Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Белов, Ф. Н. Литвинец, А. Ю. Трифонов, Ква-
зиклассические спектральные серии оператора типа
Хартри, отвечающие точке покоя классической систе-
мы Гамильтона–Эренфеста, *ТМФ*, 2007, том 150, но-
мер 1, 26–40

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf5964>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 16:12:21

© 2007 г. В. В. Белов*, Ф. Н. Литвинец†, А. Ю. Трифонов†

КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ СЕРИИ ОПЕРАТОРА ТИПА ХАРТРИ, ОТВЕЧАЮЩИЕ ТОЧКЕ ПОКОЯ КЛАССИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ГАМИЛЬТОНА–ЭРЕНФЕСТА

Рассмотрены классические уравнения движения относительно квантовых средних – система Гамильтона–Эренфеста. В рамках основанного на этих уравнениях ковариантного подхода в квазиклассическом приближении построены спектральные серии для нелинейного оператора типа Хартри, отвечающие точке покоя.

Ключевые слова: метод комплексного ростка, спектральные серии, уравнение Хартри.

1. ВВЕДЕНИЕ

Предметом исследования статьи является спектральная задача для нелинейного оператора Хартри в квазиклассическом приближении

$$\hat{H}_{\varkappa}\Psi = E\Psi, \quad \|\Psi\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = 1, \quad (1)$$

где самосопряженный в $L_2(\mathbb{R}^n)$ оператор типа Хартри действует по формулам

$$\hat{H}_{\varkappa}\Psi = H(\hat{z})\Psi + \varkappa\hat{V}(\Psi)\Psi, \quad (2)$$

$$\hat{V}(\Psi) = \int_{\mathbb{R}^n} dy \Psi^*(y)V(\hat{z}, \hat{w})\Psi(y). \quad (3)$$

Здесь $\hat{z} = (-i\hbar\nabla_x, x)$, $\hat{w} = (-i\hbar\nabla_y, y)$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, самосопряженные в $L_2(\mathbb{R}^n)$ операторы $H(\hat{z})$, $V(\hat{z}, \hat{w})$ являются гладкими функциями от некоммутирующих операторов и упорядочены по Вейлю [1], [2], Ψ^* – комплексно сопряженная к Ψ функция, $\varkappa$ и $\hbar$ – вещественные параметры, $\hbar \in [0, 1]$ – “малый” параметр. Важным является

*Московский институт электроники и математики, Москва, Россия.
E-mail: pm@miem.edu.ru

†Томский политехнический университет, Томск, Россия.
E-mail: litvinets@mph.phtd.tpu.edu.ru, trifonov@phtd.tpu.edu.ru

частный случай уравнения (1), когда вейлевские символы операторов в (2), (3) имеют вид $H(z) = p^2/2 + U(x)$, $p \in \mathbb{R}^n$, $V(z, w) = V(x, y)$, и уравнение (1) записывается в виде

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2} \Delta + U(x) + \varkappa \int_{\mathbb{R}^n} V(x, y) |\Psi(y)|^2 dy \right] \Psi = E \Psi. \quad (4)$$

Это уравнение самосогласованного поля во внешнем поле с потенциалом $U(x)$ и потенциалом самодействия $V(x, y)$ играет фундаментальную роль в квантовой теории и нелинейной оптике [3], в частности, в теории бозе-эйнштейновского конденсата [4] и при описании коллективных возбуждений в молекулярных цепочках и в молекулах ДНК [5].

В линейной теории (когда в (1) $\varkappa = 0$) аппарат квазиклассических асимптотик, возникший практически одновременно с квантовой механикой, позволяет обосновать важный для физической теории принцип соответствия [6] квантовых и классических задач. В определенном смысле математическое обоснование принципа соответствия дает теория Маслова [7], охватывающая наряду со спектральными задачами задачу с начальными данными и задачу рассеяния (см. также [8]).

Одним из важнейших моментов квазиклассического приближения является сведение построения квазиклассического решения квантовой задачи к исследованию решений уравнений движения соответствующей классической системы, ее геометрических и топологических характеристик. Для “линейной” квантовой механики ($\varkappa = 0$ в (1)) соответствующая классическая система – это *априори гамильтонова система* в фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ с канонической 2-формой $dp \wedge dx$ и гамильтонианом $H(z)$, $z = (p, x)$, – символом оператора $H(\hat{z})$. В качестве геометрических объектов фазового пространства, порождающих квазиклассические ответы, выступают изотропные подмногообразия Λ^k , $(dp \wedge dx)|_{\Lambda^k} = 0$, размерности k , $0 \leq k \leq n$, где n – размерность конфигурационного пространства.

В спектральных задачах квазиклассические собственные функции и собственные значения (спектральные серии, или *квазимоды* [9], [10]) можно сопоставить компактным Λ^k лишь при условии их инвариантности относительно фазового потока g_H^t ($\Lambda^k = g_H^t(\Lambda^k)$). При этом в маломерном случае, т.е. при $k < n$, инвариантные изотропные подмногообразия должны удовлетворять дополнительному условию типа условия устойчивости. На геометрическом языке это означает существование инвариантного комплексного ростка Маслова r^n над Λ^k [10], образованного комплексными траекториями линеаризованной системы в окрестности Λ^k . В простейшем случае $k = 0$, когда Λ^0 – устойчивая точка покоя гамильтонова векторного поля $J \nabla_z H(z)$, метод построения соответствующих квазимод на основе комплексного ростка (канонического оператора Маслова с комплексной квадратичной фазой [9], [10]), разумеется, эквивалентен известному в физике методу осцилляторного приближения в окрестности точки Λ^0 . В случае замкнутой фазовой кривой Λ^1 ($k = 1$) условие орбитальной устойчивости Λ^1 (условие существования комплексного ростка r^n над Λ^1) эквивалентно существованию базиса Флоке решений соответствующей системы в вариациях, косоортогональных касательному вектору к кривой Λ^1 [10].

Обобщение рассмотренных конструкций на случай нелинейных квантовых систем *заведомо нетривиально*, поскольку сама постановка задачи о соответствии “классический” уже является проблематичной, так как неясно (в отличие от линейного случая),

что понимать под уравнениями классической механики, отвечающей в пределе $\hbar \rightarrow 0$ заданной квантовой теории с нелинейным гамильтонианом $\hat{H}_\kappa$ (2).

Ответ на этот вопрос зависит, по видимому, от класса функций, в котором строятся асимптотические разложения решения уравнения (1), и от свойств гладкости символов оператора $\hat{H}_\kappa$. Так, например, для уравнения (4) с сингулярным потенциалом самодействия $V(x, y)$ кулоновского типа квазимоды, сосредоточенные при $\hbar \rightarrow 0$ вблизи маломерных подмногообразий в $\mathbb{R}^n$, были получены в [11] на основе “сингулярного” варианта метода ВКБ с помощью эталонных уравнений.

Для общего оператора типа Хартри (2) с гладкими символами $H(z)$, $V(z, w)$ удалось в рамках ковариантного подхода, развитого в цикле работ [12]–[15] вывести классические уравнения движения, определяющие квазиклассические асимптотики с точностью $O(\hbar^{3/2})$ (далее будем писать $(\text{mod } \hbar^{3/2})$) нестационарной задачи

$$i\hbar\Psi_t = \hat{H}_\kappa\Psi, \quad \|\Psi\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = 1, \quad (5)$$

$$\Psi|_{t=0} = \Psi_0(x, \hbar) \quad (6)$$

в так называемом классе функций $P_\hbar^t$, квазиклассически сосредоточенных при $\hbar \rightarrow 0$ на заданной кривой $x = X(t, \hbar) \in \mathbb{R}_x^n$, регулярно зависящей от малого параметра $\hbar$ [16].

Напомним определение указанного выше класса функций (см., например, [12]). Пусть $Z(t, \hbar) = (P(t, \hbar), X(t, \hbar))$ – произвольное гладкое однопараметрическое ($\hbar$ – параметр) семейство фазовых траекторий в $\mathbb{R}^{2n}$. Тогда

$$P_\hbar^t = \left\{ \Phi, \Phi = \phi\left(\frac{x - X(t, \hbar)}{\sqrt{\hbar}}, t\right) \exp\left[\frac{i}{\hbar}(S(t, \hbar) + \langle P(t, \hbar), x - X(t, \hbar) \rangle)\right] \right\}, \quad (7)$$

где $S(t, \hbar)$ – вещественная гладкая по t и $\hbar$ функция, $S(0, \hbar) = 0$, и функция $\phi(\xi, t)$ по переменной $\xi \in \mathbb{R}^n$ принадлежит пространству Шварца $S(\mathbb{R}^n)$.

Как показано в [12], [13], асимптотические $(\text{mod } \hbar^{3/2})$ решения задачи (5) определяются решениями системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно динамических переменных $z = (p, x) \in \mathbb{R}^{2n}$ и переменных $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_k, \dots, \eta_M) \in \mathbb{R}^M$, $M = n(2n + 1)$, смысл которых будет пояснен ниже. Набор этих переменных η удобно представить в виде блочной $(2n \times 2n)$ -симметричной матрицы

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_1 & \Delta_2 \\ \Delta_3 & \Delta_4 \end{pmatrix}, \quad \Delta_1^T = \Delta_1, \quad \Delta_4^T = \Delta_4, \quad \Delta_2^T = \Delta_3, \quad (8)$$

где A^T – матрица, транспонированная к A . Определим в расширенном фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^M$ функцию Гамильтона с самодействием

$$H^\kappa(z, w, \Delta) = H(z) + \kappa V(z, w, t) + \frac{1}{2} \text{Sp}[(H''_{zz}(z) + \kappa V''_{zz}(z, w) + \kappa V''_{ww}(z, w))\Delta]. \quad (9)$$

Здесь через $H''_{zz}(z)$ и $V''_{ww}(z, w)$ обозначены $(2n \times 2n)$ -матрицы вторых производных функций $H(z)$ и $V(z, w)$ по переменным $z = (p, x)$ и $w = (p_y, y)$. Определим симметричную $(2n \times 2n)$ -матрицу

$$M_\kappa(z) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} H^\kappa(z, z, 0) = H_{zz}(z) + \kappa V_{zz}(z, w)|_{w=z}. \quad (10)$$

Тогда классическая система, отвечающая оператору Хартри $\hat{H}_\varkappa$ (2) и названная в [12], [13] системой Гамильтона–Эренфеста, имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{z} &= J \nabla_z H^\varkappa(z, w, \Delta)|_{w=z}, \\ \dot{\Delta} &= J M_\varkappa(z) \Delta - \Delta M_\varkappa(z) J, \quad \Delta^T = \Delta. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь J – стандартная симплектическая матрица, $J = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}$, $E = \|\delta_{ij}\|_{n \times n}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В линейном случае (при $\varkappa = 0$) система (11) является пуассоновой системой относительно (вырожденной) нелинейной скобки Дирака [17]. При $\varkappa \neq 0$ вопрос о свойствах гамильтоновости системы (11) требует дополнительного исследования.

Физическое “обоснование” того, что систему (11) можно считать классической системой, отвечающей квантовой системе с гамильтонианом $\hat{H}_\varkappa$ (2), основано на следующей концепции, лежащей в основе ковариантного подхода [18] (эта концепция обобщает первоначальный подход Эренфеста [6] к проблеме вывода классических уравнений движения в приближении $\hbar \rightarrow 0$ из уравнения Шредингера). Под фазовой классической траекторией в $\mathbb{R}^{2n}$ квантовой частицы, находящейся в состоянии $\Psi(x, t, \hbar)$, где $\Psi(x, t, \hbar)$ – решение уравнения (5), понимается вектор-функция $z^\Psi(t, \hbar) = (P(t, \hbar), X(t, \hbar))$, компоненты которой суть средние значения операторов координат и импульсов в состоянии Ψ : $P(t, \hbar) = \langle \Psi, -i\hbar \nabla \Psi \rangle$, $X(t, \hbar) = \langle \Psi, x \Psi \rangle$, $x \in \mathbb{R}^n$. Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в $L_2(\mathbb{R}^n)$. Если приближенное или точное решение $\Psi(x, t, \hbar) \in P_\hbar^t$, то в системе Гамильтона–Эренфеста (11) дополнительные по отношению к $(p, x) \in \mathbb{R}^{2n}$ динамические переменные η_k , $k = 1, \dots, M$, учитывают в первом приближении по $\hbar \rightarrow 0$ квадратичные квантовые флуктуации координат и импульсов около их предельных значений $X(t, 0)$, $P(t, 0)$. В частности, начальные данные Коши $\Psi_0 \in P_\hbar^0$ для уравнения (5) индуцируют следующие начальные условия для системы (11):

$$x|_{t=0} = x_0(\hbar) = \langle \Psi_0, x \Psi_0 \rangle, \quad p|_{t=0} = p_0(\hbar) = \langle \Psi_0, -i\hbar \nabla \Psi_0 \rangle, \quad (12)$$

$$\Delta|_{t=0} = \Delta(\Psi_0), \quad (13)$$

где $\Delta(\Psi_0)$ – матрица квантовых центрированных моментов второго порядка для операторов $(-i\hbar \nabla)$, $x \in \mathbb{R}^n$, в состоянии Ψ_0 . Это означает, что $(n \times n)$ -блоки матрицы $\Delta|_{t=0}$ имеют вид

$$\Delta_4 = \sigma_{xx}(\Psi_0), \quad \Delta_1 = \sigma_{pp}(\Psi_0), \quad \Delta_2 = \sigma_{px}(\Psi_0), \quad \Delta_3 = \sigma_{px}^T(\Psi_0),$$

где

$$\sigma_{AB} = \frac{1}{2} \langle \Delta \hat{A} \Delta \hat{B} + \Delta \hat{B} \Delta \hat{A} \rangle, \quad \Delta \hat{A} = \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle, \quad \Delta \hat{B} = \hat{B} - \langle \hat{B} \rangle.$$

Через $\langle \hat{A} \rangle$ обозначено среднее значение оператора $\hat{A}$ с символом A в состоянии Ψ_0 : $\langle \hat{A} \rangle = \langle \Psi_0 | \hat{A} | \Psi_0 \rangle$.

Нетрудно установить (см. [16]), что на функциях из класса $P_\hbar^0$ матрица $\Delta(\Psi_0)$ имеет порядок $O(\hbar)$, $\hbar \rightarrow 0$. Таким образом, решения классической системы (11),

определяющие квазиклассическую асимптотику решения задачи (5), сами, в свою очередь, зависят регулярным образом от малого параметра $\hbar$ квазиклассического приближения в квантовой задаче. Этот факт имеет принципиальное значение для построения квазимод оператора типа Хартри (2) в рамках ковариантного подхода.

Классическая система Гамильтона–Эренфеста (11) позволяет теперь определить (как и в линейном случае) однопараметрическое семейство $\Lambda^k(\hbar)$, $0 \leq k \leq n$, инвариантных геометрических объектов в фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^M$, которые можно проквантовать в квазиклассическом приближении с точностью до $O(\hbar^{3/2})$, т.е. сопоставить им спектральные серии задачи (1) – числа E_ν и функции $\Psi_\nu(x, \hbar)$ такие, что $\hat{H}_\kappa \Psi_\nu = E_\nu \Psi_\nu + O(\hbar^{3/2})$, $\hbar \rightarrow 0$, $\|\Psi_\nu\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = 1$, ν – мультииндекс длины n . В простейших случаях это точки покоя $\Lambda^0(\hbar)$ системы (11) или ее замкнутые траектории $\Lambda^1(\hbar)$.

Цель этой работы – квазиклассическое квантование точек покоя системы Гамильтона–Эренфеста, ассоциированной с нелинейным гамильтонианом $\hat{H}_\kappa$, при следующих условиях на вейлевские символы операторов $H(z)$, $V(z, w)$ в (2), (3): функции $H(z)$ и $V(z, w)$ являются C^∞ -гладкими функциями и вместе со своими производными по z и w растут при $|z| \rightarrow \infty$ и $|w| \rightarrow \infty$ не быстрее, чем полином, т.е. для любых мультииндексов $\alpha, \mu \in \mathbb{Z}_+^{2n}$ существуют постоянные $C_\alpha > 0$, $C_{\alpha\mu} > 0$ и $m > 0$ такие, что выполняются неравенства

$$\left| \frac{\partial^{|\alpha|} H(z)}{\partial z^\alpha} \right| \leq C_\alpha (1 + |z|)^m, \quad \left| \frac{\partial^{|\alpha+\mu|} V(z, w)}{\partial z^\alpha \partial w^\mu} \right| \leq C_{\alpha\mu} (1 + |z|)^m (1 + |w|)^m. \quad (14)$$

Здесь

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n}), \quad \alpha_j \geq 0, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{2n}, \quad \alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!,$$

$$z^\alpha = z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \dots z_{2n}^{\alpha_{2n}}, \quad \frac{\partial^{|\alpha|} V(z)}{\partial z^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|} V(z)}{\partial z_1^{\alpha_1} \partial z_2^{\alpha_2} \dots \partial z_{2n}^{\alpha_{2n}}}.$$

Основная идея построения соответствующих квазимод заключается в том, чтобы найти асимптотическое решение $\Psi(x, t, \hbar) \in P_h^t$ задачи Коши (5), зависящее от времени по гармоническому закону: $\Psi(x, t, \hbar) = \exp[i\lambda t/\hbar] \Psi_\lambda(x, \hbar)$. Ясно, что тогда пара (λ, Ψ_λ) есть квазимода оператора $\hat{H}_\kappa$.

Оказывается, что это можно сделать, если использовать так называемые траекторно-когерентные состояния нестационарного уравнения типа Хартри [12], [13]. Они отвечают специальному выбору амплитуды в начальном условии (6). А именно, в качестве $\phi_0\left(\frac{x-x_0}{\sqrt{\hbar}}\right)$ следует выбрать счетный набор фоковских состояний Φ_ν , $\nu \in \mathbb{Z}_n^+$, многомерного осциллятора [19], параметризованных комплексной симметричной матрицей с положительной мнимой частью. В разделе 2 мы приводим, следуя общей схеме из [12], [13], алгоритм построения соответствующего $(2n + M)$ -параметрического семейства $\Psi_\nu(x, \hbar)$ таких решений. Этот алгоритм при каждом фиксированном ν сопоставляет решению $y_\nu(t, \Psi_0) = (P(t, \hbar), X(t, \hbar), \Delta_\nu(t, \hbar))$ задачи Коши для системы Гамильтона–Эренфеста (11)–(13) (при $\Psi_0 = \exp\left[\frac{i}{\hbar}\langle p_0, (x - x_0) \rangle\right] \Phi_\nu$ в (6)) асимптотические (mod $\hbar^{3/2}$) решения, которые мы обозначим здесь через $\Psi(x, t, \hbar, y_\nu(t, \Psi_0)) = \Psi_\nu(x, t)$. Параметры семейства этих решений однозначно определяются (см. раздел 3) из требования, чтобы решение $y_\nu(t, \Psi_0)$ было стационарным, т.е. являлось точкой покоя системы Гамильтона–Эренфеста. В этом случае

$\Psi_\nu(x, t)$ – циклические по времени решения. Оказывается, что существование точек покоя системы (11) эквивалентно устойчивости системы в вариациях с самодействием, возникающей в ковариантном подходе, и это представляет собой аналог условия устойчивости точек покоя гамильтоновой системы в линейной теории. В разделе 3 мы формулируем основной результат работы и приводим явные формулы соответствующих квазимод, а в разделе 4 рассматриваем ряд примеров, иллюстрирующих эти формулы.

2. КОНСТРУКЦИЯ ТРАЕКТОРНО-КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЙ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ХАРТРИ

Вначале опишем счетный ортонормированный набор начальных данных $\Psi_\nu(x, \hbar) \in P_\hbar^0$ (ν – мультииндекс, $\nu \in \mathbb{Z}_+^n$) для уравнения (5), порождающих асимптотические (mod $\hbar^{3/2}$) решения $\Psi_\nu(x, t, \hbar) \in P_\hbar^t$, которые мы называем *траекторно-когерентными состояниями нелинейного уравнения типа Хартри* по аналогии с линейной теорией [16]. Для линейных квантовомеханических уравнений (Шредингера, Клейна–Гордона, Паули и Дирака–Паули) траекторно-когерентные состояния были построены в работах [20].

Пусть фиксированы точка $(p_0, x_0) \in \mathbb{R}^{2n}$ и две комплексные матрицы B_0, C_0 , удовлетворяющие условиям

$$B_0^T C_0 - C_0^T B_0 = 0, \quad B_0^+ C_0 - C_0^+ B_0 = 2iE, \quad E = \|\delta_{ij}\|_{n \times n}. \quad (15)$$

Определим набор функций $\Psi_\nu(x, \hbar) = \Psi_\nu(x, \hbar, x_0, p_0, B_0, C_0)$, $\nu \in \mathbb{Z}_+^n$, зависящий от параметров x_0, p_0, B_0, C_0 , формулами

$$\Psi_\nu(x, \hbar) = N_\nu \exp \left[\frac{i}{\hbar} \langle p_0, x - x_0 \rangle \right] \Phi_\nu(x, \hbar), \quad (16)$$

$$\Phi_\nu(x, \hbar) = \exp \left[\frac{i}{2\hbar} \langle x - x_0, B_0 C_0^{-1} (x - x_0) \rangle \right] \frac{1}{\sqrt{\det C_0}} [\hat{\Lambda}^+(0)]^\nu 1. \quad (17)$$

Здесь N_ν – нормировочная постоянная, $N_\nu = (\sqrt{2})^{-|\nu|} (\pi \hbar)^{-n/4} / \sqrt{\nu!}$, $[\hat{\Lambda}^+(0)]^\nu = [\hat{\Lambda}_1^+]^{\nu_1} [\hat{\Lambda}_2^+]^{\nu_2} \dots [\hat{\Lambda}_n^+]^{\nu_n}$, где $\hat{\Lambda}_j^+$, $j = 1, 2, \dots, n$, – обобщенные операторы рождения (см. [16]), отвечающие матрицам B_0, C_0 ,

$$\hat{\Lambda}_j^+ = \frac{1}{\sqrt{\hbar}} (\langle z_j^*, \hat{p} \rangle - \langle w_j^* - B_0 C_0^{-1} z_j^*, x - x_0 \rangle), \quad (18)$$

а $z_j, w_j, j = 1, 2, \dots, n$, – вектор-столбцы матриц C_0 и B_0 , соответственно. Звездочка над вектором означает комплексное сопряжение. Нетрудно проверить, что в силу свойств (15) матрица $B_0 C_0^{-1}$ существует, симметрична и имеет положительную мнимую часть $\text{Im } B_0 C_0^{-1} = (C_0^+ C_0)^{-1}$. При этом операторы $\hat{\Lambda}_j^+$ попарно коммутируют друг с другом, и, следовательно, действие оператора $\hat{\Lambda}^+$ на 1 не зависит от порядка действия компонент вектор-оператора $\hat{\Lambda}^+(0) = (\hat{\Lambda}_1^+, \hat{\Lambda}_2^+, \dots, \hat{\Lambda}_n^+)$.

Отметим, что набор функций Ψ_ν , $\nu \in \mathbb{Z}_+^n$, также как и фоковский базис функций Φ_ν , $\nu \in \mathbb{Z}_+^n$, образует ортонормированный базис в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$ [16], причем, $[\hat{\Lambda}^+(0)]^\nu 1$ есть операторное представление многомерных полиномов Эрмита $H_\nu(\xi)$,

порожденных матрицей $W_0 = -C_0^+(C_0^{-1})^T$ [21]. Здесь $\xi = -i\sqrt{2/\hbar}C_0^{-1}\Delta x$, $\Delta x = x - x_0$.

Как уже отмечалось во введении, квазиклассические асимптотики задачи (5), (6) однозначно определяются по решениям соответствующей системы Гамильтона–Эренфеста. Обозначим через $y(t, \Psi_\nu(0)) = (P(t, \hbar), X(t, \hbar), \Delta(t, \hbar)) \in \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^M$ гладкое однопараметрическое семейство решений системы (11) на интервале $[0, T]$ с начальными данными (12), (13), в которых $p_0(\hbar) = p_0$, $x_0(\hbar) = x_0$, а матрица дисперсий $\Delta(\Psi_0)$, вычисленная по состояниям $\Psi_0 = \Psi_\nu(x, \hbar)$ (16), имеет элементы

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}(\Psi_\nu) &= \frac{\hbar}{4}[C_0 D_\nu C_0^+ + C_0^* D_\nu C_0^T], \\ \sigma_{pp}(\Psi_\nu) &= \frac{\hbar}{4}[B_0 D_\nu B_0^+ + B_0^* D_\nu B_0^T], \\ \sigma_{px}(\Psi_\nu) &= \frac{\hbar}{4}[B_0 D_\nu C_0^+ + B_0^* D_\nu C_0^T].\end{aligned}\quad (19)$$

Здесь D_ν – диагональная матрица, $D_\nu = \|(2\nu_j + 1)\delta_{kj}\|_{n \times n}$. Тогда согласно общим конструкциям ковариантного подхода [16] решение задачи (5), (6) с $\Psi|_{t=0} = \Psi_\nu(x, \hbar)$ из (16) на интервале $[0, T]$ представляется в следующем виде:

$$\begin{aligned}\Psi_\nu(x, t) &= N_\nu \exp\left[\frac{i}{\hbar}S_\varkappa(t, \hbar)\right] \exp\left[\frac{i}{\hbar}\langle P(t, \hbar), x - X(t, \hbar) \rangle\right] \times \\ &\times \exp[\langle x - X(t, \hbar), BC^{-1}(t)(x - X(t, \hbar)) \rangle] \frac{1}{\sqrt{\det C(t)}} [\hat{\Lambda}^+(t)]^\nu 1.\end{aligned}\quad (20)$$

Здесь вещественная классическая часть фазы есть

$$\begin{aligned}S_\varkappa(t, \hbar) &= \int_0^t [\langle P, \dot{X} \rangle(\tau, \hbar) - H(P(\tau, \hbar), X(\tau, \hbar))] d\tau - \\ &- \varkappa \int_0^t \left[V(z(\tau, \hbar), z(\tau, \hbar)) + \frac{1}{2} \text{Sp}(V''_{ww}(z(\tau, \hbar), z(\tau, \hbar))\Delta(\tau, \hbar)) \right] d\tau,\end{aligned}\quad (21)$$

$Z(t, \hbar) = (P(t, \hbar), X(t, \hbar)) \in \mathbb{R}^{2n}$, а вектор-оператор $\hat{\Lambda}^+(t)$ определяется формулой (18) при замене матриц B_0 и C_0 на матрицы $B(t)$ и $C(t)$, соответственно. Остается описать преобразование $(B_0, C_0) \rightarrow (B(t), C(t))$. Оно возникает в процессе построения решения системы Гамильтона–Эренфеста (из уравнения относительно Δ в (11)) в виде регулярного ряда теории возмущений по параметру $\hbar \rightarrow 0$ с точностью до $O(\hbar^{3/2})$. Дело в том, что для построения главного члена асимптотики (mod $\hbar^{3/2}$) уравнения (5) в форме (20) вместо *точного* решения системы (11)–(13) достаточно использовать ее приближенное по $\hbar \rightarrow 0$ решение $z(t, \hbar) = z^0(t) + \hbar z^1(t) + O(\hbar^{3/2})$ и $\Delta^0 = \Delta^0(t, \hbar)$ – главный член разложения $\Delta(t, \hbar)$, имеющий, как мы отмечали во введении, порядок $O(\hbar)$ (см. также формулы (19) для $\Delta^0(0, \hbar)$). Выпишем соответствующие уравнения для $z^0(t)$, $z^1(t)$ и $\Delta^0(t, \hbar)$:

$$\dot{z}^0 = J(H_z(z^0) + \varkappa V_z(z^0, z^0)), \quad z^0(0) = (p_0, x_0), \quad (22)$$

$$\dot{z}^1 = JM_z(z^0)z^1 + F(z^0, \Delta^0), \quad z^1(0) = 0, \quad (23)$$

$$\dot{\Delta}^0 = JM_\varkappa(z^0)\Delta^0 - \Delta^0 M_\varkappa(z^0)J, \quad \Delta^0|_{t=0} = \Delta(\Psi_\nu), \quad (24)$$

где $F(z, \Delta) = J \nabla_z \text{Sp}[(H_{zz}(z) + \varkappa V_{zz}(z, z) + \varkappa V_{zw}(z, z))\Delta]/2\hbar$, $M_z(z_0) = M_\varkappa(z_0) + \varkappa V_{zw}(z_0, z_0)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $A(t)$ – матрица Коши системы

$$\dot{A} = JM_\varkappa(z^0(t))A(t), \quad A(0) = E_{2n}, \quad (25)$$

где $E_{2n} = \|\delta_{ij}\|_{2n \times 2n}$. Тогда решение задачи Коши (24) определяется формулой

$$\Delta^{(0)}(t, \hbar) = A(t)\Delta(\Psi_\nu)A^+(t). \quad (26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО утверждения производится прямыми вычислениями и является, по существу, отражением того факта, что уравнение (24) относительно матрицы $\Delta^0 J$ есть известное уравнение Лакса в методе обратной задачи (см., например, [22]).

Гамильтонову систему (25) мы называем *системой в вариациях с самодействием*. Она является системой в вариациях в окрестности решения $z^0(t)$ в общепринятом значении лишь при $\varkappa = 0$, т.е. в случае линейного уравнения Шредингера с символом гамильтониана $H(z)$. В нелинейной ситуации она играет ту же важную роль, что и обычная система в вариациях в линейной теории комплексного роста Маслова. В частности, матрицы $B(t)$ и $C(t)$ в формуле (16) определяются как решение задачи Коши для системы в вариациях с самодействием:

$$\begin{pmatrix} \dot{B} \\ \dot{C} \end{pmatrix} = JM_\varkappa(z^0(t)) \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}, \quad B|_{t=0} = B_0, \quad C|_{t=0} = C_0. \quad (27)$$

В силу того, что эта система является гамильтоновой, для матриц $B(t)$ и $C(t)$ выполняются в любой момент $t \in [0, T]$ те же свойства, что и для матриц B_0, C_0 в (15).

ЗАМЕЧАНИЕ. Очевидно, что матрица Коши $A(t)$ системы (25) представима через решение задачи (27) в виде

$$A(t) = \begin{pmatrix} B(t) & B^*(t) \\ C(t) & B^*(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 & B_0^* \\ C_0 & B_0^* \end{pmatrix}^{-1}. \quad (28)$$

3. КВАНТОВАНИЕ УСТОЙЧИВЫХ ТОЧЕК ПОКОЯ СИСТЕМЫ ГАМИЛЬТОНА–ЭРЕНФЕСТА

Найдем приближенные $(\text{mod } \hbar^{3/2})$ точки покоя системы (11), используя эквивалентную ей с точностью до $O(\hbar^{3/2})$, $\hbar \rightarrow 0$, систему уравнений (22)–(24).

Пусть символы $H(z)$, $V(z, w)$ в операторе $\hat{H}_\varkappa$ (2) таковы, что уравнение нулевого приближения (22) имеет точку покоя, т.е. стационарное решение $z^0(t) = z_*^0 = \text{const}$, удовлетворяющее уравнению

$$J(H_z(z_*^0) + V_z(z_*^0, z_*^0)) = 0. \quad (29)$$

Будем также предполагать, что матрица системы в вариациях с самодействием, отвечающая этой точке z_*^0 , является невырожденной,

$$\det JM_\varkappa(z_*^0) \neq 0. \quad (30)$$

Существование стационарного решения системы (24), соответствующего z_*^0 , определяется следующей леммой.

ЛЕММА. *Стационарное решение $\Delta^0(t, \hbar) = \Delta_* = \text{const}$ уравнения (24) существует тогда, когда система в вариациях с самодействием (25) является устойчивой, т.е. постоянная матрица $JM_{\mathcal{K}}(z_*^0)$ диагонализуется, и ее спектр лежит на мнимой оси (спектр $\exp[JM_{\mathcal{K}}(z_*^0)t]$ лежит на единичной окружности).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, будем считать, что все собственные числа матрицы $JM_{\mathcal{K}}(z_*^0)$ простые. Обозначим их через $\pm i\Omega_k$, а через $f_k^\pm = (w_k^\pm, z_k^\pm)^T$ — отвечающие им собственные векторы, нормированные условием $\langle f_k^+, J^T f_k^- \rangle = 2i$, $k = 1, 2, \dots, n$. Вектор-функции $a_k^+(t) = \exp[i\Omega_k t] f_k^+$, $a_k^-(t) = \exp[-i\Omega_k t] f_k^-$, $k = 1, 2, \dots, n$, (решения Флоке) образуют симплектический базис в пространстве $\mathbb{C}^{2n}$ системы (25).

Обозначим $B(z_*^0)$ и $C(z_*^0)$ ($n \times n$)-матрицы, составленные из “импульсных” w_k^+ и “координатных” z_k^+ компонент векторов f_k^+ , $k = 1, 2, \dots, n$. Тогда матрицы

$$\begin{aligned} B(t) &= B(z_*^0) \text{diag}(\exp[i\Omega_1 t], \dots, \exp[i\Omega_n t]), \\ C(t) &= C(z_*^0) \text{diag}(\exp[i\Omega_1 t], \dots, \exp[i\Omega_n t]) \end{aligned} \quad (31)$$

суть матричные решения задачи (27) с начальными данными $C_0 = C(z_*^0)$, $B_0 = B(z_*^0)$. Выберем эти матрицы в качестве матриц $B(t)$ и $C(t)$ в формуле (27) для матрицы Коши системы (25) и зададим начальную матрицу дисперсий $\Delta(\Psi_\nu)$ в (26) с помощью формул (19), положив в них $B_0 = B(z_*^0)$, $C_0 = C(z_*^0)$. Тогда прямой выкладкой устанавливается, что при таком выборе матрица $A(t)\Delta(\Psi_\nu)A^+(t)$ не зависит от времени и, следовательно, в силу формулы (26) определяет стационарное решение $\Delta^0(t, \hbar) = \text{const} = \Delta_*$ уравнения (24).

СЛЕДСТВИЕ. *Стационарное решение уравнения (24), т.е. вещественная $(2n \times 2n)$ -матрица Δ_* , определяется формулами*

$$\Delta_* = \begin{pmatrix} \sigma_{pp}(z_*^0) & \sigma_{px}(z_*^0) \\ \sigma_{xp}(z_*^0) & \sigma_{xx}(z_*^0) \end{pmatrix}, \quad \sigma_{xp} = \sigma_{px}^T, \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(z_*^0) &= \frac{\hbar}{4} [C_0(z_*^0) D_\nu C_0^+(z_*^0) + C_0^*(z_*^0) D_\nu C_0^T(z_*^0)], \\ \sigma_{pp}(z_*^0) &= \frac{\hbar}{4} [B_0(z_*^0) D_\nu B_0^+(z_*^0) + B_0^*(z_*^0) D_\nu B_0^T(z_*^0)], \\ \sigma_{px}(z_*^0) &= \frac{\hbar}{4} [B_0(z_*^0) D_\nu C_0^+(z_*^0) + B_0^*(z_*^0) D_\nu C_0^T(z_*^0)]. \end{aligned} \quad (33)$$

Пусть точка покоя z_*^0 системы (29) устойчива в линейном приближении, т.е. собственные векторы $\tilde{f}_k$ и собственные значения $\tilde{\Omega}_k$ матрицы $JM_z(z_*^0)$ удовлетворяют условиям леммы. Векторы $f_k^\pm$ образуют симплектический базис в $\mathbb{C}^{2n}$. Отсюда, обратив матрицу $JM_{\mathcal{K}}(z_*^0)$, мы без труда найдем первую поправку z_*^1 в z -компоненте точки покоя из уравнения (23). В результате найдем, что

$$z_*^1 = \text{Re} \left(\sum_{k=1}^n \tilde{f}_k^+ \tilde{\Omega}_k^{-1} \langle F(z_*^0) \Delta_*, J \tilde{f}_k^+ \rangle \right). \quad (34)$$

Таким образом мы доказали следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть выполнены условия на символы $H(z)$, $V(z, w)$, обеспечивающие существование устойчивого в линейном приближении решения z_*^0 уравнения (29), и пусть система в вариациях с самодействием (с невырожденной матрицей $JM_{\varkappa}(z_*^0)$) устойчива. Тогда приближенная $(\text{mod } \hbar^{3/2})$ точка покоя $y^* = (z_* = z_*^0 + \hbar z_*^1, \Delta_*)$ системы Гамильтона–Эренфеста определяется формулами (29), (34), (33).

Подставив теперь построенное стационарное решение y^* и матрицы $B(t)$, $C(t)$ из (31) в формулы предыдущего раздела, мы получаем траекторно-когерентное состояние $\Psi_\nu(x, t)$, циклически зависящее от времени. Действительно, в этом случае матрица $BC^{-1}(t)$ не зависит от времени и равна $B(z_*^0)C(z_*^0)^{-1}$. Вещественная часть фазы решения (21) является линейной функцией t ,

$$S_{\varkappa}(t, \hbar) = -t \left[H(z_*(\hbar)) + \varkappa(V(z_*(\hbar), z_*(\hbar))) + \frac{1}{2} \text{Sp}[V_{ww}(z_*(\hbar), z_*(\hbar))\Delta_*] \right], \quad (35)$$

а амплитуда задается формулой

$$\frac{[\hat{\Lambda}^+(t)]^\nu 1}{\sqrt{\det C(t)}} = \exp \left[-it \sum_{k=1}^n \Omega_k \left(\nu_k + \frac{1}{2} \right) \right] \frac{[\hat{\Lambda}^+(0)]^\nu 1}{\sqrt{\det C(z_*^0)}}. \quad (36)$$

Определим последовательность чисел $E_\nu(\hbar)$ и последовательность функций $\Psi_\nu(x, \hbar)$, $\nu \in \mathbb{Z}_+^n$, формулами

$$\begin{aligned} E_\nu(\hbar) &= H(z_*(\hbar)) + \hbar \sum_{k=1}^n \Omega_k \left(\nu_k + \frac{1}{2} \right) + \\ &+ \varkappa(V(z_*(\hbar), z_*(\hbar))) + \frac{1}{2} \text{Sp}[V_{ww}(z_*(\hbar), z_*(\hbar))\Delta_*], \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \Psi_\nu(x, t) &= N_\nu \exp \left[\frac{i}{\hbar} \langle P_*(\hbar), x - X_*(\hbar) \rangle \right] \times \\ &\times \exp \left[\frac{i}{2\hbar} \langle x - X_*(\hbar), BC^{-1}(z_*^0)(x - X_*(\hbar)) \rangle \right] \frac{1}{\sqrt{\det C(z_*^0)}} [\hat{\Lambda}^+(0)]^\nu 1, \end{aligned} \quad (38)$$

где $z_*(\hbar) = z_*^0 + \hbar z_*^1$, Δ_* – “устойчивая” $(\text{mod } \hbar^{3/2})$ точка покоя системы Гамильтона–Эренфеста (11). Здесь $z_*(\hbar) = (P_*(\hbar), X_*(\hbar))$, матрицы $B(z_*^0)$, $C(z_*^0)$ определены выше, а оператор рождения $\hat{\Lambda}^+(0)$ задан формулой (18), в которой $B_0 = B(z_*^0)$, $C_0 = C(z_*^0)$, $w_j \in \mathbb{C}^n$, $z_j \in \mathbb{C}^n$ – столбцы матриц $B(z_*^0)$, $C(z_*^0)$, соответственно.

Таким образом, доказана теорема, представляющая основной результат работы.

ТЕОРЕМА. Пусть выполнены условия (14) на символы оператора типа Хартри $\hat{H}_{\varkappa}$ (2) и условия утверждения 2. Тогда последовательность чисел $E_\nu(\hbar)$ (37) и функций $\Psi_\nu(x, \hbar)$ (38) является квазиклассической спектральной серией (с точностью $O(\hbar^{3/2})$) оператора $\hat{H}_{\varkappa}$ типа Хартри (2), отвечающей точке покоя системы Гамильтона–Эренфеста, ассоциированной с оператором $\hat{H}_{\varkappa}$.

4. ПРИМЕРЫ

4.1. Спектр осциллятора в постоянном магнитном поле с нелинейным квадратичным потенциалом. Проиллюстрируем представленные выше конструкции уравнением типа Хартри с квадратичным потенциалом в нелинейной части и с гамильтонианом линейной части, который отвечает полю осциллятора, находящегося в постоянном магнитном поле:

$$\begin{aligned}\hat{H} &= E\Psi, & \hat{H} &= \frac{1}{2m} \left(\hat{p} - \frac{e}{c} A(x) \right)^2 + \frac{kx^2}{2}, \\ \hat{V}(\Psi) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} dy [ax^2 + 2b\langle x, y \rangle + cy^2] |\Psi(y)|^2, & A(x) &= \frac{1}{2} [H, x].\end{aligned}\quad (39)$$

Здесь a, b, c – параметры нелокального потенциала; m, k – параметры системы; H – напряженность внешнего магнитного поля, $[H, x]$ – векторное произведение, $H, x, y \in \mathbb{R}^3$.

Для квадратичного гамильтониана $\hat{H}_\kappa$ приближенная система (22)–(24) совпадает с исходной системой Гамильтона–Эренфеста (11). Так как $F(z, \Delta) = 0$, то уравнения (24), описывающие движение средних $z(t, h)$, интегрируются независимо от уравнения для вторых моментов $\Delta_2(t)$. Нетрудно заметить, что $z^1(t) = 0$ и $z(t) = z^0(t)$, $\Delta_2(t) = \Delta_2^0(t)$. Уравнение (22) можно переписать как систему

$$\begin{aligned}\dot{p} &= -(k + \kappa a)x - \frac{e}{2mc} [H, p] - \frac{e^2}{4mc^2} [H, [x, H]], \\ \dot{x} &= \frac{1}{m} p - \frac{e}{2mc} [H, x].\end{aligned}\quad (40)$$

Стационарное решение z_* системы (40) имеет вид

$$x_* = 0, \quad p_* = 0.$$

Решение системы Гамильтона–Эренфеста для вторых моментов получим с помощью решений системы в вариациях.

Решение системы в вариациях (27) можно представить в форме

$$B(t) = iM(t)BA, \quad C(t) = M(t)CA. \quad (41)$$

Здесь $M(t) = \text{diag}(e^{i\Omega_0 t}, e^{i\Omega_1 t}, e^{i\Omega_2 t})$,

$$\begin{aligned}C &= \sqrt{\frac{1}{2m}} \begin{pmatrix} \sqrt{2\Omega_0^{-1}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\omega_a^{-1}} & \sqrt{\omega_a^{-1}} \\ 0 & i\sqrt{\omega_a^{-1}} & -i\sqrt{\omega_a^{-1}} \end{pmatrix}, & B &= \sqrt{\frac{m}{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2\Omega_0} & 0 & 0 \\ 0 & i\sqrt{\omega_a} & i\sqrt{\omega_a} \\ 0 & -\sqrt{\omega_a} & \sqrt{\omega_a} \end{pmatrix}, \\ A &= (e_n, e_\varphi, e_\theta) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta & \sin \varphi & \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & -\cos \varphi & \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -\sin \theta \end{pmatrix}, \\ \Omega_0 &= \sqrt{\frac{k + \kappa a}{m}}, & \Omega_1 &= -\frac{\omega_c}{2} + \omega_a, & \Omega_2 &= \frac{\omega_c}{2} + \omega_a, \\ \omega_c &= \frac{e|H|}{2mc}, & \omega_a &= \sqrt{\omega_c^2 + \Omega_0^2}.\end{aligned}$$

Единичный вектор e_n определяет направление магнитного поля, а совокупность векторов $\{e_n, e_\varphi, e_\theta\}$ образует ортонормированный базис в $\mathbb{R}^3$.

Для решения данной задачи нам достаточно знать не всю матрицу Δ_2 , а только ее блок дисперсии координат. Подставив (41) в (33), имеем

$$\sum_{k=1}^3 \sigma_{x_k x_k}(z_*^0) = \left(\nu_0 + \frac{1}{2}\right) \frac{\hbar}{m\Omega_0} + \left(\nu_1 + \frac{1}{2}\right) \frac{\hbar}{m\omega_a} + \left(\nu_2 + \frac{1}{2}\right) \frac{\hbar}{m\omega_a}. \quad (42)$$

Следовательно, квазиклассические (mod $\hbar^{3/2}$) собственные функции оператора типа Хартри имеют вид

$$\Psi_\nu(x, \hbar) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{|\nu|} \frac{1}{\sqrt{\nu!}} \frac{m^{3/4} \Omega_0^{1/4} \omega_a^{1/2}}{(\pi\hbar)^{3/4}} \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \left(\frac{1}{2} \langle \chi, Q\chi \rangle\right)\right\} H_\nu(\xi). \quad (43)$$

Здесь $Q = \text{diag}(im\Omega_0, im\omega_a, im\omega_a)$, $\nu = (\nu_0, \nu_1, \nu_2)$ – мультииндекс, $\chi = A^T x$, $H_\nu(\xi)$ – многомерные полиномы Эрмита, порожденные матрицей W ,

$$H_\nu(\xi) = (-1)^{|\nu|} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - 2W\xi\right)^\nu \cdot 1, \quad \xi = -\frac{i}{\sqrt{\hbar}} C^{-1} \chi, \quad W = C^+ (C^{-1})^T.$$

Собственные значения, отвечающие функциям (43), определяются выражением

$$E_\nu = \hbar \left(\nu_0 + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{\kappa c}{2m\Omega_0} + \Omega_0\right) + \hbar \left(\nu_1 + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{\kappa c}{2m\omega_a} + \Omega_1\right) + \hbar \left(\nu_2 + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{\kappa c}{2m\omega_a} + \Omega_2\right). \quad (44)$$

Решение спектральной задачи (40) при $k = 0$, $H = 0$ с потенциалом взаимодействия гауссова типа дано в [23].

4.2. Одномерный осциллятор. Выберем линейный гамильтониан и нелокальное взаимодействие в виде

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{\mu \hat{p}^2}{2} + \frac{\sigma x^2}{2} + \frac{\rho(x\hat{p} + \hat{p}x)}{2}, \\ \hat{V}(\Psi) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dy [ax^2 + 2bxy + cy^2] |\Psi(y)|^2. \end{aligned} \quad (45)$$

Здесь a, b, c – параметры нелокального потенциала; μ, σ, ρ – параметры системы; $x, y \in \mathbb{R}^1$.

Система Гамильтона–Эренфеста для моментов первого порядка примет вид

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -\sigma_0 x - \rho p, \\ \dot{x} &= \mu p + \rho x, \end{aligned} \quad (46)$$

а для моментов второго порядка запишется как

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{xx} &= 2\mu\sigma_{xp} + 2\rho\sigma_{xx}, \\ \dot{\sigma}_{xp} &= \mu\sigma_{pp} - \tilde{\sigma}\sigma_{xx}, \\ \dot{\sigma}_{pp} &= -2\rho\sigma_{pp} - 2\tilde{\sigma}\sigma_{xp}, \end{aligned} \quad (47)$$

где

$$\sigma_0 = \sigma + \varkappa(a + b), \quad \tilde{\sigma} = \sigma + \varkappa a.$$

Положим

$$\tilde{\Omega} = \sqrt{\sigma_0 \mu - \rho^2}, \quad \Omega = \sqrt{\tilde{\sigma} \mu - \rho^2}. \quad (48)$$

Будем считать, что

$$\tilde{\Omega}^2 = \sigma_0 \mu - \rho^2 > 0, \quad \Omega^2 = \tilde{\sigma} \mu - \rho^2 > 0.$$

Общее решение системы (46) в этом случае дается выражениями

$$\begin{aligned} X(t) &= C_1 \sin \tilde{\Omega} t + C_2 \cos \tilde{\Omega} t, \\ P(t) &= \frac{1}{\mu} (\tilde{\Omega} C_1 - \rho C_2) \cos \tilde{\Omega} t - \frac{1}{\mu} (\tilde{\Omega} C_2 + \rho C_1) \sin \tilde{\Omega} t. \end{aligned} \quad (49)$$

Соответственно для системы (47) имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(t) &= C_3 \sin 2\Omega t + C_4 \cos 2\Omega t + C_5, \\ \sigma_{xp}(t) &= \frac{1}{\mu} (\Omega C_3 - \rho C_4) \cos 2\Omega t - \frac{1}{\mu} (\Omega C_4 + \rho C_3) \sin 2\Omega t - \frac{\rho}{\mu} C_5, \\ \sigma_{pp}(t) &= \frac{1}{\mu^2} ((\rho^2 - \Omega^2) C_3 + 2\rho \Omega C_4) \sin 2\Omega t + \\ &\quad + \frac{1}{\mu^2} ((\rho^2 - \Omega^2) C_4 - 2\rho \Omega C_3) \cos 2\Omega t + \frac{\tilde{\sigma}}{\mu} C_5. \end{aligned} \quad (50)$$

Здесь C_l , $l = 1, 2, \dots, 5$, – произвольные постоянные.

Для решения спектральной задачи нам требуется стационарное решение системы Гамильтона–Эренфеста (46), (47), которое с учетом (33) получается при следующем выборе параметров:

$$\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_2 = \mathfrak{C}_3 = \mathfrak{C}_4 = 0, \quad \mathfrak{C}_5 = \frac{\hbar \mu}{\Omega} \left(\nu + \frac{1}{2} \right).$$

Решение системы в вариациях (27) можно представить в виде

$$B(t) = e^{i\Omega t} \frac{-\rho + i\Omega}{\sqrt{\Omega \mu}}, \quad C(t) = e^{i\Omega t} \sqrt{\frac{\mu}{\Omega}}.$$

Следовательно, собственные функции оператора Хартри имеют вид

$$\psi_\nu(x) = \frac{i^\nu}{\sqrt{\nu!}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^\nu \left(\frac{1}{\pi \hbar} \right)^{1/4} \left(\frac{\Omega}{\mu} \right)^{1/4} \exp \left\{ -\frac{i}{2\hbar} \frac{\rho}{\mu} x^2 - \frac{1}{2\hbar} \frac{\Omega}{\mu} x^2 \right\} H_\nu \left(\sqrt{\frac{\Omega}{\hbar \mu}} x \right),$$

где $H_\nu(\zeta)$ – полиномы Эрмита. Отвечающие им собственные значения определяются выражением

$$E_\nu = \hbar \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{\varkappa c \mu}{2\Omega} + \Omega \right).$$

Решение спектральной задачи (45) при $\rho = 0$ приведено в [14].

Благодарности. Авторы признательны М. Ф. Кондратьевой, внимательно прочитавшей рукопись и сделавшей ряд ценных замечаний. Работа частично поддержана Программой поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-5103.2006.2), РФФИ (гранты № 05-01-000968, НСМ 05-01-22002) и DFG; Ф. Н. Литвинец поддержан стипендией некоммерческого фонда “Династия” в рамках МЦФФ в Москве.

Список литературы

- [1] М. В. Карасев, В. П. Маслов, *Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование*, Наука, М., 1991.
- [2] С. Р. де Гроот, Л. Г. Сатторп, *Электродинамика*, Мир, М., 1982.
- [3] Y. Lai, H. A. Haus, *Phys. Rev. A*, **40** (1989), 844–853; 854–866.
- [4] Л. П. Питаевский, *УФН*, **168** (1998), 641–653.
- [5] А. С. Давыдов, *Солитоны в молекулярных системах*, Наукова думка, Киев, 1984.
- [6] M. Born, *Z. Phys.*, **38** (1926), 803–827; П. Эренфест, “Замечание о приближенной справедливости классической механики в рамках квантовой механики”, *Относительность. Кванты. Статистика*, Наука, М., 1972, 82–84.
- [7] В. П. Маслов, *Теория возмущений и асимптотические методы*, МГУ, М., 1965; В. П. Маслов, М. В. Федорюк, *Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики*, Наука, М., 1976.
- [8] В. П. Маслов, *Асимптотические методы и теория возмущений*, Наука, М., 1988.
- [9] В. П. Маслов, *Операторные методы*, Наука, М., 1973.
- [10] В. П. Маслов, *Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях*, Наука, М., 1977; В. В. Белов, С. Ю. Доброхотов, *ТМФ*, **92**:2 (1992), 215–254.
- [11] М. В. Карасев, А. В. Перескоков, *ТМФ*, **79**:2 (1989), 198–208; **97**:1 (1993), 78; *Изв. РАН. Сер. Матем.*, **65**:3 (2001), 33–72; **65**:6 (2001), 57–98; М. В. Карасев, В. П. Маслов, “Алгебры с общими перестановочными соотношениями и их приложения. II. Операторные унитарно-нелинейные уравнения”, *Итоги науки и техники. Сер. современные проблемы математики*, **13**, ВИНТИ, М., 1979, 145–267; M. V. Karasev, V. P. Maslov, *J. Soviet Math.*, **15** (1981), 273–368.
- [12] V. V. Belov, A. Yu. Trifonov, A. V. Shapovalov, *Int. J. Math. Math. Sci.*, **32**:6 (2002), 325–370.
- [13] В. В. Белов, А. Ю. Трифонов, А. В. Шаповалов, *ТМФ*, **130**:3 (2002), 460–492.
- [14] A. L. Lisok, A. Yu. Trifonov, A. V. Shapovalov, *J. Phys. A*, **37** (2004), 4535–4556; А. Л. Лисок, А. Ю. Трифонов, А. В. Шаповалов, *ТМФ*, **141**:2 (2004), 228–242.
- [15] A. L. Lisok, A. Yu. Trifonov, A. V. Shapovalov, *Proc. Inst. Math. NAS Ukr.*, **50**:3 (2004), 1454–1465; *Symm., Integr. Geom.: Methods and Appl. (SIGMA)*, **1** (2005), 007; F. N. Litvinets, A. V. Shapovalov, A. Yu. Trifonov, *J. Phys. A*, **39** (2006), 1191–1206.
- [16] V. G. Bagrov, V. V. Belov, A. Yu. Trifonov, *Ann. Phys. (NY)*, **246**:2 (1996), 231–280; В. Г. Багров, В. В. Белов, А. Ю. Трифонов, “Квазиклассически сосредоточенные состояния уравнения Шредингера”, *Летняя школа “Волга-7’95”, VII Петровские чтения* (Казань, Россия, 22 июня – 2 июля 1995 г.), ред. А. В. Аминова, Изд-во БОГ, Казань, 1996, 15–136.
- [17] В. В. Белов, М. Ф. Кондратьева, *Матем. заметки*, **56**:6 (1994), 27–39; **58**:6 (1995), 803–817.
- [18] В. Г. Багров, В. В. Белов, М. Ф. Кондратьева, *ТМФ*, **98**:1 (1994), 48–55; V. G. Bagrov, V. V. Belov, M. F. Kondratyeva, et al., *J. Moscow Phys. Soc.*, **3** (1993), 309–320; “The quasiclassical localization of the states and a new approach of quasi-classical approximation in quantum mechanics”, *Particle Physics, Gauge Fields and Astrophysics*, Accademia Nazionale dei Lincei, Rome, 1994, 132–142; V. G. Bagrov, V. V. Belov, A. Yu. Trifonov, “New methods for semiclassical approximation in quantum mechanics”, *Proc.*

- Int. Workshop Quantum Systems: New Trends and Methods* (Minsk, May 23–29, 1994), eds. A. O. Barut, I. D. Feranchuk, Ya. M. Shnir, L. M. Tomil'chik, World Scientific, Singapore, 1995, 533–543.
- [19] М. А. Малкин, В. И. Манько, *Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем*, Наука, М., 1979; А. М. Переломов, *Обобщенные когерентные состояния и их применение*, Наука, М., 1987.
- [20] В. Г. Багров, В. В. Белов, И. М. Тернов, *ТМФ*, **50**:3 (1982), 390–396; V. G. Bagrov, V. V. Belov, I. M. Ternov, *J. Math. Phys.*, **24**:12 (1983), 2855–2859; В. В. Белов, В. П. Маслов, *ДАН СССР*, **305**:3 (1989), 574–580; **311**:4 (1990), 849–854; V. G. Bagrov, V. V. Belov, A. Yu. Trifonov, *Semiclassical trajectory-coherent approximation in quantum mechanics: II. High order corrections to the Dirac operators in external electromagnetic field*, *quant-ph/9806017*; В. В. Белов, М. Ф. Кондратьева, *ТМФ*, **92**:1 (1992), 41–60; V. G. Bagrov, V. V. Belov, A. Yu. Trifonov, A. A. Yevseyevich, *Class. Quant. Grav.*, **8** (1991), 515–527; 1349–1359; 1833–1846; V. G. Bagrov, A. Yu. Trifonov, A. A. Yevseyevich, *Class. Quant. Grav.*, **9** (1992), 533–543.
- [21] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя. Функции параболического цилиндра. Ортогональные многочлены*, Наука, М., 1966.
- [22] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов: Метод обратной задачи*, Наука, М., 1980; М. Абловиц, Х. Сегур, *Солитоны и метод обратной задачи*, Мир, М., 1983.
- [23] И. В. Сименюк, *ТМФ*, **30**:3 (1977), 408–414.

Поступила в редакцию 26.05.2006