Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ч. Девчанд, Д. Шифф, Суперсимметричные интегрируемые системы из геодезических потоков на суперконформных группах, *ТМФ*, 2000, том 123, номер 2, 182–188

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf596>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 10:24:10

© 2000 г.

Ч. Девчанд*, Д. Шифф†

СУПЕРСИММЕТРИЧНЫЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ ИЗ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОТОКОВ НА СУПЕРКОНФОРМНЫХ ГРУППАХ

На примерах фермионного расширения уравнения Кортевега–де Фриза и недавнего суперсимметричного обобщения уравнения Камасса–Хольма обсуждается возможная связь между геодезическим потоком, интегрируемостью и суперсимметрией.

1. Миша Савельев был пионером в деле геометрических построений суперсимметричных интегрируемых систем (см., например, [1]). В частности, его особенно интересовала взаимосвязь между интегрируемостью, геометрией, инвариантностью относительно диффеоморфизмов и суперсимметрией. Поэтому нам кажется, что он приветствовал бы наши последние работы, касающиеся: а) смысла понятия интегрируемости для систем, содержащих как бозонные, так и фермионные поля, и б) связи между геодезическими потоками и интегрируемостью. Хотя геодезические потоки, вообще говоря, *не являются* интегрируемыми, многие важные интегрируемые системы оказываются в действительности уравнениями геодезических потоков. Возникает вопрос, можно ли геометрически определить интегрируемые потоки среди геодезических. Этот вопрос, являющийся открытым как для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), так и для дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП), стал особенно актуальным после того, как Арнольд заметил, что уравнения Эйлера для потока несжимаемой жидкости, так же как уравнения Эйлера для волчка, допускают интерпретацию в терминах геодезических потоков на (конечномерной или бесконечномерной) группах Ли. Коротко говоря, скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ определяет право- (или лево-) инвариантную метрику на соответствующей группе Ли G . Уравнение геодезического движения на G относительно этой метрики задается билинейным оператором $B: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, который определяется соотношением

$$\langle [V, W], U \rangle = \langle W, B(U, V) \rangle \quad \forall W \in \mathfrak{g}. \quad (1)$$

Тогда уравнение геодезического потока есть просто уравнение Эйлера

$$U_t = B(U, U). \quad (2)$$

*Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn, Germany. E-mail: devchand@mis.mpg.de

†Department of Mathematics and Computer Science, Bar-Ilan University, Israel. E-mail: schiff@math.biu.ac.il

2. Важный класс примеров, когда геодезический поток действительно является интегрируемым, относится к группе диффеоморфизмов окружности $\text{Diff}(S^1)$. Геодезическое движение относительно метрики, индуцированной нормой $\int u^2 dx$ в L^2 , описывается уравнением Эйлера для одномерной сжимаемой жидкости $u_t = -3uu_x$. Это уравнение имеет неявное решение $ut = (1/3)x + F(u)$, где F – произвольная функция, и описывает крайне неустойчивые ударные волны. Если взять центральное расширение этой группы, т.е. группу Ботта–Вирасоро, то возникает хорошо известное уравнение Кортевега–де Фриза (КдФ), у которого имеются в высшей степени устойчивые решения. Далее, если взять метрику, индуцированную нормой $\int (u^2 + \nu u_x^2) dx$, $\nu \in \mathbb{R}$, в H^1 , то получим уравнение Камасса–Хольма (КХ)

$$u_t - \nu u_{xxt} = -3uu_x + \nu(uu_{xxx} + 2u_x u_{xx}). \quad (3)$$

В последнее время это уравнение вызывает значительный интерес как пример интегрируемой системы (обладающей бигамильтоновой структурой), имеющей, однако, более общие по сравнению с уравнением КдФ волновые решения, такие как решения взрывного характера и класс кусочно-аналитических слабых решений, известных как *пиконы*. (Ссылки можно найти в [2].) Точно не известно, что делает эти геодезические потоки интегрируемыми; уравнение Эйлера для потока жидкости в пространстве размерности более единицы, вообще говоря, *неинтегрируемо*. Исследование семейств геодезических потоков, включающих интегрируемые случаи, возможно, даст ключ к пониманию тех геометрических особенностей, которые обеспечивают интегрируемость. Удобный способ построения таких систем, содержащих, например, уравнения КдФ и КХ, состоит в рассмотрении геодезических потоков на суперконформной группе, содержащей группу Ботта–Вирасоро в качестве четной части. Более того, этот метод позволяет ввести взаимодействие с фермионными полями – чрезвычайно богатое, как мы увидим, обобщение чисто бозонных КдФ- и КХ-систем. Важный вопрос, остаются ли расширенные таким образом системы интегрируемыми, до сих пор как следует не рассматривался.

3. Элементами суперконформной алгебры Неве–Шварца–Рамона являются триплеты $(u(x), \varphi(x), a)$, где u – бозонное поле, φ – фермионное (нечетное) поле и a – константа. Скобка Ли определяется соотношением

$$\begin{aligned} [(u, \varphi, a), (v, \psi, b)] = & \\ = & \left(uv_x - u_x v + \frac{1}{2} \varphi \psi, \quad u \psi_x - \frac{1}{2} u_x \psi - \varphi_x v + \frac{1}{2} \varphi v_x, \right. \\ & \left. \int_{S^1} dx \left(c_1 u_x v_{xx} + c_2 u v_x + c_1 \varphi_x \psi_x + \frac{c_2}{4} \varphi \psi \right) \right), \end{aligned} \quad (4)$$

где c_1, c_2 – константы. Геодезический поток на соответствующей группе относительно метрики типа L^2 , индуцированной нормой вида (с параметром $\alpha \in \mathbb{R}$)

$$\langle (u, \varphi, a), (v, \psi, b) \rangle_{L^2} = \int_{S^1} dx (uv + \alpha \varphi \partial_x^{-1} \psi) + ab, \quad (5)$$

дает однопараметрическое расширение уравнения КдФ

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xxx} - 3uu_x + 2\xi\xi_{xx}, \\ \xi_t &= \frac{1}{\alpha}\xi_{xxx} - \frac{3}{2}u_x\xi - \left(1 + \frac{1}{2\alpha}\right)u\xi_x, \end{aligned} \quad (6)$$

где фермионное поле определяется как $\varphi = \lambda\xi_x$, $\lambda^2 = 4/(3\alpha)$. Вообще говоря, это семейство не является ни интегрируемым, ни суперсимметричным (т.е. не инвариантно относительно преобразований суперсимметрии полей u и ξ вида $\delta u = \tau\xi_x$, $\delta\xi = \tau u$, где τ – нечетный параметр). Хорошо известно, что, кроме случая $\xi = 0$, отвечающего уравнению КдФ, это семейство содержит еще два интегрируемых случая:

1) $\alpha = 1/4$: купер-КдФ-система Купершмидта, которая является бигамильтоновой, но не суперсимметричной;

2) $\alpha = 1$: супер-КдФ-система Матье и Манина–Радуга, которая является суперсимметричной, но не допускает расширения бигамильтоновой структуры системы КдФ.

Интересно отметить, что обе эти специальные системы входят в одно и то же однопараметрическое семейство геодезических потоков [3]. Ранее считалось, что только бигамильтонова КдФ-система может быть интерпретирована как геодезический поток [4].

Обобщение скалярного произведения (5) до скалярного произведения H^1

$$\langle (u, \varphi, a), (v, \psi, b) \rangle_{H^1} = \int_{S^1} dx (uv + \nu u_x v_x + \alpha \varphi \partial_x^{-1} \psi + \alpha \mu \varphi_x \psi) + ab, \quad (7)$$

где μ, ν – дополнительные константы, приводит к уравнениям Эйлера

$$\begin{aligned} u_t - \nu u_{xxt} &= \kappa_1 u_x + \kappa_2 u_{xxx} - 3uu_x + \nu(uu_{xxx} + 2u_x u_{xx}) + 2\xi\xi_{xx} + \frac{2\mu}{3}\xi_x \xi_{xxx}, \\ \xi_t - \mu \xi_{xxt} &= \frac{\kappa_1}{4\alpha}\xi_x + \frac{\kappa_2}{\alpha}\xi_{xxx} - \frac{3}{2}u_x \xi - \left(1 + \frac{1}{2\alpha}\right)u\xi_x + \mu u \xi_{xx} + \\ &+ \frac{3\mu}{2}u_x \xi_{xx} + \frac{\nu}{2}u_{xx} \xi_x. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь κ_1, κ_2 – независимые параметры, определяемые константами a, c_1, c_2 . Перед нами, очевидно, пятипараметрическое семейство систем, содержащее как КХ-систему (3), так и однопараметрическое КдФ-семейство (6). Оно заведомо является гамильтоновым. Вводя новые переменные $m = u - \nu u_{xx}$ и $\eta = \xi - \mu \xi_{xx}$, его можно переписать в виде

$$\begin{pmatrix} m_t \\ \eta_t \end{pmatrix} = \mathcal{P} \begin{pmatrix} \delta \mathcal{H} / \delta m \\ \delta \mathcal{H} / \delta \eta \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где градуированная гамильтонова структура имеет вид

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \kappa_2 \partial_x^3 + \kappa_1 \partial_x - \partial_x m - m \partial_x & \frac{1}{2} \partial_x \eta + \eta \partial_x \\ -\partial_x \eta - \frac{1}{2} \eta \partial_x & \frac{3}{4\alpha} \left(\frac{\kappa_1}{4} + \kappa_2 \partial_x^2 \right) - \frac{3}{8\alpha} m \end{pmatrix}, \quad (10)$$

а гамильтониан компактно выражается в терминах $U = (u, \varphi, 0)$ как

$$\mathcal{H}_2 = \frac{1}{2} \langle U, U \rangle_{H^1} = \frac{1}{2} \int dx \left(u^2 + \nu u_x^2 + \frac{4}{3} (\xi_x \xi + \mu \xi_{xx} \xi_x) \right). \quad (11)$$

Эта конструкция обобщает так называемую *вторую гамильтонову структуру* системы КдФ и ее фермионного расширения, то же самое относится и к системе КХ. *Первая гамильтонова структура* этих систем допускает расширение на системы общего вида (8), однако в указанное пятипараметрическое семейство попадает при этом только купер-КдФ-система. Поэтому никаких бигамильтоновых расширений КХ-системы нет среди систем вида (8). Последние, однако, содержат супер-КХ-систему

$$\begin{aligned} u_t - u_{xxt} &= -3uu_x + 2\xi\xi_{xx} + uu_{xxx} + 2u_xu_{xx} + \frac{2}{3}\xi_x\xi_{xxx}, \\ \xi_t - \xi_{xxt} &= -\frac{3}{2}(u\xi)_x + u\xi_{xxx} + \frac{3}{2}u_x\xi_{xx} + \frac{1}{2}u_{xx}\xi_x \end{aligned} \quad (12)$$

– единственное суперсимметричное расширение системы (3). Она инвариантна относительно преобразований $\delta u = \tau\xi_x$, $\delta\xi = (3/4)\tau u$. Мы привели достаточно нетривиальные аргументы в пользу того, что эта система, возможно, является интегрируемой [2].

4. Смысл понятия интегрируемости для таких систем с фермионами остается несколько неясным. Обычные аргументы в пользу интегрируемости состояли до сих пор, например, в демонстрации существования либо бигамильтоновых структур, либо бесконечного числа сохраняющихся величин. Ни один из этих аргументов не является достаточно надежным. В частности, пример супер-КдФ-системы показывает, что бигамильтоновость, возможно, достаточна, но ни в коей мере не необходима для интегрируемости систем с фермионами. В литературе обсуждался также обобщенный тест Пенлеве для фермионных систем, однако провести достаточно аккуратно анализ для бозонных и фермионных полей, принимающих значения соответственно в четной и нечетной частях некоторой грассмановой алгебры, оказалось не так просто, и в литературе встречаются ошибки. Обычно основополагающая грассманова алгебра понимается как бесконечномерная алгебра с бесконечным числом нечетных образующих. Однако интегрируемость не должна зависеть от выбора этой алгебры; выбирая некоторую алгебру малой размерности с малым числом нечетных образующих, можно получить много полезной информации об общем случае. В частности, рассматривая ряд простейших грассмановых алгебр с одной, двумя, тремя и т.д. образующими, можно получить убедительное доказательство неинтегрируемости данной системы в общем случае. В случае конечного числа нечетных образующих поля разлагаются по базису из полиномов по нечетным образующим. Мы будем говорить об *n-й деконструкции*, если ограничиваемся полиномами по нечетным образующим вплоть до *n*-го порядка. Например, бозонное и фермионное поля в случае *второй деконструкции* принимают значения в грассмановой алгебре с базисом $\{1, \tau_1, \tau_2, \tau_1\tau_2\}$, где τ_1, τ_2 – две нечетные образующие. Они имеют вид

$$u = u_0 + \tau_1\tau_2u_1, \quad \xi = \tau_1w_1 + \tau_2w_2. \quad (13)$$

Такие *деконструированные поля* имеют чисто бозонные компоненты u_0, u_1, w_1, w_2 , в терминах которых анализ становится много прозрачнее. Таким “деконструктивным” образом Мантон [5] недавно исследовал некоторые простые суперсимметричные классические механические системы.

Интегрируемые по Пенлеве случаи для семейства уравнений (16)

Случаи	N	n_i	(a, b, c)	Системы
I	2	$0, 1, 2$	$(0, 0, c)$	Несвязанная система
II	4	$-1, 1, 3$	$(3, 6, 4)$	Купер-КдФ
III	5	$-2, 2, 3$	$(3, 3, 1)$	Супер-КдФ
IV			$(-6, -6, -2)$	
V		$-1, 0, 4$	$(0, 3, 1)$	Потенциальная форма супер-КдФ
VI			$(0, -6, -2)$	Потенциальная форма IV
VII	7	$-3, 2, 4$	$(6, 6, 1)$	Линеаризация: $w = \delta u$
VIII		$-2, 0, 5$	$(0, 6, 1)$	Потенциальная форма VII

Мы исследовали несколько более общее семейство фермионных расширений уравнения КдФ:

$$\begin{aligned} u_t &= -u_{xxx} + 6uu_x - \xi\xi_{xx}, \\ \xi_t &= -c\xi_{xxx} + a\xi u_x + bu\xi_x, \end{aligned} \quad (14)$$

отличающееся от (6) только некоторым рескейлингом переменных. Выбирая простейшую грассманову алгебру с единственной нечетной образующей τ и базисом $\{1, \tau\}$, приходим к взаимодействию поля КдФ u с другим бозонным полем w :

$$u_t = -u_{xxx} + 6uu_x, \quad (15)$$

$$w_t = -cw_{xxx} + awu_x + buw_x, \quad (16)$$

где $\xi = \tau w$. Эта система, будучи чисто бозонной, допускает анализ сингулярностей в духе Вейсса, Табора и Карневале (ВТК). ВТК–Пенлеве-анализ этой простой системы накладывает сильные ограничения на значения констант a, b, c в общей системе уравнений (14), при которых интегрируемость еще возможна.

ВТК-алгоритм для системы уравнений (15), (16) состоит в том, чтобы искать решение в виде рядов Лорана в окрестности произвольного сингулярного многообразия $\phi(x, t) = 0$:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x, t) \phi(x, t)^{n-2}, \quad w(x, t) = \sum_{n=n_1}^{\infty} a_n(x, t) \phi(x, t)^n. \quad (17)$$

Здесь ряд для u есть стандартный ВТК-ряд для уравнения (15) с произвольными b_4, b_6 , остальные коэффициенты b_n находятся рекуррентно. Ряд для w является рядом типа Фробениуса–Фукса с тремя произвольными коэффициентными функциями $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}$

($n_3 > n_2 > n_1$), остальные a_n определяются рекуррентно. Прямым вычислением показывается, что $n_1 + n_2 + n_3 = 3$ и что если $N \equiv n_3 - n_1$ растет, то число условий совместности, необходимых для существования ряда для w , быстро возрастает. Мы рассмотрели все возможные случаи при $N < 10$. При $N = 8, 9$ нет совместных случаев. Приведенная нами таблица совместных случаев при меньших N также очень ограничена. Ясно, что критические вопросы совместности относительно общей системы уравнений (14), возможно, решаются уже при очень простой первой деконструкции. В частности, неинтегрируемость проявляется, по-видимому, очень рано.

Как видно из таблицы, большая часть случаев, удовлетворяющих тесту Пенлеве, вполне ожидаема. Это первая деконструкция купер-КдФ-системы II и супер-КдФ-системы III, причем так называемая *потенциальная форма* последней имеет решения, задаваемые формулой $w_V = \int w_{III}$, а также два тривиальных случая: несвязанная система I и линеаризация КдФ-системы, где w обозначает вариацию δu . По-существу, неожиданным является только случай IV вместе со своей потенциальной формой VI.

Переходя ко второй деконструкции с двумя нечетными образующими и полями, имеющими структуру (13), заметим, что, за исключением удвоения w , единственное важное изменение заключается в добавлении к системе уравнений (15), (16) дополнительного уравнения для u_1 — “души” u —

$$u_{1t} = -u_{1xxx} + 6(u_0 u_1)_x - w_{[1} w_2]_{xx}, \quad (18)$$

где u_0 удовлетворяет уравнению (15), а w_1, w_2 являются решениями уравнения (16). Пенлеве-анализ этой системы приносит главную неожиданность: u_1 *содержит лидирующий член ϕ^{-3}* ! Таким образом, взаимодействие фермионов с КдФ-системой существенно меняет сингулярность решений. В литературе всегда ошибочно считалось, что лидирующим членом в лорановском разложении решения является полюс второго порядка, как и для уравнения КдФ без взаимодействия. Одновременно это показывает, насколько конструктивным аналитическим инструментом является деконструкция при исследовании систем с фермионами. Единственными случаями в вышеприведенной таблице, которые не удовлетворяют тесту Пенлеве при второй деконструкции, являются неожиданные случаи IV и VI. Поэтому эти случаи, вообще говоря, не отвечают новым интегрируемым фермионным расширениям КдФ-системы. Однако первая деконструкция заведомо интегрируема по Пенлеве. Это демонстрирует еще одно важное преимущество метода деконструкции: он обеспечивает простой способ построения интегрируемых взаимодействий для заведомо интегрируемых систем.

5. При многообразии выбора подходящей грассмановой алгебры как супер-КХ-система (12), так и интегрируемые случаи уравнений (14) доставляют весьма богатый класс решаемых систем. Более того, они включают в себя некоторые важные классические ОДУ в качестве редукций. Например, в галилеевой системе отсчета, если все поля зависят только от одной переменной $z = x - vt$, уравнение КХ (как и уравнение КдФ) соответствует известному уравнению

$$p'^2 = 1 - 2c_1 p + c_2 p^2 - \frac{2}{v} p^3, \quad (19)$$

где c_1, c_2 — константы интегрирования. Это уравнение имеет хорошо известное решение, выражающееся через $\wp$ -функцию Вейерштрасса:

$$p(z) = -2v\wp(z) + \frac{1}{6}c_2v, \quad (20)$$

периоды $\wp$ определяются коэффициентами c_1, c_2, v . В этой галилеевой системе отсчета первая и вторая деконструкции супер/купер-КдФ-систем, для которых уравнение (19) является “телом”, оказываются специальными случаями уравнения Ламе, вызывающего интерес уже более ста лет. Например, в случае супер-КдФ-системы первая деконструкция приводит к уравнению

$$w(z)'' - \left(6\wp(z - z_0) - \frac{v}{2}\right)w(z) = d, \quad d = \text{const}. \quad (21)$$

В [2] нами было показано, что в случае новой супер-КХ-системы первая деконструкция и галилеева редукция второй деконструкции удовлетворяют требованиям теста Пенлеве. Поэтому они являются нетривиальными интегрируемыми редукциями супер-КХ-системы (12). При этом попутно нам встретились дальнейшие интегрируемые обобщения уравнения Ламе, которые, по-видимому, являются новыми. При первой деконструкции фермионное уравнение допускает галилееву редукцию вида

$$h'' + \frac{3}{8} \left(\frac{p}{v} - \frac{c_2}{6} + \frac{c_1}{p} - \frac{7}{2p^2} \right) h = 0, \quad (22)$$

а “душа” бозонного уравнения при второй деконструкции приводит к уравнению

$$k'' + \left(\frac{3p}{v} - \frac{c_2}{4} - \frac{3}{4p^2} \right) k = 0, \quad (23)$$

где в обоих случаях функция p дается линейным по $\wp$ выражением (20). В заключение заметим, что интегрируемость ДУЧП не является альтернативой “все или ничего”. Даже если супер-КХ-система оказывается неинтегрируемой в общем случае, мы продемонстрировали, что она все же проявляет нетривиальные свойства интегрируемости, и было бы интересно выяснить ту геометрию, которая лежит в основе наших аналитических результатов.

Список литературы

- [1] *M. V. Saveliev*. Commun. Math. Phys. 1984. V. 95. P. 199–216.
- [2] *C. Devchand, J. Schiff*. The supersymmetric Camassa–Holm equation and geodesic flow on the superconformal group, solv-int/9811016; J. Math. Phys. (to appear).
- [3] *C. Devchand, J. Schiff*. The deconstruction of fermionic KdV systems (under preparation).
- [4] *В. Ю. Овсиенко, Б. А. Хесин*. Функц. анализ и его прилож. 1987. Т. 21. № 4. С. 81–82.
- [5] *N. S. Manton*. J. Math. Phys. 1999. V. 40. P. 736–750; hep-th/9806077.