Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Г. Воронцова, Г. С. Шаров, Многомерные космологические решения фридмановского типа в дилатонной гравитации, *ТМФ*, 2000, том 123, номер 1, 163–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf594>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 11:25:05

© 2000 г.

Е. Г. Воронцова*, Г. С. Шаров*

МНОГОМЕРНЫЕ КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ФРИДМАНОВСКОГО ТИПА В ДИЛАТОННОЙ ГРАВИТАЦИИ

В D -мерной дилатонной гравитационной модели с дефицитом центрального заряда Λ получены и классифицированы космологические решения фридмановского типа (пространственно-однородные и изотропные).

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из следствий струнной теории в низкоэнергетическом пределе является наличие скалярного поля дилатона $\phi(x)$ [1, 2] в пространстве-времени с (критической) размерностью D . Дилатон использовался в различных гравитационных моделях, в частности в модели $(1 + 1)$ -мерной гравитации [3–5].

Кроме того, поле дилатонов и другие поправки низшего порядка к эйнштейновской гравитации, следующие из струнной теории, интенсивно использовались в космологии [6–23]. В работах [15–23] искались $(3 + 1)$ -мерные решения с метрикой Фридмана–Робертсона–Уокера. При этом имелась в виду та или иная форма компактификации остальных $D - 4$ измерений.

Дилатонное поле рассматривалось в качестве механизма для инфляции [24], необходимой при решении некоторых космологических проблем. В работах [13, 16, 19, 21] дилатон использовался, чтобы избежать сингулярности “большого взрыва”.

В статье [11] получен ряд космологических решений для максимально симметричного пространства произвольной размерности D с дилатоном, центральным зарядом и ковариантно-постоянным антисимметричным тензорным полем ($D = 3$ или $D = 4$).

Методы этой работы используются и в данной статье. Мы рассматриваем и классифицируем космологические решения в D -мерной дилатонной гравитации с дефицитом центрального заряда Λ для случая произвольной размерности D . Используется D -мерное обобщение метрики Фридмана–Робертсона–Уокера, соответствующее однородной и изотропной пространственной части с постоянной кривизной ($k = 0, \pm 1$). Все

*Тверской государственный университет, Тверь, Россия

пространственные измерения равноправны, как это могло бы быть до компактификации. Целью нашего исследования являются упорядочение известных дилатонных космологических решений с $D \geq 2$ и дополнение их списка новыми решениями (в частности, при $k = \pm 1$) для полной классификации.

В данной работе не рассматриваются слагаемые в лагранжиане с антисимметричными тензорными полями, т.к. условие максимальной пространственной симметрии ограничивает возможные размерности значениями $D = 3$ и $D = 4$. Для этих случаев данная проблема изучалась многими авторами [6, 11, 17, 18, 20, 22].

2. МОДЕЛЬ И УРАВНЕНИЯ

В работе рассматривается дилатонная гравитационная модель с действием следующего вида [1]:

$$S = \int \sqrt{|g|} e^{-2\phi(x)} [R + 4(\nabla\phi)^2 + \Lambda] d^{n+1}x. \quad (1)$$

Здесь $\phi(x)$ – скалярное поле (поле дилатонов) на $(n+1)$ -мерном ($D = n+1$) псевдоримановом многообразии с координатами x^μ и метрическим тензором $g_{\mu\nu}$, $g = \det |g_{\mu\nu}|$, R – скалярная кривизна, $(\nabla\phi)^2 = g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi$.

Здесь и ниже мы используем так называемую струнную систему координат для действия (1), имея в виду возможность перехода к эйнштейновской системе с помощью конформного преобразования $g_{\mu\nu} \rightarrow e^{-r\phi} g_{\mu\nu}$, $r = 4/(D-2)$ [1, 11, 14].

Уравнения эволюции для данной модели

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(R + \Lambda) g_{\mu\nu} + 2\phi_{;\mu\nu} &= g_{\mu\nu} [2\phi_{;\lambda}^{\lambda} - 2(\nabla\phi)^2], \\ \frac{1}{4}(R + \Lambda) + \phi_{;\lambda}^{\lambda} - (\nabla\phi)^2 &= 0 \end{aligned}$$

получены с помощью варьирования действия (1) по гравитационному полю $g_{\mu\nu}$ (первое уравнение) и по полю дилатонов ϕ (второе уравнение). Здесь $R_{\mu\nu}$ – тензор Риччи, $\phi_{;\mu\nu}$ – ковариантная производная.

Преобразуем данные уравнения к эквивалентному виду

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} + 2\phi_{;\mu\nu} &= 0, \\ R + 4(\nabla\phi)^2 &= \Lambda. \end{aligned} \quad (2)$$

Будем искать для системы уравнений (2) космологические решения фридмановского типа. Это означает, что $M_{1,n} = R \times S_k^n$, где S_k^n – однородное и изотропное многообразие, характеризующее масштабным фактором $a(t)$ [11]. Рассматриваются многообразия S_k^n следующих видов: n -мерная сфера S_1^n , псевдосфера S_{-1}^n и плоское пространство $S_0^n \equiv R^n$. В случае $k = 1$ фактор a – радиус сферы S_1^n . Метрика на многообразии $M_{1,n} = R \times S_k^n$ может быть задана [25] в виде

$$\begin{aligned} ds^2 &= dt^2 - a^2(t) [(dx^1)^2 + c_k^2(x^1)(dx^2)^2 + \dots \\ &\dots + c_k^2(x^1)c_k^2(x^2) \dots c_k^2(x^{n-1})(dx^n)^2], \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$c_k(x) = \begin{cases} \cos x, & k = 1, \\ 1, & k = 0, \\ \operatorname{ch} x, & k = -1. \end{cases}$$

Подставим метрический тензор (3) и функцию $\phi = \phi(t)$ в уравнения (2). Для всех значений k справедливы следующие выражения:

$$R_0^0 = -\frac{na\ddot{a}}{a^2}, \quad R_1^1 = R_2^2 = \dots = R_n^n = -[\ddot{a}a + (n-1)(\dot{a}^2 + k)]a^{-2},$$

$$R = -n[2a\ddot{a} + (n-1)(\dot{a}^2 + k)]a^{-2}, \quad \dot{a} = \frac{da}{dt}.$$

При этом система (2) сводится к трем уравнениям:

$$-\frac{n\ddot{a}}{a} + 2\ddot{\phi} = 0, \quad (4)$$

$$-\ddot{a} - (n-1)(\dot{a}^2 + k)a^{-1} + 2\dot{a}\dot{\phi} = 0, \quad (5)$$

$$n(n-1)(\dot{a}^2 + k)a^{-2} + 4\dot{\phi}^2 - 4n\dot{\phi}\dot{a}a^{-1} = \Lambda. \quad (6)$$

Эти три уравнения не являются независимыми. Уравнение (6) можно рассматривать как связь “нулевой энергии”, которая сохраняется вследствие уравнений (4), (5) и, следовательно, приводит лишь к ограничению на начальные значения $a, \dot{a}, \phi, \dot{\phi}$ [11].

Выразим $\dot{\phi}$ из уравнения (5):

$$\dot{\phi} = \frac{1}{2} \left[\frac{\ddot{a}}{\dot{a}} + \frac{n-1}{a\dot{a}} (\dot{a}^2 + k) \right], \quad (7)$$

и подставим в (6). Получим уравнение второго порядка (квадратное относительно $\ddot{a}$), которое после замены

$$\dot{a} = q(a) \quad (8)$$

примет следующий вид:

$$\frac{dq}{da} = \frac{q}{a} - k \frac{n-1}{aq} \pm \sqrt{n \frac{q^2}{a^2} - kn \frac{n-1}{a^2}} + \Lambda. \quad (9)$$

Для классификации всех решений данного уравнения и системы (4)–(6) рассмотрим некоторые частные случаи.

3. ПЛОСКАЯ ВСЕЛЕННАЯ: $k = 0$

Проинтегрировав уравнение (9), а также уравнение (8) для всех значений Λ , мы приходим к следующему выражению для эволюции масштабного фактора:

$$a(t) = \begin{cases} a_0 [\operatorname{th}(\frac{1}{2}\sqrt{\Lambda}\tau)]^{\pm\frac{1}{\sqrt{n}}}, & \Lambda > 0, \\ a_0 \tau^{\pm\frac{1}{\sqrt{n}}}, & \Lambda = 0, \\ a_0 [\operatorname{tg}(\frac{1}{2}\sqrt{-\Lambda}\tau)]^{\pm\frac{1}{\sqrt{n}}}, & \Lambda < 0. \end{cases} \quad (10)$$

Здесь a_0 – постоянная интегрирования в (9). В выражении (10) и ниже используется параметр времени

$$\tau = \pm(t - t_0), \quad \tau \geq 0. \quad (11)$$

Этот параметр введен для того, чтобы описать все решения системы (4)–(6), полученные из некоторого решения с помощью трансляции (t_0 – постоянная интегрирования в (8)) и обращения времени, т.е. замены знака в (11). Существование таких решений следует из свойств симметрии системы (4)–(6). Знаки $\pm$ в (11) и (10) независимы.

Из соотношения (7) получим соответствующую (10) зависимость поля $\phi(t)$:

$$e^{2\phi-2\phi_0} = \begin{cases} [\operatorname{sh}(\frac{1}{2}\sqrt{\Lambda}\tau)]^{-1\pm\sqrt{n}} [\operatorname{ch}(\frac{1}{2}\sqrt{\Lambda}\tau)]^{-1\mp\sqrt{n}}, & \Lambda > 0, \\ \tau^{-1\pm\sqrt{n}}, & \Lambda = 0, \\ [\sin(\frac{1}{2}\sqrt{-\Lambda}\tau)]^{-1\pm\sqrt{n}} [\cos(\frac{1}{2}\sqrt{-\Lambda}\tau)]^{-1\mp\sqrt{n}}, & \Lambda < 0. \end{cases} \quad (12)$$

Функции $a(t)$ (10) и $\phi(t)$ (12) являются точными решениями не только уравнений (5) и (6), но также и уравнения (4). Данная ситуация имеет более общий характер, связанный с природой ограничения (6): все решения уравнения (9) для любых k , Λ и n удовлетворяют уравнению (4).

Семейство решений (10), (12) необходимо дополнить линейным дилатонным решением [7, 21]

$$a = \text{const}, \quad \phi = \phi_0 \pm \frac{1}{2}\sqrt{\Lambda}t, \quad \Lambda \geq 0, \quad k = 0, \quad (13)$$

которое было потеряно при делении на $\dot{a}$ в уравнении (7).

Решения (10), (12) широко известны в случае $D = 4$ [16, 20, 21] и были рассмотрены для $\Lambda > 0$ и произвольного D в работе [11]. Они совпадают с решениями, полученными в работе [8] для многообразия $R \times T^n$ в случае, когда все радиусы n -мерных торов T^n равны. Аналогичные решения, найденные в [9] для плоского многообразия с различными масштабными факторами подпространств, также обобщают выражения (10)–(12).

Отметим, что качественная картина решений (10), (12) и структура ветвей этих решений аналогична для всех $n > 1$. В случаях $\Lambda \geq 0$ для всех n мы имеем две различные ветви (или 4 ветви, если мы рассматриваем как различные два решения, переходящие

друг в друга при замене знака “+” на “−” в (11) [16]¹⁾. При $\Lambda < 0$ в силу свойств симметрии (11) существует лишь одна ветвь решений.

Знак “+” в уравнениях (10) и (12) соответствует расширению (при возрастании τ) плоской дилатонной вселенной из сингулярной точки $\tau = 0$ с возрастанием ϕ от $-\infty$, противоположный знак описывает эволюцию без сингулярности $a = 0$, но с $a \rightarrow \infty$, $\phi \rightarrow +\infty$ при $\tau \rightarrow 0$. Значение $\Lambda = 0$ всегда соответствует степенному закону эволюции величин a и ϕ , обобщающему аналогичное выражение [16] для случая $n = 3$. Присутствие $\Lambda > 0$ приводит к замедлению упомянутого выше расширения и к стабилизации масштабного фактора: $a \rightarrow a_0 = \text{const}$, $\phi \rightarrow -\infty$ при $\tau \rightarrow \infty$. В случае $\Lambda < 0$ мы имеем ускорение эволюции, которая заканчивается в течение конечного времени.

Описанная выше роль Λ -члена в дилатонной космологии в некотором смысле противоположна [11] его роли в обычной фридмановской $(n + 1)$ -мерной космологии. В последнем случае эволюция плоской вселенной ($k = 0$) с пылевидной материей²⁾ и эйнштейновским гравитационным лагранжианом $\sqrt{|g|} (R + 2\Lambda)$ имеет вид [25]

$$a = \text{const} \cdot \begin{cases} \left[\text{sh} \left(\sqrt{\frac{n\Lambda}{2(n-1)}} \tau \right) \right]^{\frac{2}{n}}, & \Lambda > 0, \\ \tau^{\frac{2}{n}}, & \Lambda = 0, \\ \left[\sin \left(\sqrt{\frac{-n\Lambda}{2(n-1)}} \tau \right) \right]^{\frac{2}{n}}, & \Lambda < 0. \end{cases}$$

Здесь $\Lambda > 0$ ускоряет расширение.

Заметим, что для двумерной дилатонной модели ($n = 1$) все “космологические” решения исчерпываются выражениями (10)–(13). Действительно, 1-мерное пространство не имеет внутренней кривизны, следовательно, параметр k выпадает из уравнений (5), (6) при $n = 1$. В этом случае $(1 + 1)$ -мерное решение (10), (12) совпадает с решением типа “черной дыры” в $2D$ -струнной теории [4, 12, 26] (которое принимает евклидову форму после аналитического продолжения $\tau \rightarrow ir$, $\Lambda \rightarrow -\Lambda$ [10]).

4. ПРОСТРАНСТВА С КРИВИЗНОЙ $k = \pm 1$, $\Lambda = 0$

Интегрируя уравнение (9), мы можем получить решения системы (4)–(6) для всех значений k . Выше было упомянуто, что эти решения также удовлетворяют и уравнению (4). Однако более удобно искать различные типы решений для $\Lambda = 0$, исключив a

¹⁾Ниже для подсчета числа ветвей мы не будем различать два решения, связанные лишь обращением времени (11). Аналогично, говоря о расширении, мы всегда будем иметь в виду, что существует соответствующее решение, описывающее сжатие. Если считать эти решения различными, то нужно умножить упоминаемое число ветвей на два.

²⁾В действии (1) присутствует лишь материя в “экзотическом” (дилатон и Λ -член) виде.

из уравнений (4)–(6). Для этого возьмем линейную комбинацию этих уравнений с коэффициентами -1 , n/a и 1 . Полученное выражение

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{n} \left(2\dot{\phi} - \frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}} \right) \quad (14)$$

(при $\Lambda = 0$) можно проинтегрировать:

$$a^n = \frac{C e^{2\phi}}{\dot{\phi}}. \quad (15)$$

Здесь C – произвольная постоянная.

Прежде чем использовать выражения (14) и (15), рассмотрим все решения системы (4)–(6) с $\dot{\phi} = 0$. При любых значениях k , Λ и $n > 1$ мы имеем только два решения этого типа: тривиальный случай (13), когда $a = a_0$, $\phi = \phi_0$, $k = 0$, $\Lambda = 0$, и решение с линейным ростом a [11]:

$$a = a_0 \pm t, \quad \phi = \phi_0, \quad k = -1, \quad \Lambda = 0. \quad (16)$$

После подстановки выражения (14) или (15) в уравнение (4) получим следующее дифференциальное уравнение:

$$n \frac{d}{dt} \frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}} = \left(2\dot{\phi} - \frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}} \right)^2. \quad (17)$$

Введя обозначение

$$p = \frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}^2}$$

и проинтегрировав уравнение (17), приходим к выражению

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{Q} \left| p + \frac{2}{\sqrt{n}-1} \right|^{\frac{-\sqrt{n}}{2(\sqrt{n}-1)}} \left| p - \frac{2}{\sqrt{n}+1} \right|^{\frac{-\sqrt{n}}{2(\sqrt{n}+1)}}. \quad (18)$$

Здесь Q – постоянная интегрирования, которая может принимать различные значения на трех интервалах, на которые разбивают числовую ось $-\infty < p < \infty$ особые точки

$$p_1 = -\frac{2}{\sqrt{n}-1}, \quad p_2 = \frac{2}{\sqrt{n}+1}. \quad (19)$$

Учитывая, что $p dt = -d(\dot{\phi})^{-1}$, приходим к соотношению

$$dt = -\frac{Qn}{n-1} \left| p - p_1 \right|^{\frac{2-\sqrt{n}}{2(\sqrt{n}-1)}} \left| p - p_2 \right|^{\frac{-2-\sqrt{n}}{2(\sqrt{n}+1)}} \text{sign}(p - p_1) \text{sign}(p - p_2) dp. \quad (20)$$

Рис. 1

Оно позволяет выразить t через параметр p в квадратурах на каждом из интервалов $(-\infty, p_1)$, (p_1, p_2) , $(p_2, +\infty)$.

С помощью уравнений (15), (18) и (20) выразим ϕ и a через p :

$$a(p) = C_a |p - p_1|^{\frac{1}{2(\sqrt{n}-1)}} |p - p_2|^{\frac{-1}{2(\sqrt{n}+1)}}, \quad (21)$$

$$\phi(p) = \phi_0 + \frac{\sqrt{n}}{4} \ln \left| \frac{p - p_1}{p - p_2} \right|. \quad (22)$$

Постоянные C_a , ϕ_0 из формул (21), (22) и C из формулы (15) связаны соотношением $C_a = |CQe^{2\phi_0}|^{1/n}$.

Выражения (20)–(22) являются решением системы (4)–(6) только при выполнении условия

$$\left(\frac{nQ}{C_a} \right)^2 = -k \operatorname{sign}(p - p_1) \operatorname{sign}(p - p_2). \quad (23)$$

Отсюда следует, что решение (20)–(22) имеет место в случае $k = 1$, если $p \in (p_1, p_2)$, и в случае $k = -1$, если $p \in (-\infty, p_1) \cup (p_2, +\infty)$. Поэтому при $k = 1$, $\Lambda = 0$ существует только одна ветвь решений (мы учитываем число ветвей в соответствии со сноской 1), которая представлена на рис. 1 как эволюция масштабного фактора a во времени (11) для различных $n = D - 1$ (сплошные линии). Штриховыми линиями показана зависимость $\phi = \phi(t)$ ($\phi_0 = 3$) для случаев $n = 2$ и $n = 9$.

Для любых n эти решения описывают расширение вселенной (a возрастает от 0 до $+\infty$ и ϕ — от $-\infty$ до $+\infty$, в то время как p пробегает значения от p_1 до p_2) в течение конечного времени

$$T = Qn \left(\frac{4\sqrt{n}}{n-1} \right)^{\frac{1}{n-1}} \frac{\Gamma\left(\frac{\sqrt{n}}{2(\sqrt{n}-1)}\right) \Gamma\left(\frac{\sqrt{n}}{2(\sqrt{n}+1)}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n-1}\right)}. \quad (24)$$

Здесь $\Gamma(x)$ — функция Эйлера. На рис. 1 изображены графики $a = a(t)$ и $\phi = \phi(t)$ с одинаковым значением параметра $T = 1$ для различных n . Заметим, что решения (20), (21) для любого фиксированного $n > 1$ и $k = \pm 1$ образуют двухпараметрическое семейство: первый параметр t_0 в (11) тривиален (сдвиг по t), в качестве второго можно взять C_a , Q или T (они связаны между собой уравнениями (23) и (24)). Третий параметр ϕ_0 присутствует в выражении (22).

Рис. 2

В случае $k = -1$, $\Lambda = 0$ мы имеем две ветви решений (20)–(22), зависимость $a = a(t)$ для которых показана на рис. 2. Первая ветвь решений описывает монотонный рост a и ϕ : $0 < a < +\infty$, $-\infty < \phi < \phi_0$, $p < p_1$ (см. рис. 2а). Вторая ветвь с $p > p_2$ отвечает эволюции a без сингулярности $a = 0$; величина a убывает от $+\infty$ до минимума $a_{\min} = C_a [|\sqrt{n} p_1|^{p_1} (\sqrt{n} p_2)^{p_2}]^{-1/4}$, а затем возрастает до $+\infty$, в то время как ϕ монотонно убывает от $+\infty$ до ϕ_0 (см. рис. 2б). В обоих случаях асимптотическое поведение при

$\tau \rightarrow \infty$ имеет вид $\phi \rightarrow \phi_0 = \text{const}$, $a \rightarrow \text{const} + \tau$, т.е. в этом пределе все решения (20), (21) для $k = -1$ стремятся к линейной эволюции (16).

В противоположном (сингулярном) пределе $p \rightarrow p_1$ или $p \rightarrow p_2$ при $k = \pm 1$ для всех ветвей мы имеем асимптотическую зависимость одного из двух следующих типов:

$$a \simeq \text{const} \cdot \tau^{\frac{1}{\sqrt{n}}}, \quad e^{2\phi} \simeq \text{const} \cdot \tau^{-1+\sqrt{n}}, \quad \tau \rightarrow +0, \quad (25)$$

$$a \simeq \text{const} \cdot \tau^{-\frac{1}{\sqrt{n}}}, \quad e^{2\phi} \simeq \text{const} \cdot \tau^{-1-\sqrt{n}}, \quad \tau \rightarrow +0. \quad (26)$$

Выражение (25) соответствует случаю $p \rightarrow p_1$ и $a \rightarrow 0$, представленному на рис. 1 ($k = 1$) и рис. 2а ($k = -1$). Асимптотика (26) соответствует решениям на рис. 2б и на рис. 1 (в пределе $t \rightarrow T$).

Мы видим, что асимптотическое поведение решений (20)–(22) ($k = \pm 1$, $\Lambda = 0$) и (10)–(12) ($k = 0$) идентично. Это позволяет установить соответствие между эквивалентными ветвями с одинаковыми пределами (25) или (26).

Только для одной³⁾ размерности $n = 4$ ($D = 5$) существует явное решение (20)–(22):

$$a(t) = \left| \frac{\tau^3 - T^3}{\tau} \right|^{\frac{1}{2}}, \quad \phi(t) = \phi_0 + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\tau^3 - T^3}{\tau^3} \right|. \quad (27)$$

Здесь $T = 8Q/\sqrt[3]{3}$ в соответствии с (24), $\tau = \pm(t - t_0)$ может быть отрицательным в отличие от (11).

Выражение (27) имеет более простой вид и может служить иллюстрацией свойств рассмотренных выше решений (20)–(22). Постоянная t_0 в данном выражении выбрана так, что точка $\tau = 0$ является образом точки $p = p_2 = 2/3$, а точка $\tau = T$ – образом точки $p = p_1 = -2$ при непрерывном отображении оси p на ось τ . Следовательно, точки $\tau = 0$ и $\tau = T$ делят ось τ на 3 части, причем интервал $0 < \tau < T$ соответствует случаю $k = 1$.

5. ПРОСТРАНСТВА С $k = \pm 1$ И $\Lambda \neq 0$

В этом случае мы исследуем эволюцию $a(t)$, $\phi(t)$, решая систему (8), (9), которая может быть переписана в виде

$$\dot{a} = q, \quad \dot{q} = a^{-1} \left[q^2 - k(n-1) \pm q \sqrt{n[q^2 - k(n-1)] + \Lambda a^2} \right]. \quad (28)$$

Для рассмотрения в данном разделе решений этой системы мы используем, в частности, численный анализ, т.к. явные аналитические решения имеются лишь в выделенных случаях. Например, для размерности $D = 5$ (отмеченной в предыдущем разделе) и

³⁾ Для критических размерностей $D = 10$ или $D = 26$ показатели степени в выражении (20) рациональны, но это выражение с помощью подстановок Эйлера не интегрируется.

$\Lambda > 0$ мы получили точные частные решения со степенным законом эволюции масштабного фактора:

$$\begin{aligned} a &= a_0 \sqrt{\tau}, \quad e^{2\phi-2\phi_0} = \tau e^{k\sqrt{\Lambda}\tau}, \\ a_0 &= \sqrt[4]{\frac{36}{\Lambda}}, \quad n = 4, \quad k = \pm 1, \quad \Lambda > 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Для других значений n также существуют аналогичные (29) решения, однако выражения

$$a \simeq a_0 \sqrt{\tau}, \quad e^{2\phi-2\phi_0} \simeq \tau^{\frac{n-2}{2}} e^{k\sqrt{\Lambda}\tau}, \quad a_0^2 = \frac{2(n-1)}{\sqrt{\Lambda}}, \quad \Lambda > 0, \quad (30)$$

являются лишь асимптотическими при $\tau \rightarrow \infty$ [11]. В противоположном пределе $\tau \rightarrow 0$ данные решения имеют асимптотику (25) при $k = \pm 1$ или (26) при $k = -1$ (в случае $k = -1$ возможны две различные упомянутые асимптотики и пограничное между ними решение с $a \simeq \tau$ при всех Λ).

Ниже будет показано, что приведенные здесь решения (29) и (30) в случае $k = 1$ своим поведением при $t \rightarrow \infty$ сильно отличаются от всех остальных решений данного семейства. В случае $k = -1$, напротив, все решения имеют асимптотический вид (30) при $t \rightarrow \infty$.

При анализе решений системы (28) следует отметить наличие на фазовой плоскости aq области

$$nq^2 + \Lambda a^2 - kn(n-1) < 0, \quad (31)$$

в которой подкоренное выражение в (28) или (9) отрицательно. Следовательно, интегральные кривые системы (28) на фазовой плоскости не могут заходить в область (31) и пересекать ее границу – кривую второго порядка.

При $k = 1$ и произвольном фиксированном значении Λ каждая из интегральных кривых системы (28) на фазовой плоскости aq касается упомянутой границы области (31), т.е. данная граница (эллипс при $\Lambda > 0$ или гипербола при $\Lambda < 0$) является огибающей семейства кривых. В точке касания, координаты которой мы обозначим a_0, q_0 , для каждого решения знак перед корнем в выражении (28) меняется с “–” на “+”. Таким образом, каждая интегральная кривая в случае $k = 1$ состоит из двух гладко соединенных в этой точке частей, отвечающих двум упомянутым знакам.

На рис. 3 представлены графики рассматриваемых решений при $k = 1$ на плоскости ta для случая $n = 3$ и различных значений Λ (рис. 3а), а также для случая $n = 4$ при фиксированном значении $\Lambda = 1$ (рис. 3б). Параметр t_0 в (11) выбран так, что $a = 0$ при $t = 0$. В этих условиях кривые на рис. 3б образуют однопараметрическое семейство. Вблизи линий указаны значения параметра, нумерующего кривые семейства, в качестве которого используется величина a_0 , если $q_0 \geq 0$, или максимальное значение a , если $q_0 < 0$ (последняя ситуация реализуется для кривых 4 и 5 на рис. 3б).

На рис. 3а для случая $n = 3$ представлены интегральные кривые $a = a(t)$, отвечающие одному и тому же значению $a_0 = 1$ (для кривой 10 $a = 1$ – максимум) при различных значениях Λ , указанных вблизи этих линий. Мы видим, что значение $\Lambda < 0$ ускоря-

Рис. 3

ет расширение по сравнению со случаем $\Lambda = 0$ (см. рис. 1), а значение $\Lambda > 0$ замедляет. При $\Lambda < \Lambda_{\text{cr}}$ (критическое значение Λ_{cr} положительно и зависит от a_0) расширение имеет необратимый характер, величина a (вместе с ϕ) возрастает до $+\infty$ за конечное время $T = T(a_0, \Lambda)$, причем асимптотическое поведение $a(t)$ при $t \rightarrow T$ имеет вид (26), точнее

$$a \simeq \text{const} \cdot (T - t)^{-\frac{1}{\sqrt{n}}}, \quad e^{2\phi} \simeq \text{const} \cdot (T - t)^{-1 - \sqrt{n}}, \quad t \rightarrow T. \quad (32)$$

Если $\Lambda = \Lambda_{\text{cr}}(a_0)$, то расширение приобретает не ограниченный во времени характер со степенной асимптотикой (30) при $t \rightarrow \infty$. На рис. 3а при $n = 3$ и $a_0 = 1$ критическое значение Λ_{cr} чуть превышает 2.732. При больших Λ характер эволюции меняется — расширение начиная с некоторого момента сменяется сжатием, которое в течение конечного времени $T(a_0, \Lambda)$ завершается обращением a в нуль. Величина $\phi(t)$ в течение данного времени T возрастает от $-\infty$ до максимального значения и затем убывает до $-\infty$. Асимптотика при $t \rightarrow T$ имеет вид (25).

Рис. 3б иллюстрирует тот факт, что критическое (или переходное) степенное решение, имеющее при $n = 4$ вид (29), может быть получено при фиксированном $\Lambda > 0$ с помощью выбора значения параметра a_0 . Малейшее отклонение от критического значения приводит к эволюции в рамках какого-либо из двух упомянутых типов с конечным временем жизни T .

В случае отрицательной пространственной кривизны $k = -1$ и $\Lambda < 0$ каждая интегральная кривая на фазовой плоскости $a\dot{q}$ касается границы запрещенной области (31).

В точке касания a_0, q_0 меняется знак в выражении (28) по аналогии со случаем $k = 1$. Семейство этих кривых для фиксированных $n = 4$, $\Lambda = -1$ и различных значений a_0 (указанных вблизи линий) представлено на рис. 4а.

Рис. 4

Все решения при $\Lambda < 0$ (рис. 4а) характеризуются конечным временем жизни $T(a_0, \Lambda)$ и асимптотикой (32) при $t \rightarrow T$, но их поведение при $t \rightarrow 0$ зависит от a_0 и Λ . Если a_0 не превосходит некоторого критического значения $a_0 = a_{cr}(\Lambda)$, то $a, \phi \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow 0$ в соответствии с (26) (подобно решениям с $\Lambda = 0$ на рис. 2б). В противоположном случае $a_0 > a_{cr}$ имеем $a, e^{2\phi} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$ в соответствии с (25) (сравните с рис. 2а). Эти два случая разделены решением, отвечающим критическому значению $a_0 = a_{cr}$ (рис. 4а). Последнее решение близко к линейному (16) $a \simeq t$, $\phi \simeq \phi_0$ при $t \ll T$.

В случае $k = -1$, $\Lambda > 0$ запрещенная область (31) отсутствует. Решения с различными знаками в (28) связаны обращением времени $t \rightarrow -t$, $q \rightarrow -q$. Таким образом, мы имеем одно семейство решений с бесконечным временем жизни и асимптотикой $a \sim \sqrt{\tau}$ (30) при $t \rightarrow \infty$ [11], которое показано на рис. 4б для $\Lambda = 1$ и $n = 2$. Значения $q = \dot{a}$ в точке $a = a_0 = 1$ нумеруют кривые. Для значений $q < q_{cr}(a_0, \Lambda)$ (здесь $q_{cr} \simeq 1$) решения имеют предел (26) при $t \rightarrow 0$, а для $q > q_{cr}$ — предел (25). Критическое решение при $q = q_{cr}$ близко к линейному $a \simeq t$, $\phi \simeq \phi_0$ при малых t .

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе исследован класс космологических решений фридмановского типа в D -мерной дилатонной гравитационной модели с действием (1). Рассмотрены и классифицированы решения системы (4)–(6) (космологические решения) для различных значений пространственной кривизны $k = 0, \pm 1$ при различных значениях Λ . Они включают в себя как выражения (10)–(13), (16), частные случаи или обобщения которых были получены в работах [6–11], так и новые аналитические решения (20)–(22), (27), (29).

Классифицируя различные типы решений, сведем их для наглядности в таблицу.

k	$\Lambda < 0$	$\Lambda = 0$	$\Lambda > 0$
1	$0 \rightarrow \infty$	$0 \rightarrow \infty$	$0 \rightarrow \infty$ $0 \rightarrow a \simeq a_0 \sqrt{\tau}$ $0 \rightarrow 0$
0	$0 \rightarrow \infty$	$\infty \rightarrow a \simeq a_0 \tau^{-1/\sqrt{n}}$ $a = a_0, \phi = \phi_0$ $0 \rightarrow a \simeq a_0 \tau^{1/\sqrt{n}}$	$\infty \rightarrow a \simeq a_0$ $a = a_0, \phi = \frac{1}{2} \sqrt{\Lambda} \tau$ $0 \rightarrow a \simeq a_0$
-1	$\infty \rightarrow \infty$ $a \simeq \tau \rightarrow \infty$ $0 \rightarrow \infty$	$\infty \rightarrow a \simeq \tau$ $a = \tau, \phi = \phi_0$ $0 \rightarrow a \simeq \tau$	$\infty \rightarrow a \simeq a_0 \sqrt{\tau}$ $a \simeq \tau \rightarrow a \simeq a_0 \sqrt{\tau}$ $0 \rightarrow a \simeq a_0 \sqrt{\tau}$

Символ 0 в таблице означает начало или конец⁴⁾ эволюции с асимптотическим поведением (25) ($a, e^{2\phi} \rightarrow 0$). Символ ∞ отвечает асимптотике $a, \phi \rightarrow +\infty$ вида (26) или (32). Заметим, что в случае $\Lambda < 0$ время жизни дилатонной вселенной всегда конечно, начало и конец эволюции обозначены в таблице упомянутыми символами (при $k = -1$ имеется критическое решение с близким к линейному началу эволюции $a \simeq \tau, \phi \simeq \phi_0$ и с конечным временем жизни).

Другие символы в таблице, обозначающие конец эволюции, соответствуют бесконечному времени жизни и степенному закону эволюции одного из следующих типов: (30) при $a \sim \sqrt{\tau}$; (13), (10)–(12) при $k = 0, \Lambda \geq 0$; (16), (20)–(22) при $k = -1, a \sim \tau$.

При $k = -1, \Lambda > 0$ асимптотику $a_0 \sqrt{\tau}$ (30) имеют все решения [11], а при $k = 1, \Lambda > 0$ данный предел имеет единственное (при фиксированных Λ и t_0) критическое решение, разделяющее различные типы эволюции.

Отметим, что рассмотренные космологические решения обладают одинаковыми качественными особенностями для различных размерностей $n \geq 2$ (случай $D = 2$ эквивалентен случаю $k = 0$). В этом смысле классификация в нашей таблице имеет универсальный характер для всех D .

⁴⁾Напомним, что мы считаем одинаковыми решения, переходящие друг в друга при обращении времени.

Список литературы

- [1] *E. S. Fradkin, A. A. Tseytlin.* Phys. Lett. B. 1985. V. 158. P. 316; *C. G. Callan, D. Friedan, E. J. Martinec, M. J. Perry.* Nucl. Phys. B. 1985. V. 262. P. 593; *C. Lovelace.* Phys. Lett. B. 1984. V. 135. P. 75; Nucl. Phys. B. 1986. V. 273. P. 413.
- [2] *М. Грин, Дж. Шварц, Э. Виттен.* Теория суперструн. Т. 1. М.: Мир, 1990.
- [3] *C. G. Callan, S. B. Giddings, J. A. Harvey, A. Strominger.* Phys. Rev. D. 1992. V. 45. P. R1005; hep-th/9111056.
- [4] *G. W. Gibbons, M. J. Perry.* Int. J. Mod. Phys. D. 1992. V. 1. P. 335; hep-th/9204090.
- [5] *H. Pelzer, T. Strobl.* Class. Q. Grav. 1998. V. 15. P. 3803; gr-qc/9805059.
- [6] *D. Bailin, A. Love.* Phys. Lett. B. 1985. V. 163. P. 135; *D. Bailin, A. Love, D. Wong.* Phys. Lett. B. 1985. V. 165. P. 270; *K. Maeda.* Phys. Rev. D. 1987. V. 35. P. 471; *A. R. Liddle, R. G. Moorhouse, A. B. Henriques.* Nucl. Phys. B. 1989. V. 311. P. 719.
- [7] *R. C. Myers.* Phys. Lett. B. 1987. V. 199. P. 371; *I. Antoniadis, C. Bachas, J. Ellis, D. V. Nanopoulos.* Phys. Lett. B. 1988. V. 211. P. 393; Nucl. Phys. B. 1989. V. 328. P. 117; Phys. Lett. B. 1991. V. 257. P. 278.
- [8] *M. Mueller.* Nucl. Phys. B. 1990. V. 337. P. 37.
- [9] *G. Veneziano.* Phys. Lett. B. 1991. V. 265. P. 287.
- [10] *A. A. Tseytlin.* Mod. Phys. Lett. A. 1991. V. 6. P. 1721.
- [11] *A. A. Tseytlin.* Int. J. Mod. Phys. D. 1992. V. 1. P. 223; hep-th/9203033.
- [12] *A. A. Tseytlin, C. Vafa.* Nucl. Phys. B. 1992. V. 372. P. 443; hep-th/9109048; *A. A. Tseytlin.* Class. Q. Grav. 1992. V. 9. P. 979; hep-th/9112004.
- [13] *M. Gasperini, G. Veneziano.* Astropart. Phys. 1993. V. 1. P. 317; hep-th/9211021.
- [14] *M. Gasperini, G. Veneziano.* Mod. Phys. Lett. A. 1993. V. 8. P. 3701; hep-th/9309023.
- [15] *J. A. Casas, J. García-Bellido, M. Quiros.* Nucl. Phys. B. 1991. V. 361. P. 713; *J. García-Bellido, M. Quiros.* Nucl. Phys. B. 1992. V. 385. P. 558.
- [16] *R. Brustein, G. Veneziano.* Phys. Lett. B. 1994. V. 329. P. 429; hep-th/9403060.
- [17] *S. Behrndt, S. Förste.* Nucl. Phys. B. 1994. V. 430. P. 441; hep-th/9403179.
- [18] *E. J. Copeland, A. Lahiri, D. Wands.* Phys. Rev. D. 1994. V. 50. P. 4868; hep-th/9406216.
- [19] *R. Easther, K. Maeda.* Phys. Rev. D. 1996. V. 54. P. 7572; hep-th/9605173.
- [20] *R. Easther, K. Maeda, D. Wands.* Phys. Rev. D. 1996. V. 53. P. 4247; hep-th/9509074.
- [21] *N. Kaloper, R. Madden, K. A. Olive.* Nucl. Phys. B. 1995. V. 452. P. 677; hep-th/9506027; Phys. Lett. B. 1996. V. 371. P. 34; hep-th/9510117.
- [22] *E. J. Copeland, R. Easther, D. Wands.* Phys. Rev. D. 1997. V. 56. P. 874; hep-th/9701082.
- [23] *T. Barreiro, B. de Carlos, E. J. Copeland.* Phys. Rev. D. 1998. V. 58. P. 083513; hep-th/9805005.
- [24] *J. Ellis, K. Enqvist, D. V. Nanopoulos, M. Quiros.* Nucl. Phys. B. 1986. V. 277. P. 231; *K. Maeda, M. D. Pollack.* Phys. Lett. B. 1986. V. 173. P. 251; *K. A. Olive.* Phys. Rep. 1990. V. 190. P. 307.
- [25] *Г. С. Шаров.* ТМФ. 1994. Т. 101. № 3. С. 458.
- [26] *E. Witten.* Phys. Rev. D. 1991. V. 44. P. 314; *S. Kar.* Phys. Rev. D. 1997. V. 55. P. 4872; *M. O. Katanaev, W. Kummer, H. Liebl.* Phys. Rev. D. 1996. V. 53. P. 5609; gr-qc/9511009.

Поступила в редакцию 27.IV.1999 г.