Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Вшивцева, В. И. Денисов, И. В. Кривченков,
Нелинейно-электродинамическое линзирование элек-
тромагнитных волн в поле магнитного диполя, *ТМФ*,
2007, том 150, номер 1, 85–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf5966>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 13:04:16

© 2007 г. П. А. Вшивцева*, В. И. Денисов*, И. В. Кривченков*

НЕЛИНЕЙНО-ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОЕ ЛИНЗИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ПОЛЕ МАГНИТНОГО ДИПОЛЯ

Рассмотрено распространение электромагнитных волн в магнитном дипольном и гравитационном полях, происходящее по законам нелинейной электродинамики вакуума. Выведены формулы, описывающие эффект нелинейно-электродинамического линзирования электромагнитных волн в поле магнитного диполя. Показано, что вращение магнитного дипольного момента вокруг оси, не совпадающей с этим моментом, приводит к нелинейно-электродинамической модуляции интенсивности электромагнитного излучения с частотами, кратными частоте вращения диполя.

Ключевые слова: нелинейная электродинамика вакуума, магнитный дипольный момент, нелинейно-электродинамические эффекты, нормальные волны.

Как известно [1]–[3], в современных теоретических моделях электродинамика в вакууме является нелинейной теорией. Поэтому при распространении слабой электромагнитной волны во внешнем электромагнитном поле происходит ряд нелинейно-электродинамических эффектов, аналогичных эффектам нелинейной оптики. В частности, при распространении электромагнитных волн в поле магнитного диполя происходят расщепление фотона на два фотона [4], генерация второй гармоники [5], нелинейно-электродинамическое искривление лучей электромагнитных волн [6], [7], а также вызываемое двойным лучепреломлением вакуума нелинейно-электродинамическое запаздывание электромагнитного сигнала [8], [9], переносимого одной нормальной волной, по сравнению с электромагнитным сигналом, переносимым другой нормальной волной.

Всякое искривление лучей сопровождается линзированием, в результате которого поток энергии электромагнитной волны перераспределяется, что приводит к увеличению интенсивности в одних областях пространства и уменьшению в других. Поэтому в магнитном поле диполя наблюдается эффект нелинейно-электродинамического линзирования электромагнитных волн, аналогичный эффекту гравитационного линзирования [10], [11]. Изучим его основные закономерности.

Рассмотрим одиночную нейтронную звезду с сильным магнитным полем (пульсар или магнетар), имеющую радиус R_s , массу M и магнитный дипольный момент $\mathbf{m}$.

*Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail: admin@tailnews.ru, denisov@srd.sinp.msu.ru, ivk@abiturcenter.ru

Предположим, что электромагнитное излучение от удаленного источника проходит через магнитное и гравитационное поля этой звезды.

Поместим начало отсчета в центр нейтронной звезды и ориентируем оси декартовой системы координат так, чтобы волновой вектор падающей плоской электромагнитной волны был направлен вдоль оси z .

Из-за наличия у нейтронных звезд магнитосферы, заполненной веществом, эффект нелинейно-электродинамического линзирования будем рассматривать для электромагнитного излучения в рентгеновской и в гамма-области спектра. Для этих частот показатель преломления вещества [12] близок к единице и магнитосфера в определенной степени является прозрачной. Источниками такого излучения для рассматриваемого пульсара или магнетара могут служить удаленные от него на большие расстояния астрофизические объекты, такие как ядра активных галактик (блазар, квазар или сейфертова галактика) или скопления галактик. В этом случае падающую электромагнитную волну в окрестности пульсара или магнетара можно представить в виде плоской волны.

Метрический тензор псевдориманова пространства-времени, соответствующий гравитационному полю нейтронной звезды, в изотропных координатах имеет вид

$$g_{00}^{(0)} = \frac{[4r - r_g]^2}{[4r + r_g]^2}, \quad g_{11}^{(0)} = g_{22}^{(0)} = g_{33}^{(0)} = -\left[1 + \frac{r_g}{4r}\right]^4, \quad (1)$$

где $r_g = 2GM/c^2$ – гравитационный радиус нейтронной звезды и введено обозначение $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

В случае слабых электромагнитных полей обобщенный лагранжиан нелинейной электродинамики вакуума может быть записан в параметризованном постмаксвелловском приближении [7], [9]:

$$L = \frac{\sqrt{-g}}{32\pi} \{2J_2 + \xi[(\eta_1 - 2\eta_2)J_2^2 + 4\eta_2 J_4] + O(\xi^2 J_2^3)\} - \frac{1}{c} j^n A_n, \quad (2)$$

где $J_2 = F_{ik}F^{ki}$, $J_4 = F_{ik}F^{km}F_{ml}F^{li}$ – инварианты тензора электромагнитного поля, $\xi = 1/B_q^2$, $B_q = 4.41 \cdot 10^{13}$ Гс, а величины безразмерных постмаксвелловских параметров η_1 и η_2 зависят только от выбора модели нелинейной электродинамики вакуума [7], [9].

Следует отметить, что в псевдоримановом пространстве-времени к лагранжиану (2) можно добавить слагаемые, которые тождественно равны нулю в псевдоевклидовом пространстве-времени:

$$a_1 R F_{ik} F^{ik} + a_2 R_{ik} F^{ik} + a_3 R_{iknm} F^{ik} F^{nm},$$

где a_1, a_2, a_3 – некоторые постоянные, R – скалярная кривизна, R_{ik} – тензор Риччи, R_{iknm} – тензор кривизны.

Это так называемое неминимальное взаимодействие гравитации и электромагнитного поля. Однако хорошо известно (см., например, [13]), что неминимальное взаимодействие приводит к нефизическим результатам: в гравитационном поле Шварцшильда и некоторых других, важных с общетеоретической точки зрения, гравитационных полях фазовые и групповые скорости одних нормальных электромагнитных

волн становятся больше скорости света, а скорости ортогонально поляризованных к ним вторых нормальных волн остаются меньше скорости света. Поэтому мы не рассматриваем это нефизическое неминимальное взаимодействие гравитации и электромагнитного поля.

Как показано в работе [4], согласно уравнениям нелинейной электродинамики вакуума, получаемым из лагранжиана (2), распространение электромагнитной волны в гравитационном и электромагнитном полях при $\eta_1 \neq \eta_2$ зависит от поляризации волны и происходит по геодезическим некоторого эффективного псевдориманова пространства-времени, метрический тензор которого имеет вид

$$g_{ik}^{(1,2)} = g_{ik}^{(0)} - 4\eta_{1,2}\xi F_{ip}F_{\cdot k}^p, \quad (3)$$

где индексы у тензора F_{pi} поднимаются с помощью метрического тензора (1).

Это означает, что если падающая электромагнитная волна имеет произвольную поляризацию, то в магнитном поле диполя из-за двойного лучепреломления вакуума [4] она разделяется на две нормальные волны, поляризованные ортогонально друг к другу, первая из которых распространяется по геодезическим эффективного псевдориманова пространства-времени с метрическим тензором $g_{ik}^{(1)}$, а вторая – по геодезическим псевдориманова пространства-времени с метрическим тензором $g_{ik}^{(2)}$.

Система уравнений нелинейной электродинамики вакуума для лагранжиана (2) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^n} (\sqrt{-g} Q^{mn}) &= -\frac{4\pi}{c} j^m, \\ \frac{\partial F_{mn}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{nk}}{\partial x^m} + \frac{\partial F_{km}}{\partial x^n} &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где для сокращения записи введено обозначение

$$Q^{mn} = [1 + \xi(\eta_1 - 2\eta_2)J_2] F^{mn} + 4\xi\eta_2 F^{ml} F_{lk} F^{kn}.$$

Тензор электромагнитного поля, входящий в уравнения (4), представим в виде суммы аксиально-симметричного магнитного поля $F_{ik}^{(0)}$ звезды и поля f_{ik} слабой электромагнитной волны, распространяющейся в гравитационном и магнитном полях этой звезды: $F_{ik} = F_{ik}^{(0)} + f_{ik}$.

Так как пульсары представляют собой нейтронные звезды с массой порядка 0.1 массы Солнца, радиусом порядка 30 км и магнитным полем на поверхности порядка 10^{13} Гс, то в рассматриваемой нами задаче имеются два малых параметра $r_g/r \leq 10^{-2}$ и $\eta_{1,2}\xi \mathbf{B}^2(r) \leq 10^{-5}$. Из-за разной зависимости этих параметров от r их отношение изменяется с изменением r , причем величина этих параметров на поверхности разных нейтронных звезд различна. Это обстоятельство создает проблему обеспечения одинаковой точности вычислений по степеням этих параметров. Поэтому проведем вычисления основных нелинейно-электродинамических и гравитационных эффектов с точностью, линейной по $\xi\eta|\mathbf{m}|^2/r^6$ и квадратичной по r_g/r .

Найдем сначала решение уравнений (4), описывающее аксиально-симметричное магнитное поле пульсара. Как будет ясно из дальнейшего, для наших целей достаточно определить компоненты тензора $F_{ik}^{(0)}$ с точностью, линейной по малым параметрам $\xi\eta|\mathbf{m}|^2/r^6$ и r_g/r .

Решая уравнения (4) методом последовательных приближений, получим

$$\begin{aligned} F_{32} &= \frac{(\mathbf{mr})x}{r^5} V(r) - \frac{m_x}{r^3} W(r), \\ F_{13} &= \frac{(\mathbf{mr})y}{r^5} V(r) - \frac{m_y}{r^3} W(r), \quad F_{21} = \frac{(\mathbf{mr})z}{r^5} V(r) - \frac{m_z}{r^3} W(r), \end{aligned} \quad (5)$$

где $(\mathbf{mr}) = m_x x + m_y y + m_z z$,

$$\begin{aligned} V(r) &= 3 + \frac{r_g}{r} + \frac{3r_g^2}{16r^2} + \xi\eta_1 \left[\frac{15m^2}{11r^6} + \frac{3(\mathbf{mr})^2}{r^8} \right], \\ W(r) &= 1 + \frac{r_g}{2r} + \frac{9r_g^2}{80r^2} + \xi\eta_1 \left[\frac{49m^2}{33r^6} + \frac{21(\mathbf{mr})^2}{11r^8} \right]. \end{aligned}$$

Однако для обеспечения требуемой точности вычисления эффекта линзирования нам достаточно подставить в выражения (3) компоненты тензора F_{pk} , вычисленные в нулевом приближении по r_g/r и $\xi\eta|\mathbf{m}|^2/r^6$. Поэтому мы пренебрегаем слагаемыми, пропорциональными малым множителям r_g/r и $\xi\eta|\mathbf{m}|^2/r^6$, и из выражений (5) получаем

$$F_{32} = \frac{3(\mathbf{mr})x - r^2 m_x}{r^5}, \quad F_{13} = \frac{3(\mathbf{mr})y - r^2 m_y}{r^5}, \quad F_{21} = \frac{3(\mathbf{mr})z - r^2 m_z}{r^5}.$$

Во избежание недоразумений отметим, что поднятие и опускание индексов у тензора F_{pk} , как того требуют уравнения (4), следует производить с использованием метрического тензора (1).

Распространение электромагнитных волн в псевдоримановом пространстве-времени с метрическим тензором (3) происходит по геодезическим этого пространства и, в зависимости от их поляризации, описывается уравнениями

$$\frac{dk^m}{d\sigma} + \Gamma_{pn}^m k^p k^n = 0, \quad g_{nm}^{(1,2)} k^n k^m = 0, \quad (6)$$

где σ – некоторый аффинный параметр, $k^m = dx^m/d\sigma$, а Γ_{pn}^m – символы Кристоффеля эффективного псевдориманова пространства-времени с метрическими тензорами $g_{nm}^{(1)}$ и $g_{nm}^{(2)}$ для нормальных волн первого и второго типов, соответственно.

Следует отметить, что уравнения (6) и все дальнейшие соотношения, получаемые из них, справедливы только в области пространства, где $\mathbf{m}^2/r^6 < B_q^2$ и применимо разложение лагранжиана (2). Поэтому в дальнейшем мы будем исследовать только те лучи слабой электромагнитной волны, которые целиком находятся в этой области пространства.

В уравнениях системы (6) удобно перейти от дифференцирования по σ к дифференцированию по координате z в соответствии с равенством

$$\frac{d}{d\sigma} = \frac{dx^3}{d\sigma} \frac{d}{dz} = k^3 \frac{d}{dz}.$$

Комбинируя уравнения системы (6), запишем их в более удобном виде:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 x^0}{dz^2} + \left\{ \Gamma_{mi}^0 - \frac{dx^0}{dz} \Gamma_{mi}^3 \right\} \frac{dx^i}{dz} \frac{dx^m}{dz} &= 0, \\
 \frac{d^2 x}{dz^2} + \left\{ \Gamma_{mi}^1 - \frac{dx}{dz} \Gamma_{mi}^3 \right\} \frac{dx^i}{dz} \frac{dx^m}{dz} &= 0, \\
 \frac{d^2 y}{dz^2} + \left\{ \Gamma_{mi}^2 - \frac{dy}{dz} \Gamma_{mi}^3 \right\} \frac{dx^i}{dz} \frac{dx^m}{dz} &= 0, \\
 g_{nm}^{(1,2)} \frac{dx^n}{dz} \frac{dx^m}{dz} &= 0.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Следует отметить, что время $t = x^0/c$, входящее в эти уравнения, представляет собой время, измеряемое по часам удаленного наблюдателя.

В качестве начальных условий для системы уравнений (7) потребуем, чтобы луч начинался в точке $x = x_0$, $y = y_0$, $z = -L$ при $t = t_0$ и волновой вектор падающей электромагнитной волны в этой точке был параллелен оси z .

Решая уравнения (7) методом последовательных приближений, получим

$$\begin{aligned}
 ct &= ct_0 + z + L + r_g \left[ct_{10} + ct_{11}z + \ln \left(z + \sqrt{r_0^2 + z^2} \right) \right] + r_g^2 \left[ct_{20} + ct_{21}z - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{z^2(x_0x_{11} + y_0y_{11}) + z(x_0x_{10} + y_0y_{10})}{r_0^2\sqrt{r_0^2 + z^2}} + \frac{15}{16r_0} \arctg \frac{z}{r_0} \right] + \\
 &\quad + \xi \eta \left\{ ct_{30} + ct_{31}z + \frac{3}{64r_0^7} [25y_0^2(m_y^2 - m_x^2) + 50m_xm_yx_0y_0 + \right. \\
 &\quad \left. + r_0^2(41m_x^2 + 16m_y^2 + 15m_z^2)] \arctg \frac{z}{r_0} - m_z(m_xx_0 + m_yy_0) \times \right. \\
 &\quad \times \left[\frac{9r_0^2}{2(r_0^2 + z^2)^4} - \frac{2}{(r_0^2 + z^2)^3} \right] - z \left[\frac{5r_0^2 + 3z^2}{64r_0^6(r_0^2 + z^2)^2} [25y_0^2(m_x^2 - m_y^2) - \right. \\
 &\quad \left. - 50m_xm_yx_0y_0 - r_0^2(41m_x^2 + 16m_y^2 + 15m_z^2)] - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{3m_z^2r_0^2 + 5(m_xx_0 + m_yy_0)^2}{8r_0^2(r_0^2 + z^2)^3} + \frac{9[m_z^2r_0^2 - (m_xx_0 + m_yy_0)^2]}{4(r_0^2 + z^2)^4} \right] \Big\}, \\
 x(z) &= x_0 + r_g \left[x_{10} + x_{11}z - \frac{x_0}{r_0^2} \sqrt{r_0^2 + z^2} \right] + r_g^2 \left[x_{20} + x_{21}z + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(2z^2 + r_0^2)x_0y_0y_{10}}{r_0^4\sqrt{r_0^2 + z^2}} + \frac{z^2(x_0^2 - y_0^2)x_{10}}{r_0^4\sqrt{r_0^2 + z^2}} - \frac{zx_0(y_0y_{11} + x_0x_{11})}{r_0^2\sqrt{r_0^2 + z^2}} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{x_{10}y_0^2}{r_0^2\sqrt{r_0^2 + z^2}} - \frac{15x_0z}{16r_0^3} \arctg \frac{z}{r_0} \right] + \xi \eta \left\{ x_{30} + x_{31}z + \right. \\
 &\quad \left. + 3 \left[\frac{m_z}{32r_0^7} (26m_xr_0^2 - 25m_xy_0^2 + 25m_yx_0y_0) + \frac{5zx_0}{64r_0^9} [35y_0^2(m_x^2 - m_y^2) - \right. \right.
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
& -r_0^2(41m_x^2 + 16m_y^2 + 15m_z^2)] + \frac{25zm_xm_yy_0(7y_0^2 - 6r_0^2)}{32r_0^9} \Big] \arctg \frac{z}{r_0} + \\
& + x_0 [35y_0^2(m_x^2 - m_y^2) - r_0^2(41m_x^2 + 16m_y^2 + 15m_z^2)] \left[\frac{5}{256r_0^8} - \frac{5}{64r_0^6(r_0^2 + z^2)} - \right. \\
& - \frac{1}{32r_0^4(r_0^2 + z^2)^2} \Big] + m_xm_yy_0(7y_0^2 - 6r_0^2) \left[\frac{25}{128r_0^8} - \frac{25}{32r_0^6(r_0^2 + z^2)} - \right. \\
& - \frac{5}{16r_0^4(r_0^2 + z^2)^2} \Big] - m_zz(25m_xy_0^2 - 26m_xr_0^2 - 25m_yx_0y_0) \left[\frac{1}{16r_0^4(r_0^2 + z^2)^2} + \right. \\
& + \frac{3}{32r_0^6(r_0^2 + z^2)} \Big] - \frac{1}{8r_0^2(r_0^2 + z^2)^3} [5m_x^2x_0(y_0^2 - 3r_0^2) + 10m_xm_yy_0(y_0^2 - 2r_0^2) - \\
& - 5m_y^2x_0y_0^2 + 23m_z^2x_0r_0^2 + 10m_zz(m_xy_0^2 - 2m_xr_0^2 - m_yx_0y_0)] - \\
& - \frac{9x_0}{4(r_0^2 + z^2)^4} [(m_xx_0 + m_yy_0)^2 - m_z^2r_0^2 + 2m_zz(m_xx_0 + m_yy_0)] \Big\},
\end{aligned}$$

где введено обозначение $r_0^2 = x_0^2 + y_0^2$, а $t_{10}, t_{11}, t_{20}, t_{21}, t_{30}, x_{31}, x_{10}, x_{11}, x_{20}, x_{21}, x_{30}$ и x_{31} – константы интегрирования. Функция $y(z)$ получается из функции $x(z)$ взаимной заменой $m_x \leftrightarrow m_y$ и всех констант интегрирования $x_a \leftrightarrow y_a$, где $a = 0, 10, 11, 20, 21, 30, 31$.

Налагающиеся граничные условия при $z = -L$ дают

$$\begin{aligned}
x_{10} &= \frac{x_0}{\sqrt{L^2 + r_0^2}}, & x_{11} &= -\frac{x_0L}{r_0^2\sqrt{L^2 + r_0^2}}, & x_{20} &= \frac{x_0L^2}{16r_0^2(L^2 + r_0^2)}, \\
x_{21} &= \frac{x_0L}{16r_0^2(L^2 + r_0^2)} - \frac{15x_0}{16r_0^3} \arctg \frac{L}{r_0}, & ct_{10} &= -\ln\left(\sqrt{L^2 + r_0^2} - L\right), \\
ct_{11} &= 0, & ct_{20} &= -\frac{L}{2(L^2 + r_0^2)} + \frac{15}{16r_0} \arctg \frac{L}{r_0}, & ct_{21} &= \frac{2L^2 + r_0^2}{2r_0^2(L^2 + r_0^2)}, \\
ct_{30} &= [25(m_xx_0 + m_yy_0)^2 + (16m_x^2 + 16m_y^2 + 15m_z^2)r_0^2] \left[\frac{3}{64r_0^7} \arctg \frac{L}{r_0} + \right. \\
& + \frac{3L}{64r_0^6(L^2 + r_0^2)} + \frac{L}{32r_0^4(L^2 + r_0^2)^2} \Big] + \frac{3L[19(m_xx_0 + m_yy_0)^2 - 27m_z^2r_0^2]}{4(L^2 + r_0^2)^4} + \\
& + \frac{L[5(m_xx_0 + m_yy_0)^2 + (3m_z^2 - 16m_x^2 - 16m_y^2)r_0^2]}{8r_0^2(L^2 + r_0^2)^3} + \\
& + \frac{18r_0^2}{(L^2 + r_0^2)^5} [L[m_z^2r_0^2 - (m_xx_0 + m_yy_0)^2] - m_zr_0^2(m_xx_0 + m_yy_0)] + \\
& + \frac{7m_z(m_xx_0 + m_yy_0)(11r_0^2 - 4L^2)}{2(L^2 + r_0^2)^4}, \\
ct_{31} &= \frac{6}{(L^2 + r_0^2)^4} [2(m_xx_0 + m_yy_0)^2 - 2m_zL(m_xx_0 + m_yy_0) - 3m_z^2r_0^2] - \\
& - \frac{2(m_x^2 + m_y^2)}{(L^2 + r_0^2)^3} + \frac{18r_0^2}{(L^2 + r_0^2)^5} [2m_zL(m_xx_0 + m_yy_0) - \\
& - (m_xx_0 + m_yy_0)^2 + m_z^2r_0^2],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{30} = & \frac{3m_z}{32r_0^7} [25x_0(m_x x_0 + m_y y_0) + m_x r_0^2] \operatorname{arctg} \frac{L}{r_0} + \frac{55}{256r_0^8} [70m_x m_y y_0^3 + \\
& + 35(m_x^2 - m_y^2)x_0 y_0^2 - (41m_x^2 + 16m_y^2 + 15m_z^2)x_0 r_0^2 - 60m_x m_y y_0 r_0^2] + \\
& + m_z L [25x_0(m_x x_0 + m_y y_0) + m_x r_0^2] \left[\frac{3}{32r_0^6(L^2 + r_0^2)} + \frac{1}{16r_0^4(L^2 + r_0^2)^2} \right] + \quad (9) \\
& + \frac{m_z L}{4r_0^2(L^2 + r_0^2)^3} [5x_0(m_x x_0 + m_y y_0) + 29m_x r_0^2] - \frac{2}{(L^2 + r_0^2)^3} [5m_x m_y y_0 - \\
& - (11m_z^2 - 4m_x^2 + m_y^2)x_0] + \frac{3}{2(L^2 + r_0^2)^4} [16x_0(m_x x_0 + m_y y_0)^2 - \\
& - m_z L [5m_x r_0^2 + 29x_0(m_x x_0 + m_y y_0)] + 5r_0^2 [m_x(m_x x_0 + m_y y_0) - 5m_z^2 x_0]] + \\
& + \frac{18r_0^2}{(L^2 + r_0^2)^5} [2m_z L x_0(m_x x_0 + m_y y_0) - (m_x x_0 + m_y y_0)^2 x_0 + m_z^2 r_0^2 x_0], \\
x_{31} = & [35(m_x^2 - m_y^2)x_0 y_0^2 + 70m_x m_y y_0^3 - (41m_x^2 + 16m_y^2 + 15m_z^2)x_0 r_0^2 - \\
& - 60m_x m_y y_0 r_0^2] \left[\frac{15}{64r_0^9} \operatorname{arctg} \frac{L}{r_0} + \frac{15L}{64r_0^8(L^2 + r_0^2)} + \frac{5L}{32r_0^6(L^2 + r_0^2)^2} + \right. \\
& + \left. \frac{L}{8r_0^4(L^2 + r_0^2)^3} \right] + \frac{6m_x m_z}{(L^2 + r_0^2)^3} + \frac{3}{4r_0^2(L^2 + r_0^2)^4} [L[5(m_x^2 - m_y^2)x_0 y_0^2 + \\
& + 10m_x m_y y_0^3 + (23m_z^2 - 15m_x^2)x_0 r_0^2 - 20m_x m_y y_0 r_0^2] + \\
& + 52m_z y_0 r_0^2(m_x y_0 - m_y x_0) - 62m_x m_z r_0^4] + \\
& + \frac{18}{(L^2 + r_0^2)^5} [L[(m_x x_0 + m_y y_0)^2 x_0 - m_z^2 x_0 r_0^2] + \\
& + 2m_z x_0 r_0^2(m_x x_0 + m_y y_0)].
\end{aligned}$$

Константы интегрирования y_{10} , y_{11} , y_{20} , y_{21} , y_{30} и y_{31} получаются из констант x_{10} , x_{11} , x_{20} , x_{21} , x_{30} и x_{31} взаимной заменой $m_x \leftrightarrow m_y$ и $x_0 \leftrightarrow y_0$.

Магнитное дипольное и гравитационное поля пульсара или магнетара представляют собой гравитационную и нелинейно-электродинамическую линзу, поэтому расчет коэффициента усиления потока рентгеновского и гамма-излучения в такой линзе можно проводить методом апертур [10], используемым в общей теории относительности.

Будем считать для простоты, что выходная апертура имеет форму прямоугольника, стороны которого обозначим через dx_A и dy_A . Поместим прямоугольник в плоскость $z = L$ так, чтобы его вершины располагались в точках $A = (x_A, 0, L)$, $B = (x_A + dx_A, 0, L)$, $C = (x_A + dx_A, dy_A, L)$ и $D = (x_A, dy_A, L)$. Найдем входную апертуру, т.е. сечение плоскостью $z = -L$ всех тех пучков лучей, которые проходят через выходную апертуру. Для этого необходимо прежде всего определить, из каких точек плоскости $z = -L$ лучи попадают в вершины прямоугольника, являющегося выходной апертурой.

Используя уравнения лучей (8) и выражения (9), запишем уравнение луча, начинающегося в некоторой точке $x = x_0$, $y = y_0$, $z = -L$ и проходящего через точку A . Ограничиваясь в асимптотике главными членами по малому параметру r_0/L и по-

лагая, что $r_0 > R_s$, получим

$$\begin{aligned}
 x_A &= x_0 \left[1 - \frac{2r_g L}{r_0^2} - \frac{15\pi r_g^2 L}{16r_0^3} \right] + \frac{15\pi \xi \eta L}{64r_0^9} [10m_x m_y (y_0^2 - 6x_0^2)y_0 + \\
 &\quad + 35(m_x^2 - m_y^2)x_0 y_0^2 - (41m_x^2 + 16m_y^2 + 15m_z^2)r_0^2 x_0], \\
 y_A &= y_0 \left[1 - \frac{2r_g L}{r_0^2} - \frac{15\pi r_g^2 L}{16r_0^3} \right] + \frac{15\pi \xi \eta L}{64r_0^9} [10m_x m_y (x_0^2 - 6y_0^2)x_0 + \\
 &\quad + 35(m_y^2 - m_x^2)y_0 x_0^2 - (41m_y^2 + 16m_x^2 + 15m_z^2)r_0^2 y_0].
 \end{aligned} \tag{10}$$

Из этой алгебраической системы уравнений нам необходимо определить x_0 и y_0 как функции x_A и y_A . Несложно убедиться, что эта система уравнений сводится к алгебраическому уравнению седьмой степени, методов точного решения которого не существует. Однако у нас имеется возможность решить это уравнение приближенно, поскольку в уравнения (10) входят малые параметры r_g/r_0 , r_g^2/r_0^2 , $\eta \xi m^2/r_0^6$ и, кроме того, все слагаемые этого уравнения действуют на лучи как собирающая оптическая линза. В результате будем иметь с принятой точностью

$$\begin{aligned}
 x_{A'} &= \frac{x_A}{2r_A} \left(r_A + \sqrt{r_A^2 + 8r_g L} \right) \left(1 + \frac{15\pi r_g^2 L}{2(r_A + \sqrt{r_A^2 + 8r_g L})^3} \right) - \\
 &\quad - \frac{15\pi \xi \eta L}{r_A^3 (r_A + \sqrt{r_A^2 + 8r_g L})^6} [10m_x m_y (y_A^2 - 6x_A^2)y_A - \\
 &\quad - m_x^2(41x_A^2 + 6y_A^2)x_A - m_y^2(16x_A^2 + 51y_A^2)x_A - 15m_z^2 r_A^2 x_A], \\
 y_{A'} &= \frac{y_A}{2r_A} \left(r_A + \sqrt{r_A^2 + 8r_g L} \right) \left(1 + \frac{15\pi r_g^2 L}{2(r_A + \sqrt{r_A^2 + 8r_g L})^3} \right) - \\
 &\quad - \frac{15\pi \xi \eta L}{r_A^3 (r_A + \sqrt{r_A^2 + 8r_g L})^6} [10m_x m_y (x_A^2 - 6y_A^2)x_A - \\
 &\quad - m_y^2(41y_A^2 + 6x_A^2)y_A - m_x^2(16y_A^2 + 51x_A^2)y_A - 15m_z^2 r_A^2 y_A], \\
 x_{A''} &= \frac{x_A}{2r_A} \left(r_A - \sqrt{r_A^2 + 8r_g L} \right) \left(1 - \frac{15\pi r_g^2 L}{2(r_A - \sqrt{r_A^2 + 8r_g L})^3} \right) + \\
 &\quad + \frac{15\pi \xi \eta L}{r_A^3 (r_A - \sqrt{r_A^2 + 8r_g L})^6} [10m_x m_y (y_A^2 - 6x_A^2)y_A - \\
 &\quad - m_x^2(41x_A^2 + 6y_A^2)x_A - m_y^2(16x_A^2 + 51y_A^2)x_A - 15m_z^2 r_A^2 x_A], \\
 y_{A''} &= \frac{y_A}{2r_A} \left(r_A - \sqrt{r_A^2 + 8r_g L} \right) \left(1 - \frac{15\pi r_g^2 L}{2(r_A - \sqrt{r_A^2 + 8r_g L})^3} \right) + \\
 &\quad + \frac{15\pi \xi \eta L}{r_A^3 (r_A - \sqrt{r_A^2 + 8r_g L})^6} [10m_x m_y (x_A^2 - 6y_A^2)x_A - \\
 &\quad - m_y^2(41y_A^2 + 6x_A^2)y_A - m_x^2(16y_A^2 + 51x_A^2)y_A - 15m_z^2 r_A^2 y_A].
 \end{aligned} \tag{11}$$

Используя эти выражения, найдем отношение площадей четырехугольников $A'B'C'D'$ и $ABCD$ для лучей первого типа:

$$\xi_1^2 = \frac{(r_A + \sqrt{r_A^2 + 8r_g L})^2}{4r_A \sqrt{r_A^2 + 8r_g L}} - \frac{15\pi r_g^2 r_A L}{8(r_A + \sqrt{r_A^2 + 8r_g L}) \sqrt{(r_A^2 + 8r_g L)^3}} - \frac{225\xi\eta\pi L [7(m_x x_A + m_y y_A)^2 + (6m_x^2 + 6m_y^2 + 5m_z^2)r_A^2]}{2r_A(r_A + \sqrt{r_A^2 + 8r_g L})^5 \sqrt{(r_A^2 + 8r_g L)^3}}. \quad (12)$$

Несложный расчет позволяет найти и отношение ξ_2^2 площадей четырехугольников $A''B''C''D''$ и $ABCD$:

$$\xi_2^2 = \frac{(r_A - \sqrt{r_A^2 + 8r_g L})^2}{4r_A \sqrt{r_A^2 + 8r_g L}} + \frac{15\pi r_g^2 r_A L}{8(r_A - \sqrt{r_A^2 + 8r_g L}) \sqrt{(r_A^2 + 8r_g L)^3}} + \frac{225\xi\eta\pi L [7(m_x x_A + m_y y_A)^2 + (6m_x^2 + 6m_y^2 + 5m_z^2)r_A^2]}{2r_A(r_A - \sqrt{r_A^2 + 8r_g L})^5 \sqrt{(r_A^2 + 8r_g L)^3}}. \quad (13)$$

В общей теории относительности коэффициент усиления гравитационной линзы определяется как отношение площади входной апертуры к площади выходной апертуры [10]. С физической точки зрения это соответствует сложению потоков энергии электромагнитных волн, пришедших в выходную апертуру по различным лучам из разных мест излучающей поверхности. В рассматриваемом нами случае необходимо складывать не потоки энергии, а напряженности электромагнитных волн, и учитывать разности фаз электромагнитных волн, распространяющихся по различным лучам. Поэтому найдем теперь разность фаз электромагнитных волн, приходящих в выходную апертуру из двух разных входных апертур. Так как плоскость $z = -L$ совпадает с фронтом падающей плоской электромагнитной волны, то электромагнитное излучение на этой плоскости имеет одинаковую фазу во всех ее точках. В дальнейшем электромагнитное излучение из двух входных апертур распространяется к выходной апертуре по различным лучам, и электромагнитные сигналы затрачивают на эти пути различное время. Несложный расчет с использованием формул (8) и (11) дает

$$\begin{aligned} \Delta\Psi = \omega\Delta t = \omega \left\{ \frac{2r_g}{c} \ln \left(\frac{r_A + \sqrt{r_A^2 + 8r_g L}}{\sqrt{r_A^2 + 8r_g L} - r_A} \right) + \right. \\ + \frac{r_A \sqrt{r_A^2 + 8r_g L}}{8cL} + \frac{15\pi r_g}{2cL} \sqrt{r_A^2 + 8r_g L} + \\ + \frac{6\pi\xi\eta}{c} [25(m_x x_A + m_y y_A)^2 + (16m_x^2 + 16m_y^2 + 15m_z^2)r_A^2] \times \\ \times \left[\frac{1}{(r_A - \sqrt{r_A^2 + 8r_g L})^7} - \frac{1}{(r_A + \sqrt{r_A^2 + 8r_g L})^7} \right] \Bigg\}. \quad (14) \end{aligned}$$

Вычислим теперь коэффициент нелинейно-электродинамического и гравитационного линзирования электромагнитного излучения в поле магнитного диполя. Из-за нелинейно-электродинамического двойного лучепреломления вакуума во внешнем электромагнитном поле из каждой входной апертуры в детектор будут попадать

две нормальные волны, одна из которых поляризована в плоскости, проходящей через ось z и вектор $\mathbf{m}$, а вторая – перпендикулярно этой плоскости.

Коэффициент нелинейно-электродинамического и гравитационного линзирования первой нормальной волны в поле магнитного диполя равен

$$K_{\parallel} = (\xi_1^2 + \xi_2^2 + 2\xi_1\xi_2 \cos(\Delta\Psi))\big|_{\eta=\eta_1}, \quad (15)$$

где в выражениях (12)–(14) для ξ_1 , ξ_2 и $\Delta\Psi$ следует положить $\eta = \eta_1$. Для второй нормальной волны получим аналогичное выражение:

$$K_{\perp} = (\xi_1^2 + \xi_2^2 + 2\xi_1\xi_2 \cos(\Delta\Psi))\big|_{\eta=\eta_2}, \quad (16)$$

где в выражениях (12)–(14) для ξ_1 , ξ_2 и $\Delta\Psi$ следует положить $\eta = \eta_2$.

Мы предполагали, что вектор магнитного дипольного момента нейтронной звезды, входящий в соотношения (8), (9) и (11)–(14), не зависит от времени. Однако эти соотношения остаются справедливыми и в случае, когда нейтронная звезда вращается квазистатически с частотой Ω вокруг оси, проходящей через центр масс, но не совпадающей с вектором ее дипольного момента $\mathbf{m}$. Для выполнения условия квазистатичности вращательного движения частоту Ω будем считать достаточно малой, чтобы линейная скорость точек на поверхности звезды была значительно меньше скорости света: $\Omega R_s \ll c$. Тогда коэффициенты нелинейно-электродинамического и гравитационного линзирования (15) и (16) будут функциями времени, в результате чего излучение в выходной апертуре будет модулировано частотами, кратными частоте вращения магнитного диполя.

Численные расчеты, выполненные с использованием формул (15) и (16), показывают, что эффект нелинейно-электродинамического линзирования имеет заметное проявление на сравнительно небольших расстояниях $L < (10^3 \div 10^4)R_s$ от пульсара или магнетара.

Благодарности. Настоящая работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 04-02-16604).

Список литературы

- [1] M. Born, L. Infeld, *Proc. R. Soc. London A*, **144** (1934), 425.
- [2] W. Heisenberg, Н. Euler, *Z. Phys.*, **98** (1936), 714.
- [3] В. Г. Кадышевский, В. Н. Родионов, *ТМФ*, **136**:3 (2003), 517.
- [4] S. L. Adler, *Ann. Phys.*, **67** (1971), 599.
- [5] В. И. Денисов, И. П. Денисова, П. А. Вшивцева, *Докл. РАН*, **387**:2 (2002), 178.
- [6] I. P. Denisova, I. V. Krivchenkov, P. A. Vshivtseva, A. A. Zubrilo, *Gen. Relativity Gravitation*, **36**:4 (2004), 889.
- [7] В. И. Денисов, *ТМФ*, **132**:2 (2002), 211.
- [8] В. И. Денисов, И. П. Денисова, И. В. Кривченков, *ЖЭТФ*, **122**:8 (2002), 227.
- [9] V. I. Denisov, S. I. Svertilov, *Phys. Rev. D*, **71**:6 (2005), 063002.
- [10] П. В. Блюх, А. А. Минаков, *Гравитационные линзы*, Наукова думка, Киев, 1989.
- [11] Ю. В. Грац, А. А. Россихин, *Вестн. МГУ, Сер. Физика, астрономия*, **6** (2004), 11.
- [12] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, М., 1982.
- [13] I. T. Drummond, S. J. Hathrell, *Phys. Rev. D*, **22**:2 (1980), 343.

Поступила в редакцию 30.09.2005,
после доработки 17.04.2006