–Хоукинга для черной дыры, точнее, для окружающего ее физического вакуума. Такое совпадение, наряду с известным свойством гравитационного поля обеспечивать декогеренцию помещенной в нее квантовой системы, позволяет предположить, что вакуум в окрестности черной дыры находится в когерентном состоянии.

1. ВВЕДЕНИЕ

Развитие квантовой теории поля в сильных гравитационных полях и теории квантовых компьютеров вызвало в последние годы пристальное внимание к проблемам, связанным с неопределенностью состояния открытых квантовых систем. Количественной характеристикой неопределенности состояния системы является энтропия.

Фон Нейман [1] ввел энтропию для квантовых систем в виде

$$S_N = -k_B \operatorname{Sp}(\rho \ln \rho). \quad (1)$$

С помощью представления, диагонализующего статистический оператор (матрицу плотности) ρ , энтропию можно выразить через вероятности

$$\langle n | \rho | n' \rangle = w_n \delta_{nn'} \quad (2)$$

в виде

$$S_N = -k_B \sum_n w_n \ln w_n, \quad (3)$$

где индекс n нумерует квантовые состояния системы.

При отличной от нуля температуре имеют место неравенства $0 \leq w_n \leq 1$. В этом случае равновесный статистический оператор системы, обеспечивающий максимальность энтропии фон Неймана при дополнительном условии фиксированного значения

* Институт динамики геосфер РАН, Москва, Россия. E-mail: abas@idg.chph.ras.ru

† Московский государственный университет, Москва, Россия

энергии, а также, возможно, и других параметров системы, описывается соответствующим квантовым ансамблем Гиббса [2]. При нулевой температуре система определенно оказывается в одном из всех возможных состояний $n = j$, так что $w_{n=j} = 1$, $w_{n \neq j} = 0$ и $S_N = 0$.

При этом контакт системы с окружающей средой (термостатом) учитывается лишь постольку, поскольку он обеспечивает задание термодинамических параметров системы (температуры, химических потенциалов и т.д.). В этом отношении можно сказать, что традиционная квантовая статистическая механика рассматривает квазизамкнутые системы.

Здесь следует отметить, что фон Нейман, вводя энтропию в виде (1), подчеркивает, что она представляет собой приближенную форму записи (с помощью формулы Стирлинга) энтропии Больцмана, выраженной через число квантовых состояний системы W_s .

По Больцману энтропия определяется как

$$S_B = k_B \ln W, \quad (4)$$

где W – общее число способов распределения N частиц по K ячейкам с N_1 частицами в первой из них, N_2 во второй и т.д.

Очевидно, что если число квантовых состояний полной системы W представляется в виде произведения $W_s \times W_t$, где W_s и W_t – числа разрешенных квантовых состояний системы и термостата, то энтропию фон Неймана полной системы (1) можно записать в виде суммы энтропий системы и термостата

$$\begin{aligned} S_{\text{tot}} &= S_s + S_t, & S_s &= k_B \ln W_s \simeq -k_B \text{Sp}(\rho_s \ln \rho_s), \\ S_t &= k_B \ln W_t \simeq -k_B \text{Sp}(\rho_t \ln \rho_t), \end{aligned} \quad (5)$$

где ρ_s и ρ_t – статистические операторы системы и термостата, которые получаются из полной матрицы плотности ρ взятием следа по переменным термостата или системы соответственно.

Взаимодействие квантовой системы с неклассическим (квантовым) окружением (термостатом) приводит к изменению энтропии не только термостата, но и самой системы. Основные кинетические уравнения для статистических операторов системы ρ_s и термостата ρ_t получаются путем свертывания уравнения Шредингера (или Лиувилля) для полной системы (система + термостат) по переменным термостата или системы соответственно, в результате чего как в уравнении для ρ_s , так и в уравнении для ρ_t появляется непотенциальное взаимодействие, приводящее к неунитарности эволюции $\rho_s(t)$ и $\rho_t(t)$.

В этом отношении можно говорить о непрерывном “процессе измерения” открытой системы, который производится термостатом и приводит к так называемой декогеренции ее состояния. Понятие декогеренции широко обсуждалось в последнее десятилетие (см., например, обзорную статью [3]) в контексте новой (“некопенгагенской”) интерпретации квантовой механики, в которой центральное место занимает процесс измерения, т.е. взаимодействие системы с окружением. В процессе этого взаимодействия подавляющее большинство состояний из гильбертова пространства состояний открытой квантовой системы оказывается неустойчивым, в результате чего произвольное состояние

системы становится суперпозицией “избранных состояний” за время декогеренции, которое для макроскопических систем на много порядков меньше любых других характерных времен. Тем самым производится отбор таких квантовых состояний системы, которые обеспечивают ее классическое описание.

Было высказано предположение [4] о связи между явлением декогеренции и когерентными состояниями (лингвистическая близость этих терминов не более чем случайное совпадение). Более того, в работе [4] было отмечено, что декогеренция может порождать когерентные состояния. Это утверждение было доказано [5] для частного случая системы квантовых гармонических осцилляторов, где попутно были приведены убедительные аргументы в его пользу для произвольных квантовых систем с квадратичным гамильтонианом. Важный результат в этой области получен в статье [6], где на основе анализа основного кинетического уравнения для открытой системы, взаимодействующей с термостатом, авторы выделили три режима декогеренции в зависимости от соотношения между собственной энергией системы E_s и энергией ее взаимодействия E_{st} с термостатом:

- 1) $E_s \gg E_{st}$,
- 2) $E_s \ll E_{st}$,
- 3) $E_s \sim E_{st}$.

В первом и втором режимах в качестве “избранных состояний” отбираются собственные состояния гамильтониана системы или гамильтониана взаимодействия соответственно, а в третьем режиме – когерентные состояния.

Последний, третий, режим наиболее характерен для реальных физических систем. В отличие от первого (адиабатического режима) он сопровождается возрастанием как энтропии открытой системы, так и энтропии термостата. Это возрастание связано с потерей информации о состояниях системы и термостата. Если первоначально полная замкнутая система находится в чистом состоянии (с нулевой энтропией), то имеет место [7–9] теорема о равенстве энтропий, порождаемых в системе и термостате $S_s(t) = S_t(t)$. Назовем ее теоремой взаимности энтропий. Поскольку при этом энтропия полной системы остается равной нулю, здесь имеет место настолько существенное отклонение от аддитивности энтропии, что энтропия полной системы теряет какой бы то ни было физический смысл.

В этой связи представляет интерес рассмотреть энтропию сложившихся когерентных состояний открытых квантовых систем как меру неопределенности числа собственных энергетических состояний, подчиняющихся, как известно, распределению Пуассона. Эта энтропия обусловлена неконтролируемостью взаимодействия системы с окружением, обеспечившим возникновение когерентного состояния системы. Подробнее на одном из наиболее известных примеров такого рода – гармоническом осцилляторе – мы остановимся в разделе 2.

В разделе 3 будет рассмотрена энтропия виртуальных возбуждений квантового поля, описываемого уравнением Клейна–Гордона–Фока, при наличии статического источника. Этот пример также представляет собой в основном методический интерес. Он позволяет с новых позиций подойти к реальным проблемам, связанным с открытыми квантовыми системами. Одной из этих проблем – энтропии черных дыр – посвящен раздел 4 статьи.

2. ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР

В рамках развиваемого в данной статье подхода квантовый гармонический осциллятор в когерентном состоянии можно рассматривать как открытую систему, поскольку он находится в постоянном взаимодействии с внешним силовым центром (например, ядром атома). Не исключено, что именно взаимодействие с внутренними степенями свободы силового центра может обеспечить такую модификацию уравнения Шредингера, что оно сможет описать декогеренцию гармонического осциллятора (как это удалось показать для частицы, движущейся в кристаллической решетке [10]) и переход его в когерентное состояние. Однако здесь мы ограничимся рассмотрением уже сложившегося когерентного состояния осциллятора как состояния, в котором соотношение неопределенностей $\delta p \delta q \geq \hbar/2$, связывающее среднеквадратичные флуктуации координаты и импульса, минимизируется до равенства [11, § 23, задача 3].

Гамильтониан рассматриваемой системы имеет вид

$$H = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2 q^2), \quad (6)$$

где p, q – операторы импульса и координаты соответственно, удовлетворяющие коммутационному соотношению $[q, p] = i\hbar$. Для обсуждения когерентных состояний удобнее ввести неэрмитовы операторы рождения и уничтожения, соответствующие амплитуде классического движения

$$a = \frac{m\omega q + ip}{(2m\hbar\omega)^{\frac{1}{2}}}, \quad a^\dagger = \frac{m\omega q - ip}{(2m\hbar\omega)^{\frac{1}{2}}}, \quad (7)$$

удовлетворяющие перестановочным соотношениям $[a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0$, $[a, a^\dagger] = 1$. Исходный гамильтониан осциллятора записывается с помощью этих операторов в виде

$$H = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right). \quad (8)$$

Рассмотрим собственное состояние оператора a :

$$a|d\rangle = \left(\frac{m\omega}{2\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} d|d\rangle. \quad (9)$$

Оно и является когерентным состоянием, обеспечивающим минимизацию соотношения неопределенностей [11].

Отметим, что здесь мы не обсуждаем условий, при которых гармонический осциллятор может оказаться в когерентном состоянии, а просто ограничиваемся констатацией наличия такого состояния как собственного состояния оператора a .

Разумеется, это состояние не является собственным состоянием гамильтониана H . Вес любого его собственного состояния $|n\rangle$ в минимизирующем пакете определяется распределением Пуассона

$$P(n) = e^{-\bar{n}_d} \frac{\bar{n}_d^n}{n!}, \quad (10)$$

где $\bar{n}_d = m\omega d^2/(2\hbar)$ – среднее число квантов в состоянии $|d\rangle$, остальные обозначения стандартные.

Число состояний для этого распределения Пуассона есть $W_{\text{osc}} = \exp \bar{n}_d$, откуда находим больцмановскую энтропию когерентного состояния гармонического осциллятора

$$S_{\text{osc}} = k_B \ln W_{\text{osc}} = k_B \bar{n}_d = k_B \frac{m\omega d^2}{2\hbar}. \quad (11)$$

Если ввести величину $A = \pi d^2$, то полученное выражение для энтропии можно представить в виде

$$S_{\text{osc}} = k_B \frac{A}{2\pi l_0^2}, \quad (12)$$

где $l_0 = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$ – амплитуда нулевых колебаний осциллятора.

Таким образом, даже для динамической квантовой системы, для которой термодинамическая температура $T = 0$, энтропия отлична от нуля. В данном случае это обусловлено тем, что в когерентном d -состоянии гармонического осциллятора вес собственных состояний гамильтониана H не является детерминированным, а определяется распределением Пуассона.

3. КВАНТОВОЕ ПОЛЕ КЛЕЙНА–ГОРДОНА–ФОКА СО СТАТИЧЕСКИМ ИСТОЧНИКОМ

В качестве открытой квантовой системы здесь рассматривается скалярное поле $\phi(\mathbf{r}, t)$, описываемое уравнением Клейна–Гордона–Фока с источником в правой части

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi(\mathbf{r}, t) = g \varrho(\mathbf{r}). \quad (13)$$

Плотность $\varrho(\mathbf{r})$ и интенсивность g источника считаются заданными и фиксированными. Такая постановка выглядит вполне естественной, если рассматривать эту задачу как чисто полевую, ограничиваясь анализом процессов, происходящих вне источника. С другой стороны, эту постановку можно принять как крайнюю идеализацию, при которой полностью опускается рассмотрение процессов, происходящих внутри источника как реальной протяженной физической системы одновременно с процессами в окружающем вакууме. Здесь, как и в предыдущем разделе, мы ограничимся предположением, что эти процессы обеспечивают формирование когерентного состояния поля $\phi(\mathbf{r}, t)$, и будем рассматривать поле в уже сложившемся когерентном состоянии.

Уравнение (13) подробно проанализировано в квантовой теории поля [12]. В частности, показано, что, если ввести неэрмитовы операторы $a_{\mathbf{k}}$ и $a_{\mathbf{k}}^\dagger$, аналогичные операторам (7), то когерентные состояния физического вакуума, заполненного виртуальными квантами поля, определяются как собственные состояния операторов $a_{\mathbf{k}}$.

Хорошо известное решение задачи о статическом источнике в уравнении Клейна–Гордона–Фока задает вероятность обнаружения любого наперед заданного числа квантов в термостате безотносительно к величине их импульсов. Эта вероятность описывается распределением Пуассона

$$P(n) = e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{n!}. \quad (14)$$

Число состояний для этого распределения

$$W_t = e^{\bar{n}}, \quad (15)$$

а энтропия Больцмана для системы с таким числом состояний имеет вид

$$S_t = k_B \ln W_t = k_B \bar{n}. \quad (16)$$

Для оценки величины $\bar{n}$ рассмотрим ожидаемое значение потенциала поля сферического источника с радиусом d , которое в основном состоянии можно представить в виде

$$\langle 0 | \phi(\mathbf{r}) | 0 \rangle_{r>d} = g \int d^3 r' \frac{\exp\left\{-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{\lambda_C}\right\}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \varrho(r'), \quad (17)$$

где $\lambda_C = \hbar/(mc)$ – комптоновский радиус.

Из (17) видно, что облако из виртуальных квантов поля обволакивает источник слоем толщиной λ_C , не зависящей от размера источника. Следовательно, среднее число квантов $\bar{n}$ должно быть пропорционально объему слоя $A\lambda_C$ (здесь $A = 4\pi d^2$ – площадь поверхности слоя и предполагается, что $d \gg \lambda_C$), проквантованному на элементы объема порядка λ_C^3 :

$$\bar{n} \sim \frac{A\lambda_C}{\lambda_C^3}. \quad (18)$$

Тогда энтропия (16) принимает вид

$$S_t \sim k_B \frac{A}{\lambda_C^2}. \quad (19)$$

Важной особенностью этого выражения является пропорциональность энтропии площади поверхности источника (ср. с выражением (12) для гармонического осциллятора). Такая зависимость отражает тот факт, что энтропия порождена стохастическими процессами, происходящими в термостате (вакууме) на границе с системой (источником), причем вклад самой системы в энтропию полной системы не учитывается при исходной постановке задачи.

4. ЭНТРОПИЯ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА

Нетрудно заметить, что такую же форму (19) имеет энтропия черной дыры

$$S_{\text{ВН}} = k_B \frac{A_{\text{ВН}}}{4\lambda_{\text{П}}^2}, \quad (20)$$

где $A_{\text{ВН}}$ – площадь горизонта черной дыры, $\lambda_{\text{П}} = (\hbar G/c^3)^{1/2}$ – планковская длина. Первоначально энтропия $S_{\text{ВН}}$ в виде (20) была получена Бекенштейном [13] и Хоукингом [14] из чисто термодинамических соображений, связанных с необходимостью удовлетворить первому и второму законам термодинамики, а затем были найдены аргументы в ее пользу с позиции теории информации при рассмотрении $S_{\text{ВН}}$ как “меры недоступности информации (для внешнего наблюдателя) о том, какая конкретная внутренняя конфигу-

рация черной дыры реализуется в данном состоянии” (соответствующем конкретным значениям массы, заряда и момента) [15].

При статистическо–механическом подходе, в котором энтропия определяется как средний логарифм матрицы плотности (1), пропорциональность энтропии площади поверхности черной дыры долгое время казалась парадоксальной. Существенный вклад в разрешение этого парадокса внесли работы [16–18], где учитывался вклад в $S_{\text{ВН}}$ только тех виртуальных квантово-механических мод, которые распространяются в непосредственной окрестности поверхности горизонта. Однако при отборе таких мод остается некий произвол, так что проблема обоснования выражения типа (20) методами статистической механики осталась, на наш взгляд, незавершенной, что подтверждается, в частности, непрекращающимся потоком работ, посвященных этой теме.

В этой связи стоит особо отметить недавно появившуюся обширную обзорную работу Бекенштейна [19], где в разделе с выразительным названием “Демистификация пропорциональности энтропии черной дыры ее поверхности” предлагается модельное квантование горизонта как составление его из лоскутов (или заплат) одинаковой площади $\alpha\lambda_{\text{П}}^2$. Каждый лоскут обеспечивает одну степень свободы горизонта, а для того чтобы они были независимы, при “пошиве” такого лоскутного горизонта отдельные лоскуты добавляются к нему по одному. Вследствие эквивалентности лоскутов каждый из них будет иметь одинаковое с другими число квантовых состояний, например κ . Тогда полное число квантовых состояний горизонта будет

$$W_{\text{hor}} = \kappa^{A_{\text{ВН}}/(\alpha\lambda_{\text{П}}^2)} \quad (21)$$

и статистическая (больцмановская) энтропия

$$S_{\text{ВН}} = k_{\text{В}} \ln W_{\text{hor}} = k_{\text{В}} \frac{\ln \kappa}{\alpha} \frac{A_{\text{ВН}}}{\lambda_{\text{П}}^2}. \quad (22)$$

Положив теперь

$$\alpha = 4 \ln \kappa, \quad (23)$$

Бекенштейн получает искомое термодинамическое выражение (20).

Здесь следует отметить одно обстоятельство, оставшееся не замеченным Бекенштейном: подстановка выражения (23) для α в исходную формулу (21) сразу дает пуассоновское выражение¹⁾ для полного числа состояний

$$W_{\text{hor}} = \exp \left\{ \frac{A_{\text{ВН}}}{4\lambda_{\text{П}}^2} \right\}, \quad (24)$$

откуда вытекает выражение (20) для энтропии черной дыры.

Таким образом, черная дыра выступает в роли статического источника, не дающего собственного вклада в энтропию системы, а лишь порождающего виртуальные возбуждения в окружающем вакууме в окрестности горизонта черной дыры. Но в отличие от рассмотренной выше задачи о квантовом поле со статическим источником, где мы условились пренебречь процессами, происходящими в самом источнике, здесь эти процессы

¹⁾ Действительно, $\kappa^{1/\ln \kappa} = e$, поскольку $\ln \kappa^{1/\ln \kappa} = \frac{1}{\ln \kappa} \ln \kappa = 1$.

действительно не дают вклада в наблюдаемую энтропию системы вследствие физической специфики черной дыры. Именно поэтому энтропия полной системы оказывается, как и в предыдущем примере со статическим источником, пропорциональной поверхности, а гравитационная специфика виртуальных возбуждений определяет лишь константу пропорциональности.

Кроме того, к настоящему времени установлено, что сильное гравитационное поле обеспечивает декогеренцию находящейся в нем системы [9, 20, 21]. Поэтому совершенно естественно ожидать, что в вакууме в окрестности черной дыры будет сформировано когерентное состояние, в котором распределение собственно-энергетических состояний будет иметь вид распределения Пуассона. Такая картина, по существу, совпадает с рассмотренной в предыдущем разделе задачей о статическом источнике в уравнении Клейна–Гордона–Фока.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проблема энтропии должна занимать одно из центральных мест в теории открытых квантовых систем, поскольку энтропия является количественной мерой неопределенности, порождаемой при контакте системы с окружением (при измерении). Тем не менее этой проблеме не уделяется должного внимания в работах по новой квантовой механике (например, в цитированном выше обзоре [3] понятие энтропии вообще не упоминается). Исключением является, пожалуй, лишь энтропия черных дыр, которая первоначально была введена для удовлетворения второго закона термодинамики, а затем уже потребовала микроскопического обоснования.

Объясняется это, на наш взгляд, сложностью вычисления роста энтропии в процессе декогеренции и формирования когерентных состояний, характерных для открытых квантовых систем. Поэтому здесь мы подошли к этой проблеме с другой стороны – произвели оценку энтропии известных когерентных состояний, не рассматривая кинетику их формирования. Для гармонического осциллятора и квантового поля со статическим источником энтропия когерентного состояния определяется распределением Пуассона собственных энергетических состояний в когерентном состоянии.

Для черной дыры нами обнаружено совпадение (с точностью до константы) энтропии черной дыры Бекенштейна–Хоукинга с энтропией когерентных состояний гармонического осциллятора и квантового поля со статическим источником. Вопрос о том, находится ли физический вакуум в окрестности черной дыры в когерентном состоянии, насколько нам известно, до настоящего времени не поднимался. В пользу положительного ответа на этот вопрос говорит как полученная нами интерпретация энтропии Бекенштейна–Хоукинга, так и установленная к настоящему времени связь между декогеренцией и когерентностью [4–6], а также свойство сильного гравитационного поля обеспечивать декогеренцию квантовой системы (в данном случае физического вакуума) [9, 20, 21].

Отличие от нуля энтропии открытых квантовых систем, возникающее в результате процесса декогеренции и формирования когерентного состояния, свидетельствует о необходимости развития термодинамического подхода к подобным системам [22]. Для частного случая черных дыр это уже хорошо осознано со времен первых работ Бекенштейна [13] и Хоукинга [14] на эту тему.

Благодарности. В заключение авторы пользуются возможностью поблагодарить своих коллег А. В. Витязева и Ю. Г. Рудого за плодотворные обсуждения данной работы.

Список литературы

- [1] *И. фон Нейман.* Математические основы квантовой механики. М.: Наука, 1964.
- [2] *Д. Н. Зубарев.* Неравновесная статистическая термодинамика. М.: Наука, 1971.
- [3] *М. Б. Менский.* УФН. 1998. Т. 168. № 9. С. 1017.
- [4] *W. H. Zurek, S. Habib, J. P. Paz.* Phys. Rev. Lett. 1993. V. 70. P. 1187.
- [5] *M. Tegmark, H. S. Shapiro.* Phys. Rev. E. 1994. V. 50. P. 2538.
- [6] *J. P. Paz, W. H. Zurek.* Quantum limit of decoherence: environment induces superselection of energy eigenstates. qu-ph/9811026.
- [7] *D. N. Page.* Phys. Rev. Lett. 1993. V. 71. P. 1291.
- [8] *H.-T. Elze.* Open quantum systems, entropy and chaos. qu-ph/9710063.
- [9] *B. S. Kay.* Entropy defined, entropy encrease and decoherence understood, and some black-hole puzzles solved. hep-th/9802172.
- [10] *M. Mensky, A. Konetchnyi, V. Namiot.* Phys. Lett. A. 1993. V. 177. P. 283.
- [11] *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.* Квантовая механика (нерелятивистская теория). М.: Наука, 1989.
- [12] *Э. Хенли, В. Турринг.* Элементарная квантовая теория поля. М.: ИЛ, 1963.
- [13] *J. D. Bekenstein.* Lett. Nuovo Cimento. 1972. V. 4. P. 737.
- [14] *S. W. Hawking.* Commun. Math. Phys. 1975. V. 43. P. 199.
- [15] *J. D. Bekenstein.* Phys. Rev. D. 1973. V. 7. P. 2333.
- [16] *V. Frolov, I. Novikov.* Phys. Rev. D. 1993. V. 48. P. 4545.
- [17] *V. Frolov.* Phys. Rev. Lett. 1995. V. 74. P. 3319.
- [18] *V. P. Frolov, D. V. Fursaev, A. I. Zelnikov.* Black hole entropy: thermodynamics, statistical mechanics and subtraction procedure. hep-th/9603175.
- [19] *J. D. Bekenstein.* Quantum black holes as atoms. gr-qc/9710076.
- [20] *S. W. Hawking.* Commun. Math. Phys. 1982. V. 87. P. 395.
- [21] *J. Ellis, S. Mohanty, D. V. Nanopoulos.* Phys. Lett. B. 1989. V. 221. P. 113.
- [22] *A. D. Sukhanov.* On the global interconnection between quantum dynamics and thermodynamics. In: Proceedings of the XI International Conference "Problems of Quantum Field Theory" (Dubna, 1998). Eds. B. M. Barbashov, G. V. Efimov, A. S. Efremov. Dubna: JINR, 1999. P. 232.

Поступила в редакцию 30.VII.1999 г.