Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Грац, А. А. Россихин, Электростатика на локально-плоском пространстве с коническими особенностями, *ТМФ*, 2000, том 123, номер 1, 150–162

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf593>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 14:43:48

ЭЛЕКТРОСТАТИКА НА ЛОКАЛЬНО-ПЛОСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ С КОНИЧЕСКИМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

Вычислен потенциал поля точечного источника на мультицентровом трехмерном пространстве-времени. Получены общие выражения, связывающие регуляризованные значения собственной энергии, силы и момента силы. Показано, что с ростом дефицита угла эффекты самодействия неограниченно растут, при этом увеличивается относительный вклад высших мультиполей. Полученные результаты обобщены на случай системы параллельных космических струн, одна из которых токнесущая. Рассмотрен случай струны конечной толщины.

1. ВВЕДЕНИЕ

Конические пространства привлекли к себе внимание в связи с гипотезой космических струн [1], однако вскоре выяснилось, что это не единственная физическая система, для описания которой они используются. Другие примеры можно найти в астрофизике [2], космологии [3], физике твердого тела [4] и теории сверхтекучей жидкости [5].

В наиболее простом из рассматриваемых в литературе случаев коническое пространство представляет собой прямое произведение $\mathcal{R}$ или $\mathcal{R}^2$ на локально-плоскую поверхность с набором конических особенностей и ассоциируется со статическим пространством-временем системы N точечных масс в случае трех [6] или системы параллельных космических струн в случае четырех [7] измерений. Тензор Римана такого пространства обращается в нуль всюду, за исключением мировых линий (поверхностей) конических дефектов, на которых его компоненты имеют δ -образные особенности [8]. В трехмерной эйнштейновской теории тензор Римана равен нулю всюду вне материи, поэтому пространство остается локально-плоским и тогда, когда особенности движутся. Есть основание считать [9], что и в четырехмерном случае неравенство нулю относительной скорости не нарушает локальной плоскостности мультиструнного пространства и влияние прямолинейных струн на классические и квантованные поля чисто топологическое.

* Московский государственный университет, Москва, Россия

Исследование топологических эффектов на локально-плоских конических пространствах привело к обнаружению целого ряда нетривиальных эффектов как на уровне квантовой [10, 11], так и классической [12–16] теорий. Однако почти во всех опубликованных до настоящего времени работах рассматривалось пространство-время одного конического дефекта. Это обусловлено тем, что в случае одной конической точки пространство-время обладает достаточным числом векторов Киллинга для разделения переменных в уравнении поля. При наличии же двух и более особенностей этого сделать не удается. Вместе с тем компьютерное моделирование процесса образования струнной сети во вселенной показывает [17], что в настоящее время в сфере хаббловского радиуса должно находиться порядка десяти прямолинейных космических струн. Аналогичная ситуация имеет место в физике конденсированного состояния.

Существует два подхода к изучению нелокальных эффектов на мультиконических пространствах. Один из них базируется на использовании методов теории возмущений [11], другой – на существовании точных решений в ситуациях, которые являются эффективно двумерными [13–15]. Данная работа продолжает начатое в статьях [13–15] исследование эффекта самодействия на примере моделей, допускающих точное решение.

В работе используются метрика с сигнатурой $(-++)$ и система единиц $G = c = 1$.

2. ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА–БЕЛЬТРАМИ НА ПОВЕРХНОСТИ $(\mathcal{M}_2, \gamma)$

Как было отмечено в [13], нахождение фундаментального решения оператора Лапласа–Бельтрами, а также рассмотрение краевых задач для уравнения Лапласа и Пуассона, в случае двух измерений существенно облегчено тем, что риманова поверхность $(\mathcal{M}_2, \gamma)$ локально-конформна евклидовой плоскости, т.е. существует координатное отображение $f : \Omega \rightarrow \mathcal{R}^2$, при котором в некоторой открытой области Ω , содержащей заданную точку, компоненты метрического тензора γ имеют вид

$$\gamma_{ab}(x) = e^{-\Lambda(x)} \delta_{ab}, \quad a, b, \dots = 1, 2. \quad (1)$$

При этом всюду в Ω оператор Лапласа–Бельтрами имеет вид $\Delta = e^\Lambda \Delta^E$, где Δ^E – евклидов лапласиан, и задача сводится к соответствующей задаче на евклидовой плоскости. В частности, функция Грина задачи Дирихле удовлетворяет уравнению

$$\Delta_{x''}^E G(x', x'') = \delta(x' - x''), \quad x', x'' \in \Omega, \quad (2)$$

и граничному условию

$$G(x', x'')|_{x'' \in \partial\Omega} = 0. \quad (3)$$

Поэтому в конформных координатах

$$G(x', x'') = \frac{1}{2\pi} \ln |x' - x''| + g(x', x''), \quad (4)$$

$|x' - x''|$ – евклидова норма.

Входящая в (4) функция $g(x', *) : \bar{\Omega} \ni x'' \mapsto g(x', x'')$ должна быть выбрана таким образом [18], чтобы

$$\begin{aligned} \Delta_{x''}^E g(x', x'') &= 0 \quad \text{в } \Omega, \\ g(x', x'') &= -\frac{1}{2\pi} \ln |x' - x''| \quad \text{для } x'' \in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (5)$$

При этом смена конформного отображения $f : \Omega \rightarrow \mathcal{R}^2$ приводит к замене одной гармонической функции g другой. В случае односвязной области с кусочно-гладкой границей функция g имеет вид [18]

$$g(x', x'') = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{\omega(z, \zeta)}{z - \zeta} \right|, \quad (6)$$

где $z = x''^1 + ix''^2$, $\zeta = x'^1 + ix'^2$, а $\omega(z, \zeta)$ – аналитическая функция, осуществляющая конформное отображение области Ω на единичный круг, при котором точка с координатой $z = \zeta$ отображается в центр круга. Функция ω является гармонической всюду в Ω , непрерывной на $\bar{\Omega}$, и ее явный вид известен для многих часто встречающихся областей.

Пусть конформное отображение $M_2 \rightarrow \mathcal{R}^2$ состоит из одной карты и ее координатная область содержит все точки $x \in \mathcal{R}^2$ со сколь угодно большими $x^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2$. В этом случае мы приходим к задаче о нахождении фундаментального решения оператора Лапласа на всей евклидовой плоскости и с точностью до аддитивной постоянной имеем

$$G(x', x'') = \frac{1}{2\pi} \ln |x' - x''|. \quad (7)$$

В пределе совпадающих точек функция Грина (7) расходится. Ее регуляризация осуществляется вычитанием из (7) функции Грина на евклидовой плоскости

$$G^{\text{reg}}(x', x'') = G(x', x'') - \frac{1}{4\pi} \ln 2\sigma(x', x''), \quad (8)$$

где $\sigma(x', x'')$ – половина квадрата геодезического интервала между точками x' и x'' . Поскольку интересующие нас величины будут выражаться через функцию (8) и ее производные в пределе $x', x'' \rightarrow x$, соответствующая геодезическая однозначно определена.

Для нахождения пределов совпадения представим $G^{\text{reg}}(x', x'')$ в виде разложения по степеням геодезического интервала $\sigma(x', x'')$ вблизи нуля. Для этого удобно перейти от координат (x', x'') к координатам (x, σ^a) , где x – средняя точка геодезической, а $\sigma^a \equiv \epsilon_{a''}^a \sigma^{a''}(x', x'')$ – касательный к геодезической в точке x и ориентированный в направлении x'' вектор, $\epsilon_{a''}^a$ – бивектор параллельного переноса из x'' в x . Стандартные вычисления дают

$$\begin{aligned} x''^a &= x^a + \frac{1}{2} \sigma^a - \frac{\sigma^b \sigma_b}{16} \nabla^a \Lambda + \frac{\sigma^a \sigma^b}{8} \nabla_b \Lambda + \frac{\sigma^b \sigma^c \sigma^d}{48} \left\{ \delta_b^a \left(\nabla_{cd} \Lambda + \nabla_c \Lambda \nabla_d \Lambda - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\gamma_{cd}}{4} \nabla_e \Lambda \nabla^e \Lambda \right) - \frac{\gamma_{bd}}{2} (\nabla^a \nabla_c \Lambda + \nabla^a \Lambda \nabla_c \Lambda) \right\} + O(\sigma^2). \end{aligned} \quad (9)$$

При этом все величины в правой части (9) берутся в точке x . Аналогичное выражение для x' может быть получено из (9) заменой знака перед вектором σ^a на противоположный.

Указанная процедура позволяет вычислить евклидову норму $|x' - x''|$ и найти регуляризованное значение функции Грина с любой наперед заданной точностью по σ . Если ограничиться членами первого порядка, то

$$G^{\text{reg}}(x', x'') = \frac{\Lambda}{4\pi} + \frac{\sigma^a \sigma^b}{96\pi} \left(\nabla_a \nabla_b \Lambda + \nabla_a \Lambda \nabla_b \Lambda - \frac{\gamma_{ab}}{2} \nabla_c \Lambda \nabla^c \Lambda \right) + O(\sigma^2). \quad (10)$$

Аналогичные разложения можно получить и для производных от функции Грина. При этом следует учитывать, что в выражении (10) все величины заданы в средней точке x и, следовательно, являются неявными функциями x' и x'' . В частности, с помощью формулы (9) и известного выражения для бивектора параллельного переноса можно показать, что

$$\begin{aligned} \nabla_{a'} G^{\text{reg}}(x', x'') &= \epsilon_{a'}^a \frac{\nabla_a \Lambda}{8\pi} - \frac{\epsilon_{a'}^a \sigma^b}{48\pi} \left(\nabla_a \nabla_b \Lambda + \nabla_a \Lambda \nabla_b \Lambda - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \gamma_{ab} \nabla_c \Lambda \nabla^c \Lambda \right) + O(\sigma). \end{aligned} \quad (11)$$

Из полученных выражений следует, что в пределе совпадающих точек

$$[G^{\text{reg}}] = \frac{\Lambda}{4\pi}, \quad [G_{a'}^{\text{reg}}] = \frac{\nabla_a \Lambda}{8\pi}. \quad (12)$$

Здесь мы воспользовались введенным Сингом обозначением

$$[G_{a'_1 \dots a'_n b'_1 \dots b'_m}^{\text{reg}}] = \nabla_{a'_n} \dots \nabla_{a'_1} \nabla_{b'_m} \dots \nabla_{b'_1} G^{\text{reg}}(x', x'')|_{x'=x=x''}. \quad (13)$$

Действуя аналогичным образом, мы можем найти вторую производную

$$[G_{b''a'}^{\text{reg}}] = \frac{1}{48\pi} \left(2\nabla_a \nabla_b \Lambda - \nabla_a \Lambda \nabla_b \Lambda + \frac{1}{2} \gamma_{ab} \nabla_c \Lambda \nabla^c \Lambda \right) \quad (14)$$

и при необходимости все последующие (см. приложение).

Отметим, что полученные выражения для регуляризованного значения функции Грина и ее производных в пределе совпадающих точек не могут быть записаны в терминах только локальной геометрии и, следовательно, являются объектами, которые локально отражают структуру поверхности в целом.

3. ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ САМОДЕЙСТВИЕ В ТРЕХМЕРНОЙ ТЕОРИИ

Рассмотрим пространство-время $(\mathcal{M}_3, \mathbf{g})$ с метрическим тензорным полем

$$\mathbf{g} = -dt \otimes dt + \gamma_{ab}(x) dx^a \otimes dx^b, \quad a, b, \dots = 1, 2. \quad (15)$$

В случае задачи Дирихле потенциал φ электростатического поля является решением двумерного уравнения Пуассона в Ω

$$\Delta \varphi = -4\pi j, \quad (16)$$

где Δ – оператор Лапласа–Бельтрами на сечении постоянного времени $\mathcal{M}_2$, и удовлетворяет граничному условию

$$\varphi(x)|_{x \in \partial\Omega} = \varphi_0(x). \quad (17)$$

Рассматриваемое пространство-время обладает глобальным времениподобным векторным полем Киллинга $\zeta_{(t)} = \partial/\partial t$. Это позволяет определить полную энергию поля в области Ω , которая в рассматриваемом случае может быть выражена через функцию Грина двумерной задачи

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & -2\pi \int_{\Omega} dx' dx'' \sqrt{\gamma(x')\gamma(x'')} j(x') G(x', x'') j(x'') - \\ & - \frac{1}{2} \int_{\Omega} dx' \sqrt{\gamma(x')} j(x') \int_{\partial\Omega} E^{a''}{}_{b''} \nabla_{a''} G(x', x'') \varphi_0(x'') dx^{b''}, \end{aligned} \quad (18)$$

где $E^{ab} = e^{ab}/\sqrt{\gamma}$, $e^{12} = -e^{21} = 1$. В случае источника с точечным носителем первый член в правой части полученного выражения расходится, и его регуляризация осуществляется заменой G на G^{reg} . Интеграл по границе во втором члене является гармонической в Ω и непрерывной на $\overline{\Omega}$ функцией. В случае неограниченной поверхности, конформно-эквивалентной всей евклидовой плоскости, этот член отсутствует.

Пусть $\mathcal{M}_2$ удовлетворяет сформулированным в предыдущем разделе требованиям, и пусть носитель j принадлежит нормальной окрестности точки P , имеющей конформные координаты x . Введем в области интегрирования нормальную риманову систему координат y с началом в P . При этом выражение для регуляризованной энергии поля запишется в виде

$$\mathcal{E}^{\text{reg}} = -2\pi \int_{\mathcal{M}_2} d^2 y' d^2 y'' \sqrt{\gamma(y')\gamma(y'')} j(y') G^{\text{reg}}(y', y'') j(y''). \quad (19)$$

Рассмотрим полученное выражение при стягивании к точке P носителя j и при условии, что предельные значения

$$\lim_{\text{supp } j \rightarrow \{0\}} \int_{\mathcal{M}_2} d^2 y \sqrt{\gamma(y)} y^{a_1} y^{a_2} \dots y^{a_n} j(y) = D^{a_1 a_2 \dots a_n} \quad (20)$$

существуют и не все равны нулю. В этом случае величины $D^{a_1 a_2 \dots a_n}$ являются компонентами симметричного относительно перестановки любой пары индексов тензора

$$\mathbf{D}^{(n)} \in \underbrace{T_P \times T_P \times \dots \times T_P}_n,$$

который определяет n -й мультипольный момент, измеряемый покоящимся в точке P локально-инерциальным наблюдателем.

В рассматриваемом пределе j представляет собой линейную комбинацию δ -функции и некоторого числа ее производных:

$$j(y) = \gamma(y)^{-\frac{1}{2}} \sum_n \frac{(-1)^n D^{a_1 \dots a_n}}{n!} \frac{\partial^{|a|} \delta(y)}{\partial y^{a_n} \dots \partial y^{a_1}}. \quad (21)$$

Соответственно этому мы получим следующее выражение для энергии поля точечного источника, обладающего заданной мультипольной структурой:

$$\mathcal{E}^{\text{reg}} = -2\pi \sum_{n,m} \frac{D^{a_1 \dots a_n} D^{b_1 \dots b_m}}{n! m!} \left[\frac{\partial^{|a|+|b|}}{\partial y^{a'_1} \dots \partial y^{a'_n} \partial y^{b'_1} \dots \partial y^{b'_m}} G^{\text{reg}}(y', y'') \right]. \quad (22)$$

Полученный результат может быть записан в явно ковариантном относительно общих координатных преобразований на $\mathcal{M}_2$ виде. При этом абсолютная симметричность тензора $\mathbf{D}^{(n)}$ приводит к тому, что переход к произвольным координатам сводится к замене производных по нормальным координатам в (22) на ковариантные [19] и собственная энергия может быть представлена в виде

$$\mathcal{E}^{\text{reg}} = -2\pi \sum_{n,m} \frac{1}{n! m!} \mathbf{D}^{(n)} \left[\mathbf{G}_{(\mathbf{n}' \mathbf{m}'')}^{\text{reg}} \right] \mathbf{D}^{(m)}, \quad (23)$$

где введено обозначение

$$\mathbf{D}^{(n)} \left[\mathbf{G}_{(\mathbf{n}' \mathbf{m}'')}^{\text{reg}} \right] \mathbf{D}^{(m)} = D^{a_1 \dots a_n} D^{b_1 \dots b_m} \left[G_{a'_1 \dots a'_n b'_1 \dots b'_m}^{\text{reg}} \right]. \quad (24)$$

Мы видим, что собственная энергия зависит не только от положения точки, но и от ориентации моментов. Поэтому источник будет испытывать действие не только силы, но и момента силы самодействия.

Если потребовать, чтобы измеряемая локально-инерциальным наблюдателем сила имела вид, предписываемый ей специальной теорией относительности, то следует написать, что в нормальных римановых координатах

$$\mathcal{F}_a = - \left(\frac{\partial}{\partial y^a} \sum_n \frac{1}{n!} D^{a_1 \dots a_n} \frac{\partial^{|a|}}{\partial y^{a_1} \dots \partial y^{a_n}} \varphi(y) \right) \Big|_{y=0}. \quad (25)$$

Записывая потенциал φ через функцию Грина, после регуляризации мы можем привести полученное выражение к виду

$$\mathcal{F}_a = 2\pi \sum_{n,m} \frac{1}{n!m!} \left(\mathbf{D}^{(n)} [\nabla_{a'} \mathbf{G}_{(\mathbf{n}'\mathbf{m}'')}^{\text{reg}}] \mathbf{D}^{(m)} + \mathbf{D}^{(n)} [\nabla_{a''} \mathbf{G}_{(\mathbf{n}'\mathbf{m}'')}^{\text{reg}}] \mathbf{D}^{(m)} \right). \quad (26)$$

Далее, в соответствии с теоремой Синга [20]

$$[G_{a'_1 \dots a'_n b''_1 \dots b''_m c'}] + [G_{a'_1 \dots a'_n b''_1 \dots b''_m c''}] = [G_{a'_1 \dots a'_n b''_1 \dots b''_m}]_{;c}, \quad (27)$$

и, таким образом,

$$\mathcal{F}^a(P) = -\gamma^{ab} \nabla_b \mathcal{E}^{\text{reg}}. \quad (28)$$

Преобразования, аналогичные тем, которые привели к выражению (26), для момента силы дают

$$\mathcal{K} = 2\pi \sum_{nm} \frac{1}{n!m!} \left(\tilde{\mathbf{D}}^{(n)} [\mathbf{G}_{(\mathbf{n}'\mathbf{m}'')}^{\text{reg}}] \mathbf{D}^{(m)} + \mathbf{D}^{(n)} [\mathbf{G}_{(\mathbf{n}'\mathbf{m}'')}^{\text{reg}}] \tilde{\mathbf{D}}^{(m)} \right), \quad (29)$$

где

$$\tilde{D}^{a_1 \dots a_n} = \sum_{k=1}^n D^{a_1 \dots a_{k-1} b a_{k+1} \dots a_n} E_{bc} \gamma^{ca_k}. \quad (30)$$

Выразив $\mathbf{D}^{(\mathbf{n})}$ через компоненты в нормальной римановой системе, можно показать, что

$$\tilde{D}^{a_1 \dots a_n} = \frac{\partial}{\partial \phi} D^{a_1 \dots a_n}, \quad (31)$$

где ϕ – угол поворота системы относительно связанной с наблюдателем пространственной системы координат и, следовательно,

$$\mathcal{K} = -\frac{\partial}{\partial \phi} \mathcal{E}^{\text{reg}}. \quad (32)$$

Рассмотрим в качестве примера локально-плоское статическое трехмерное пространство-время N точечных масс. Как показано в [6], это соответствует выбору конформного фактора в виде

$$\Lambda(x) = \sum_{i=1}^N 2(1 - b_i) \ln r_i. \quad (33)$$

Здесь r_i – конформное расстояние от заданной точки до i -й конической особенности, а параметр b_i определяет соответствующий i -й особенности дефицит угла $\Delta\phi_i$ и одновременно массу генерирующей особенность точечной частицы, $\Delta\phi_i = 2\pi(1 - b_i) = 8\pi m_i$.

В случае одного точечного источника его масса должна быть меньше $1/4$ [6]. Однако, если рассматривается две и более частицы, полная масса может достигать значения $1/2$. Поскольку для рассматриваемой метрики $\gamma^{1/2} R^{(2)} = 16\pi \sum m_i \delta(x - x_i)$, то при $\sum m_i = 1/2$ эйлерова характеристика

$$\int_{\mathcal{M}_2} d^2 x \sqrt{\gamma} R^{(2)} \quad (34)$$

становится равной 8π , что соответствует поверхности с топологией сферы. В случае сферы одной карты уже недостаточно для задания координат на $\mathcal{M}_2$, и мы не можем прямо использовать результаты второго раздела. Более того, в этом случае задача о топологическом самодействии отчасти теряет смысл, поскольку полный заряд сферы должен быть равен нулю, и задача об одиночном заряде рассматриваться не может. Поэтому будем предполагать, что $\sum m_i < 1/2$.

Результаты второго раздела и явный вид конформного фактора (33) делают дальнейшие вычисления достаточно простыми. Результат становится особенно наглядным при $N = 1$. В этом случае можно ввести новую радиальную координату ρ , равную геодезическому расстоянию от вершины конуса до точки P и связанную с конформным радиус-вектором r соотношением [6]

$$b\rho = r^b. \quad (35)$$

В терминах ρ конформный фактор имеет тот же вид, что и потенциал поля точечного заряда на евклидовой плоскости, $\Lambda(\rho) = 2b^{-1}(1 - b) \ln b\rho$. Это совместно с (23) позволяет утверждать, что перенормированная энергия самодействия источника с заданной мультипольной структурой формально равна энергии взаимодействия j с точечным распределением зарядов с тем же набором мультипольных моментов, что и у j , но на евклидовой плоскости. Задача заключается в нахождении этих эффективных или индуцированных моментов.

Прямое вычисление показывает, что если в нуль обращаются все мультипольные моменты, за исключением заряда $q = D^{(0)}$, то с точностью до константы

$$\mathcal{E}^{\text{reg}} = -2qq_{\text{ind}} \ln b\rho, \quad q_{\text{ind}} = \frac{q(1 - b)}{2b}, \quad (36)$$

и заряд q взаимодействует с конической особенностью так же, как с зарядом q_{ind} , находящимся на расстоянии ρ на евклидовой плоскости.

Энергия самодействия дипольного момента $\mathbf{d} = \mathbf{D}^{(1)}$ совпадает с энергией взаимодействия двух диполей

$$\mathcal{E}^{\text{reg}} = -(\mathbf{d} \mathbf{E}_{\text{ind}}), \quad \mathbf{E}_{\text{ind}} = 2 \frac{\rho(\rho \mathbf{d}_{\text{ind}}) - \rho^2 \mathbf{d}_{\text{ind}}}{\rho^4}. \quad (37)$$

При этом индуцированный дипольный момент имеет вид

$$\mathbf{d}_{\text{ind}} = -\frac{1 - b^2}{24b^2} \mathbf{d}. \quad (38)$$

Интересно отметить, что в соответствии с (32) действующий на диполь момент силы оказывается в два раза больше того, который можно было ожидать из наивных соображений

$$\mathcal{K} = 2(\mathbf{d} \times \mathbf{E}_{\text{ind}}). \quad (39)$$

Дело в том, что эффективно мы имеем дело со связанной системой (ориентации жестко скореллированы) из двух диполей.

Приведенные в приложении формулы позволяют определить и индуцированный квадрупольный момент

$$D_{\text{ind}}^{ab} = \frac{D^{ab}}{1440b^4}(11b^2 + 1)(1 - b^2). \quad (40)$$

Отметим, что величины индуцированных моментов, а вместе с ними и эффекты топологического самодействия, неограниченно увеличиваются с ростом дефицита угла. Кроме того, индуцированные заряд, дипольный и квадрупольный моменты зависят от b как b^{-1} , b^{-2} и b^{-4} соответственно. Поэтому относительный вклад высших мультиполей в эффект самодействия также возрастает. Это объясняется тем, что при фиксированном ρ и $b \rightarrow 0$ в окрестности рассматриваемой точки конус становится все более похожим на цилиндр радиуса $b\rho$, и эта величина определяет максимальное удаление от источника по соответствующему направлению.

4. ТОЧНО РЕШАЕМЫЕ ЗАДАЧИ НА МУЛЬТИСТРУННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В случае четырехмерного пространства с метрическим тензорным полем

$$\mathbf{g} = -dt \otimes dt + dz \otimes dz + \gamma_{ab}(x)dx^a \otimes dx^b, \quad a, b, \dots = 1, 2, \quad (41)$$

эффективная двумеризация задачи достигается, если плотность тока имеет вид

$$j^\mu(x) = (j^t(x), 0, 0, j^z(x)). \quad (42)$$

В этом случае энергия поля на единицу длины вдоль оси z имеет вид, аналогичный (19), при этом t - и z -компоненты тока входят в окончательное выражение на равных основаниях:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{\text{reg}} = & -2\pi \int_{\mathcal{M}_2} d^2y' d^2y'' \sqrt{\gamma(y')} \sqrt{\gamma(y'')} \times \\ & \times (j^t(y')j^t(y'') + j^z(y')j^z(y'')) G^{\text{reg}}(y', y''). \end{aligned} \quad (43)$$

При исчезающе малых поперечных размерах тока мы можем воспользоваться результатами предыдущего раздела. Однако теперь возникает два набора мультипольных моментов — электрические и магнитные. Оба имеют структуру, определяемую выражением (20), только в первом случае вместо j следует поставить j^t (эти моменты мы будем

по-прежнему обозначать $\mathbf{D}^{(n)}$), а во втором следует подставить j^z (эти моменты будут обозначаться $\mathbf{M}^{(n)}$). При этом мы получаем, что в расчете на единицу длины вдоль оси z

$$\mathcal{E}^{\text{reg}} = -2\pi \sum_{n,m} \frac{1}{n!m!} \left(\mathbf{D}^{(n)} \left[\mathbf{G}_{(\mathbf{n}'\mathbf{m}'')}^{\text{reg}} \right] \mathbf{D}^{(m)} + \mathbf{M}^{(n)} \left[\mathbf{G}_{(\mathbf{n}'\mathbf{m}'')}^{\text{reg}} \right] \mathbf{M}^{(m)} \right). \quad (44)$$

Соответственно этому появляется два типа сил самодействия. С формальной точки зрения это не приводит к усложнению расчетов. Однако возникает вопрос о связи регуляризованной энергии поля и действующих на ток силы и момента силы. Если в случае электрического поля результаты (28) и (32) выглядят достаточно естественными, то в случае, если поле не является потенциальным, ответ заранее не очевиден.

Можно показать, что сила и момент силы самодействия на единицу длины имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_a = 2\pi \sum_{n,m} \frac{1}{n!m!} & \left(\mathbf{D}^{(n)} \left[\nabla_{a'} \mathbf{G}_{(\mathbf{n}'\mathbf{m}'')}^{\text{reg}} \right] \mathbf{D}^{(m)} + \right. \\ & \left. + \mathbf{D}^{(n)} \left[\nabla_{a''} \mathbf{G}_{(\mathbf{n}'\mathbf{m}'')}^{\text{reg}} \right] \mathbf{D}^{(m)} - (\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{M}) \right) \end{aligned} \quad (45)$$

и

$$\mathcal{K} = 2\pi \sum_{n,m} \frac{1}{n!m!} \left(\tilde{\mathbf{D}}^{(n)} \left[\mathbf{G}_{(\mathbf{n}'\mathbf{m}'')}^{\text{reg}} \right] \mathbf{D}^{(m)} + \mathbf{D}^{(n)} \left[\mathbf{G}_{(\mathbf{n}'\mathbf{m}'')}^{\text{reg}} \right] \tilde{\mathbf{D}}^{(m)} - (\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{M}) \right), \quad (46)$$

соответственно. При этом различие в относительном знаке между электрическим и магнитным вкладами в энергию (44), с одной стороны, и силу (45) и момент силы (46), с другой стороны, приводит к следующему результату:

$$\mathcal{F}^a = -\gamma^{ab} \nabla_b \left(\mathcal{E}_E^{\text{reg}} - \mathcal{E}_H^{\text{reg}} \right), \quad \mathcal{K} = -\frac{\partial}{\partial \phi} \left(\mathcal{E}_E^{\text{reg}} - \mathcal{E}_H^{\text{reg}} \right). \quad (47)$$

Выбор конформного фактора в виде (33) делает пространство с метрическим тензорным полем (41) пространством-временем системы параллельных космических струн [7]. В этом случае при $\text{supp } j^{t,z} \rightarrow \{0\}$ ток (42) может рассматриваться как ток бесконечно тонкой сверхпроводящей космической струны, собственный дефицит угла которой относительно мал. Остаются в силе все полученные в предыдущем разделе результаты, если под силой, моментом силы и мультипольными электрическими моментами понимать соответствующие величины, отнесенные к единице длины вдоль струн. В дополнение к ним появляются индуцированные магнитные моменты. В частности, для тока и магнитного дипольного момента получаем

$$\mathbf{i}_{\text{ind}} = \frac{(1-b)}{2b} \mathbf{i}, \quad \boldsymbol{\mu}_{\text{ind}} = -\frac{(1-b^2)}{24b^2} \boldsymbol{\mu}. \quad (48)$$

Формулы для силы и энергии будут воспроизводить соответствующие выражения, известные из электродинамики в пространстве Минковского, а момент силы может быть получен из (39) заменой $\mathbf{d}$ на $\boldsymbol{\mu}$.

5. СТРУНА КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ

Чтобы исследовать возможное влияние ненулевой толщины струны, рассмотрим случай, когда $\mathcal{M}_2$ представляет собой поверхность, склеенную из двух частей:

$$\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_{\text{in}} \cup \mathcal{M}_{\text{out}}, \quad (49)$$

части конической поверхности $\mathcal{M}_{\text{out}}$ и некоторой внутренней поверхности $\mathcal{M}_{\text{in}}$. Если, как это часто делают, выбрать в качестве $\mathcal{M}_{\text{in}}$ сферический сегмент, то соответствующее решение интерпретируется как струна с постоянной плотностью энергии. Другие случаи, по крайней мере в интересующем нас контексте, в литературе не рассматривались. Вместе с тем в нашем подходе это делается достаточно просто с помощью соответствующего подбора конформного фактора. Нужно, чтобы во внешней области при $r > r_0$ (r_0 – конформный радиус струны) этот фактор был равен $\Lambda_{\text{out}}(r) = 2(1-b) \ln r$. При этом конкретный вид $\Lambda_{\text{in}}(r)$ несуществен. Действительно, способ, которым осуществлено сглаживание конуса, определит распределение энергии и натяжений внутри струны:

$$T_t^t(r) = T_z^z(r) = \frac{\Delta \Lambda_{\text{in}}(r)}{16\pi}, \quad T_a^b = 0. \quad (50)$$

Но во внешней области все характеризующие самодействие величины будут те же, что и в пространстве-времени бесконечно тонкой струны с тем же дефицитом угла, если под ρ по-прежнему понимать величину, определяемую соотношением (35).

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

То, что сила самодействия зависит от глобальной структуры пространства-времени, отмечалось неоднократно. Здесь, как и в эффекте поляризации вакуума, нелокальное влияние кривизны обусловлено тем, что решения дифференциальных уравнений в частных производных определяются структурой многообразия в целом, а не видом уравнения в заданной точке. Особенно хорошо это прослеживается в случае локально-плоских пространств.

Выше мы показали, что конические граничные условия приводят к появлению некулоновской добавки у электрического поля точечного источника и как следствие к появлению силы и момента силы самодействия. Получены общие выражения, связывающие регуляризованное значение собственной энергии, с одной стороны, и силу и момент силы, с другой. Предложенный подход позволил рассмотреть задачу о топологическом самодействии на мультицентровом пространстве вне рамок теории возмущений и при любой мультипольной структуре источника. Показано, что с ростом дефицита угла эффекты самодействия неограниченно растут, при этом все большую роль начинают играть высшие мультиполи. Таким образом, вопреки высказывавшемуся ранее утверждению [21] сила самодействия зависит от внутренней структуры источника и не обращается в нуль при равном нулю полном заряде. Полученные результаты обобщены на случай системы параллельных струн, одна из которых токонесящая. Показано,

что учет ненулевой толщины струны не проявляется существенным образом в эффектах самодействия.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-02-16132.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Приведем выражения для третьей и четвертой производных G^{reg} . В целях сокращения записи введем обозначение $\Lambda_{a_1 \dots a_n} \equiv \nabla_{a_n} \dots \nabla_{a_1} \Lambda$. Тогда третья производная может быть записана в виде

$$[G_{c''b'd'}^{\text{reg}}] = \frac{1}{192\pi} \left(2\Lambda_{gfe} + \Lambda^t \Lambda_{et} \gamma_{fg} \right) \left(2\delta_d^e \delta_b^f \delta_c^g + \delta_c^e \delta_b^f \delta_d^g - \delta_b^e \delta_d^f \delta_c^g \right) - \frac{1}{192\pi} \Lambda_e \Lambda_{fg} \left(3\delta_b^e \delta_c^f \delta_d^g + \delta_c^e \delta_b^f \delta_d^g \right).$$

Используя члены следующего порядка по σ в разложении (9), можно показать, что для четвертой производной имеет место выражение

$$\begin{aligned} [G_{d''c''b'a'}^{\text{reg}}] = & \frac{1}{1920\pi} \left(16\Lambda_{abcd} - 16\Lambda_a \Lambda_{bcd} + 8\gamma_{ab} \Lambda_{cdt} \Lambda^t + 16\Lambda_a \Lambda_b \Lambda_{cd} - \right. \\ & - 16\gamma_{ab} \Lambda_c \Lambda^t \Lambda_{dt} + 4\gamma_{ab} \gamma_{cd} \Lambda^p \Lambda^t \Lambda_{pt} + 16\gamma_{ab} \Lambda_{ct} \Lambda_d^t - 32\Lambda_{ab} \Lambda_{cd} - \\ & - 4\Lambda_a \Lambda_b \Lambda_c \Lambda_d + 4\gamma_{ab} \Lambda_c \Lambda_d \Lambda_t \Lambda^t - \frac{1}{2} \gamma_{ab} \gamma_{cd} (\Lambda_t \Lambda^t)^2 \Big) + \\ & + \frac{1}{11520\pi} \left(\gamma_{ab} \gamma_{cd} - \gamma_{ac} \gamma_{bd} \right) \left(-96\Lambda_{tp} \Lambda^{tp} + 160(\Lambda_t^t)^2 - \right. \\ & \left. - 24\Lambda_t \Lambda^t \Lambda_p^p - 6(\Lambda_t \Lambda^t)^2 + 48\Lambda_t \Lambda_p \Lambda^{tp} \right) + A_{[ab][cd]}, \end{aligned}$$

где $A_{[ab][cd]}$ — добавочный тензор, который антисимметричен по перестановке первого и второго, а также третьего и четвертого индексов и поэтому дает нулевой вклад при подстановке в выражение для регуляризованной собственной энергии.

Список литературы

- [1] The Formation and Evolution of Cosmic Strings. Eds. G. W. Gibbons, S. W. Hawking, T. Vachaspati. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- [2] *C. Callan, F. Wilczek.* Phys. Lett. B. 1994. V. 333. P. 55; *L. Susskind, J. Uglum.* Phys. Rev. D. 1994. V. 50. P. 2700; *A. I. Barvinski, V. P. Frolov, A. I. Zelnikov.* Phys. Rev. D. 1995. V. 51. P. 1741; *S. N. Solodukhin.* Phys. Rev. D. 1995. V. 51. P. 609.
- [3] *D. V. Fursaev, G. Miele.* Phys. Rev. D. 1994. V. 49. P. 987.
- [4] *M. O. Katanaev, I. V. Volovich.* Ann. Phys. (NY). 1992. V. 216. P. 1.
- [5] *Г. Е. Воловик.* Письма в ЖЭТФ. 1998. Т. 67. № 9. С. 666.
- [6] *S. Deser, R. Jackiw, G. 't Hooft.* Ann. Phys. (NY). 1984. V. 152. P. 220.
- [7] *P. S. Letelier.* Class. Q. Grav. 1987. V. 4. P. L75.

- [8] *Д. Д. Соколов, А. А. Старобинский.* Докл. АН СССР. 1977. Т. 234. С. 1043.
- [9] *D. V. Galtsov, Yu. V. Grats, P. S. Letelier.* Ann. Phys. (NY). 1993. V. 224. P. 90.
- [10] *T. M. Helliwell, D. A. Konkowski.* Phys. Rev. D. 1986. V. 34. P. 1918; *J. S. Dowker.* Phys. Rev. D. 1987. V. 36. P. 3095; P. 3742; *B. Linet.* Phys. Rev. D. 1987. V. 35. P. 536; *V. P. Frolov, E. M. Serebriany.* Phys. Rev. D. 1987. V. 35. P. 3779; *W. A. Hiscock.* Phys. Lett. B. 1987. V. 188. P. 317.
- [11] *Д. В. Гальцов, Ю. В. Грац, А. В. Лаврентьев.* ЯФ. 1995. Т. 58. С. 570.
- [12] *B. Linet.* Phys. Rev. D. 1986. V. 33. P. 1833.
- [13] *Yu. V. Grats, A. Garcia.* Class. Q. Grav. 1996. V. 13. P. 189.
- [14] *E. R. Bezerra de Mello, V. B. Bezerra, Yu. V. Grats.* Class. Q. Grav. 1998. V. 15. P. 1915.
- [15] *E. R. Bezerra de Mello, V. B. Bezerra, Yu. V. Grats.* Mod. Phys. Lett. A. 1998. V. 13. P. 1427.
- [16] *Д. В. Гальцов, Ю. В. Грац, А. В. Лаврентьев.* Письма в ЖЭТФ. 1994. Т. 59. С. 359.
- [17] *D. P. Bennett, F. R. Bouchet.* Phys. Rev. D. 1990. V. 41. P. 2408.
- [18] *В. С. Владимиров.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
- [19] *А. З. Петров.* Пространства Эйнштейна. М.: Физматгиз, 1961.
- [20] *S. M. Christensen.* Phys. Rev. D. 1976. V. 14. P. 2490.
- [21] *L. Parker.* Phys. Rev. D. 1981. V. 24. P. 535.

Поступила в редакцию 27.IV.1999 г.