Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Г. Клименко, Д. Эберт, Мезоны и дикварки в плотной кварковой среде с цветовой сверхпроводимостью, *ТМФ*, 2007, том 150, номер 1, 95–111

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf5967>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 14:39:33

© 2007 г.

К. Г. Клименко*, Д. Эберт†

МЕЗОНЫ И ДИКВАРКИ В ПЛОТНОЙ КВАРКОВОЙ СРЕДЕ С ЦВЕТОВОЙ СВЕРХПРОВОДИМОСТЬЮ

В рамках модели Намбу–Иона-Лазинио с двумя ароматами кварков исследуется спектр мезонных и дикварковых возбуждений плотной кварковой материи, находящейся в фазе с цветовой сверхпроводимостью. В этой фазе цветовая $SU_c(3)$ -симметрия спонтанным образом нарушается до $SU_c(2)$. Однако вместо ожидаемых пяти голдстоуновских бозонов в спектре масс присутствуют только три, два из которых имеют квадратичный закон дисперсии. Обнаружен дублет легких дикварковых состояний с массой ~ 15 МэВ, а также тяжелый дикварковый резонанс ($SU_c(2)$ -синглет) с массой ~ 1100 МэВ. В фазе с цветовой сверхпроводимостью π - и σ -мезоны имеют массу ~ 330 МэВ. При этом π -мезоны – стабильные частицы, а σ -мезон стабилен только в киральном пределе, где токовая масса кварков m_0 равна нулю. Если $m_0 \neq 0$, то в фазе с цветовой сверхпроводимостью σ -мезон смешивается с дикварками и становится резонансом с шириной ~ 30 МэВ.

Ключевые слова: модель Намбу–Иона-Лазинио, цветовая сверхпроводимость, мезоны, дикварки, голдстоуновские бозоны.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из актуальных задач современной физики является исследование свойств горячей и/или плотной материи, состоящей из сильно взаимодействующих частиц. При нормальных условиях, т.е. при малых значениях температуры T и плотности барионов n_B , реализуется адронная фаза этой материи, в которой нарушена киральная симметрия, а кварки и глюоны ненаблюдаемы (явление конфайнмента). При высоких температурах, по общему мнению, материя из сильно взаимодействующих частиц должна существовать в виде кварк-глюонной плазмы, для основного состояния которой характерны киральная симметрия и наличие кварков и глюонов в спектре масс. Если же значения температуры малы, то с повышением давления (в этом случае растут как барионный химический потенциал μ_B , так и плотность барионов n_B) адроны сближаются до тех пор, пока, наконец, при некотором критическом давлении (плотности барионов) не происходит их слияние в отдельные

*Институт физики высоких энергий, Протвино, Московская обл., Россия.
E-mail: kklm@ihep.ru

†Institut für physik, Humboldt-Universität zu Berlin, Berlin, Germany.
E-mail: debert@physik.hu-berlin.de

системы, состоящие из кварков, которые в силу этого называются сгустками кварковой материи. Таким образом, при достаточно больших плотностях (температуры малы) сильно взаимодействующая материя должна существовать в форме кварковой материи. По современным оценкам плотности, при которых это происходит, раз в десять превосходят плотность обычной ядерной материи. Поэтому кварковая материя может быть наблюдаема в экспериментах по столкновению тяжелых релятивистских ионов, а также, вероятнее всего, существует в ядрах нейтронных звезд.

Предметом настоящего обзора является рассмотрение свойств плотной и холодной кварковой материи. Для нее, как и для кварк-глюонной плазмы, характерно отсутствие конфайнмента и спонтанного нарушения киральной симметрии¹⁾. Однако в такой среде при достаточно больших значениях μ_B возможно образование дикваркового конденсата, нарушающего цветовую $SU_c(3)$ -симметрию сильных взаимодействий, и переход системы в состояние с цветовой сверхпроводимостью (ЦСП) [1]. В отличие от обычной сверхпроводимости, где образование куперовских пар обусловлено притяжением электронов, возникающим из-за их взаимодействия с ионами кристаллической решетки, механизм возникновения ЦСП совершенно иной. В квантовой хромодинамике (КХД) благодаря взаимодействию кварков и глюонов существует притяжение двух кварков в антитриплетном по цвету канале. В результате такого притяжения кварки, находящиеся вблизи поверхности Ферми, образуют куперовские пары, конденсат которых и является главным признаком перестройки основного состояния системы и возникновения ЦСП.

При асимптотически больших плотностях барионов n_B , когда эффективная КХД-константа связи мала и применимы методы вычислений по теории возмущений, явление ЦСП исследовалось в рамках КХД [2]. Однако в области малых и промежуточных значений плотности n_B (при этом $\mu_B \lesssim 1500$ МэВ), которые вполне могут существовать в ядрах нейтронных звезд, константа сильных взаимодействий велика, поэтому здесь вычисления по теории возмущений не адекватны физической реальности. В этом случае для исследования плотной кварковой материи обычно используются методы эффективных теорий поля и, в частности, модель Намбу–Иона-Лазинио (НИЛ) [3] с четырехкварковым взаимодействием. В рамках этой модели было показано, что нижняя граница ЦСП-фазы находится в районе довольно низких значений барионного химического потенциала $\mu_B \sim 1000$ МэВ. Кроме того, рассматривалась также и модификация процессов эволюции нейтронных звезд в связи с возможным присутствием ЦСП в их ядрах (см. обзоры [4]).

В предлагаемой работе, написанной на базе наших более ранних публикаций [5]–[7], в рамках НИЛ-модели с двумя ароматами кварков исследуются одночастичные возбуждения основного состояния ЦСП-фазы плотной кварковой материи при нулевом значении температуры. Основное внимание мы уделяем вычислению масс мезонов и дикварков. Свойства мезонов относительно хорошо изучены в вакууме, однако достаточно мало известно об их свойствах в плотной (кварковой) среде. А

¹⁾Если судить только по этим двум показателям, то формально между кварк-глюонной плазмой и плотной кварковой материей нет никакой разницы. Но поскольку при очень малых температурах плотностью глюонов можно пренебречь по сравнению с плотностью барионов, то при малых T и больших значениях n_B материю из сильно взаимодействующих частиц принято называть кварковой материей.

такие обстоятельства, как возможное множественное рождение этих частиц в реакциях по столкновению тяжелых релятивистских ионов и их участие в различных физических процессах, происходящих внутри нейтронных звезд, являются дополнительной мотивацией нашего рассмотрения. Дикварки, несмотря на то что переносят цвет, являются реальными частицами в ЦСП-фазе кварковой материи (в этой фазе цветовая симметрия нарушена), поэтому все вышесказанное о мезонах в полной мере относится и к ним. Кроме того, дикварки интересны и с точки зрения определения свойств барионов, поскольку могут рассматриваться как их составные части.

В своих исследованиях мы используем методы квантовой теории поля, с основными принципами которой можно ознакомиться в фундаментальной монографии [8].

2. ЭФФЕКТИВНОЕ ДЕЙСТВИЕ И ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ В НИЛ-МОДЕЛИ

2.1. Лагранжиан и эффективное действие. Модели типа НИЛ являются одним из наиболее эффективных инструментов исследования целого ряда физических процессов в низкоэнергетической области КХД. Так, в рамках этих моделей успешно описываются физика легких мезонов [9]–[11] и дикварков [12], а также взаимодействия мезонов с барионами [13]. Интерес к этим моделям также во многом обусловлен тем, что здесь реализуется принцип динамического нарушения (киральной) симметрии – явления, которое до сих пор интенсивно изучается именно в теориях с четырехфермионным взаимодействием. В частности, в работах [14] исследовалось влияние магнитного поля, а в работах [15] – кривизны пространства и его нетривиальной топологии на явление динамического нарушения симметрии.

Вместе с тем модель не лишена и недостатков, самый главный из которых – отсутствие конфайнмента. Конечно, это свойство модели является ее недостатком, но только при описании процессов в вакууме, т.е. при нуле температуры и плотности барионов n_B . При больших значениях T и n_B сильно взаимодействующая материя, как было отмечено в разделе 1, не находится в адронной фазе, а кварки и глюоны являются наблюдаемыми частицами (нет конфайнмента). Поэтому при описании физических явлений в экстремальных условиях присутствие кварков в спектре масс моделей типа НИЛ является скорее их естественным преимуществом, чем недостатком. В связи с этим модель уже использовалась для рассмотрения как свойств нормальной (без ЦСП) плотной кварковой материи [11], [16], так и явления ЦСП в области промежуточных плотностей барионов [4], [17].

В предлагаемой работе рассматривается модель типа НИЛ с двумя ароматами кварков и двумя константами связи, описывающая взаимодействие в кварк-антикварковом и скалярном кварк-кварковом каналах в области промежуточных значений плотности барионов (рассмотрение проводится в пространстве-времени Минковского):

$$L_q = \bar{q}(\gamma^\nu i\partial_\nu - m_0 + \mu\gamma^0)q + G[(\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma^5\vec{\tau}q)^2] + H \sum_{A=2,5,7} (\bar{q}^C i\gamma^5\tau_2\lambda_A q)(\bar{q}i\gamma^5\tau_2\lambda_A q^C), \quad (1)$$

где $\mu \equiv \mu_B/3 > 0$ – химический потенциал числа кварков, поля которых $q \equiv q_{i\alpha}$ образуют дублет по $SU(2)$ -группе ароматов ($i = 1, 2$) и триплет по цвету ($\alpha = 1, 2, 3$) и являются четырехкомпонентными спинорами Дирака; $q^C = C\bar{q}^t$, $\bar{q}^C = q^t C$ – зарядово-сопряженные спиноры (здесь $C = i\gamma^2\gamma^0$ – матрица зарядового сопряжения, а символ t обозначает операцию транспонирования). Кроме того, мы используем обозначения τ_a и λ_A ($a = 1, 2, 3$, $A = 2, 5, 7$) для (2×2) -матриц Паули в пространстве ароматов и антисимметричных (3×3) -матриц Гелл-Манна в пространстве цвета, соответственно. Лагранжиан L_q инвариантен относительно цветовых $SU_c(3)$ - и барионных $U_B(1)$ -преобразований, а также преобразований из $SU(2)$ -группы ароматов (если $m_0 \neq 0$). (Последняя при $m_0 = 0$ расширяется до киральной $(SU(2)_L \times SU(2)_R)$ -группы.) Наконец отметим, что при $\mu = 0$ лагранжиан (1) зарядово-инвариантен ($q \rightarrow q^C$, $\bar{q} \rightarrow \bar{q}^C$), однако эта симметрия нарушается, если химический потенциал отличен от нуля. Температура в нашем рассмотрении предполагается равной нулю, а параметры модели в численных расчетах имеют следующие значения:

$$G = 5.86 \text{ ГэВ}^{-2}, \quad \Lambda = 618 \text{ МэВ}, \quad m_0 = 5.67 \text{ МэВ}, \quad H = \frac{3G}{4}, \quad (2)$$

где Λ – параметр обрезания трехмерного импульсного пространства, по которому происходит интегрирование при вычислении диаграмм Фейнмана. Значения параметров G , Λ и m_0 (2) приводят к хорошо известным значениям константы слабого распада пиона $F_\pi = 92.4 \text{ МэВ}$, массы пиона $M_\pi = 140 \text{ МэВ}$ и кирального кваркового конденсата $\langle \bar{q}q \rangle = -(245 \text{ МэВ})^3$ в пустом пространстве (процедура фиксации параметров модели НИЛ хорошо изложена, например, в работах [9]). Исходя из современных экспериментальных данных, величину константы связи H в дикварковом канале невозможно найти с достаточной точностью. Поэтому соотношение (2) между G и H выбрано таким же, как и в четырехкварковой вершинной функции КХД в приближении одноглюонного обмена [4].

В предлагаемой работе рассматриваются как свойства основного состояния системы с лагранжианом (1), так и спектр масс ее кварковых, мезонных и дикварковых возбуждений. Для этого мы должны найти термодинамический потенциал (ТДП) системы Ω , а также ее эффективное действие с точностью до второго порядка по бозонным полям. Начнем со вспомогательного лагранжиана L , содержащего бозонные поля:

$$L = \bar{q}(\gamma^\nu i\partial_\nu + \mu\gamma^0 - \sigma - m_0 - i\gamma^5\pi_a\tau_a)q - \frac{1}{4G}(\sigma\sigma + \pi_a\pi_a) - \frac{1}{4H}\Delta_A^*\Delta_A - \frac{\Delta_A^*}{2}(\bar{q}^C i\gamma^5\tau_2\lambda_A q) - \frac{\Delta_A}{2}(\bar{q}i\gamma^5\tau_2\lambda_A q^C), \quad (3)$$

где, как и в дальнейшем, по повторяющимся индексам $a = 1, 2, 3$ и $A, A' = 2, 5, 7$ подразумевается суммирование. Лагранжианы L_q и L эквивалентны на уравнениях движения бозонных полей, из которых следует, что

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= -2G(\bar{q}q), & \pi_a(x) &= -2G(\bar{q}i\gamma^5\tau_a q), \\ \Delta_A(x) &= -2H(\bar{q}^C i\gamma^5\tau_2\lambda_A q), & \Delta_A^*(x) &= -2H(\bar{q}i\gamma^5\tau_2\lambda_A q^C). \end{aligned} \quad (4)$$

Из соотношений (4) ясно, что мезонные поля σ , π_a – действительные величины, т.е. $(\sigma(x))^\dagger = \sigma(x)$, $(\pi_a(x))^\dagger = \pi_a(x)$ (символ $\dagger$ обозначает операцию эрмитова сопряжения), а дикварковые поля Δ_A – комплексные величины, поэтому $(\Delta_A(x))^\dagger =$

$\Delta_A^*(x)$. Очевидно, что $\Delta_A(x)$, $\sigma(x)$ – скаляры, а $\pi_a(x)$ – псевдоскаляры. Наконец, $\sigma(x)$ и $\pi_a(x)$ являются синглетами относительно $SU_c(3)$ -группы цвета, а поля $\Delta_A(x)$ преобразуются по антитриплетному $\bar{3}_c$ -представлению этой группы.

Используя функциональные методы, можно на основе лагранжиана (3) получить ТДП Ω и эффективное действие $\mathcal{S}_{\text{eff}}$. Так, эффективное действие для бозонных полей в однопетлевом по фермионным полям приближении находится с помощью следующего континуального интеграла:

$$e^{i\mathcal{S}_{\text{eff}}(\sigma, \pi_a, \Delta_A, \Delta_{A'}^*)} = N' \int [d\bar{q}][dq] \exp\left(i \int L d^4x\right),$$

где N' – константа нормировки. Отсюда легко получить

$$\mathcal{S}_{\text{eff}}(\sigma, \pi_a, \Delta_A, \Delta_{A'}^*) = - \int d^4x \left[\frac{\sigma^2 + \pi_a^2}{4G} + \frac{\Delta_A \Delta_{A'}^*}{4H} \right] + \tilde{\mathcal{S}}_{\text{eff}}, \quad (5)$$

где слагаемое $\tilde{\mathcal{S}}_{\text{eff}}$ имеет вид

$$e^{i\tilde{\mathcal{S}}_{\text{eff}}} = N' \int [d\bar{q}][dq] \exp\left(\frac{i}{2} \int [\bar{q} D^+ q + \bar{q}^C D^- q^C - \bar{q} K q^C - \bar{q}^C K^* q] d^4x\right). \quad (6)$$

Здесь мы использовали обозначения²⁾

$$\begin{aligned} D^+ &= i\gamma^\nu \partial_\nu - m_0 + \mu\gamma^0 - \Sigma, & D^- &= i\gamma^\nu \partial_\nu - m_0 - \mu\gamma^0 - \Sigma^t, \\ \Sigma &= \sigma + i\gamma^5 \pi_a \tau_a, & K^* &= i\Delta_A^* \gamma^5 \tau_2 \lambda_A, & K &= i\Delta_A \gamma^5 \tau_2 \lambda_A, & \Sigma^t &= \sigma + i\gamma^5 \pi_a \tau_a^t. \end{aligned} \quad (7)$$

Для дальнейшего удобно использовать формализм Намбу–Горькова, в котором q и q^C объединяются в новые биспинорные поля $\Psi = \begin{pmatrix} q \\ q^C \end{pmatrix}$. Переписывая выражение (6) в терминах Ψ и Ψ^t , а затем интегрируя в полученном выражении по биспинорам, получаем

$$\tilde{\mathcal{S}}_{\text{eff}}(\sigma, \pi_a, \Delta_A, \Delta_{A'}^*) = \frac{1}{2i} \text{Tr}_{\{\text{NGsf}_{cx}\}} \ln \begin{pmatrix} D^+ & -K \\ -K^* & D^- \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{2i} \text{Tr}_{\{\text{NGsf}_{cx}\}} \ln Z, \quad (8)$$

где оператор Z представлен в виде матрицы в двумерном пространстве биспиноров Намбу–Горькова (NG). Здесь операция взятия следа $\text{Tr}_{\{\text{NGsf}_{cx}\}}(\dots)$ происходит по пространству NG, а также по координатному (x), цветовому (c), спинорному (s) и ароматному (f) пространствам.

Теперь, исходя из формул (5)–(8), можно определить ТДП системы $\Omega(\sigma, \pi_a, \Delta_A, \Delta_{A'}^*)$:

$$\mathcal{S}_{\text{eff}}|_{\sigma, \pi_a, \Delta_A, \Delta_{A'}^* = \text{const}} = -\Omega(\sigma, \pi_a, \Delta_A, \Delta_{A'}^*) \int d^4x, \quad (9)$$

где предполагается, что все бозонные поля не зависят от пространственных координат x . Хорошо известно, что в термодинамическом равновесии, т.е. в основном состоянии, средние значения полей $\langle \sigma(x) \rangle \equiv \sigma^0$, $\langle \pi_a(x) \rangle \equiv \pi_a^0$, $\langle \Delta_A(x) \rangle \equiv \Delta_A^o$, $\langle \Delta_{A'}^*(x) \rangle \equiv \Delta_{A'}^{*o}$ являются координатами точки глобального минимума ТДП Ω . Следовательно, набор параметров σ^0 , π_a^0 , Δ_A^o , $\Delta_{A'}^{*o}$, которые не зависят от x , образует решение системы уравнений стационарности:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \pi_a} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \Delta_A} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \Delta_{A'}^*} = 0. \quad (10)$$

²⁾Для того чтобы привести кварковый сектор лагранжиана (3) к выражению, стоящему в квадратных скобках в формуле (6), мы использовали хорошо известные соотношения $\partial_\nu^t = -\partial_\nu$, $C\gamma^\nu C^{-1} = -(\gamma^\nu)^t$, $C\gamma^5 C^{-1} = (\gamma^5)^t = \gamma^5$, $\tau^2 \vec{\tau} \tau^2 = -(\vec{\tau})^t$, $\tau^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

Сделаем в $\mathcal{S}_{\text{eff}}$ сдвигку: $\sigma(x) \rightarrow \sigma(x) + \sigma^0$, $\pi_a(x) \rightarrow \pi_a(x) + \pi_a^0$, $\Delta_A^*(x) \rightarrow \Delta_A^*(x) + \Delta_A^{*o}$, $\Delta_A(x) \rightarrow \Delta_A(x) + \Delta_A^o$. Тогда матрица Z из уравнения (8) преобразуется следующим образом:

$$Z \rightarrow \begin{pmatrix} D_0^+ & -K_0 \\ -K_0^* & D_0^- \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Sigma & K \\ K^* & \Sigma^t \end{pmatrix} \equiv S_0^{-1} - \begin{pmatrix} \Sigma & K \\ K^* & \Sigma^t \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где S_0 – матрица пропагатора кварков в представлении Намбу–Горькова и

$$(K_0, K_0^*, D_0^\pm, \Sigma_0, \Sigma_0^t) = (K, K^*, D^\pm, \Sigma, \Sigma^t)|_{\sigma=\sigma^0, \pi_a=\pi_a^0, \dots}.$$

Затем, разлагая уравнение (5) в ряд по бозонным полям (вплоть до второго порядка), имеем

$$\mathcal{S}_{\text{eff}}(\sigma, \pi_a, \Delta_A, \Delta_{A'}^*) = \mathcal{S}_{\text{eff}}^{(0)} + \mathcal{S}_{\text{eff}}^{(2)}(\sigma, \pi_a, \Delta_A, \Delta_{A'}^*) + \dots, \quad (12)$$

где (благодаря уравнениям стационарности в выражении (12) линейное по мезонным и дикварковым полям слагаемое отсутствует)

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\text{eff}}^{(0)} &= - \int d^4x \left[\frac{\sigma^0 \sigma^0 + \pi_a^0 \pi_a^0}{4G} + \frac{\Delta_A^o \Delta_A^{*o}}{4H} \right] - \frac{i}{2} \text{Tr}_{\{\text{NGscfx}\}} \ln(S_0^{-1}) \equiv \\ &\equiv -\Omega(\sigma^0, \pi_a^0, \Delta_A^o, \Delta_{A'}^{*o}) \int d^4x, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\text{eff}}^{(2)}(\sigma, \pi_a, \Delta_A, \Delta_{A'}^*) &= - \int d^4x \left[\frac{\sigma^2 + \pi_a^2}{4G} + \frac{\Delta_A \Delta_A^*}{4H} \right] + \\ &+ \frac{i}{4} \text{Tr}_{\{\text{NGscfx}\}} \left\{ S_0 \begin{pmatrix} \Sigma & K \\ K^* & \Sigma^t \end{pmatrix} S_0 \begin{pmatrix} \Sigma & K \\ K^* & \Sigma^t \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Так как в дальнейшем на основе эффективного действия $\mathcal{S}_{\text{eff}}^{(2)}$ мы будем исследовать спектр мезонных и дикварковых возбуждений, удобно представить уравнение (14) в виде

$$\mathcal{S}_{\text{eff}}^{(2)} = \mathcal{S}_{\text{mesons}}^{(2)} + \mathcal{S}_{\text{diquarks}}^{(2)} + \mathcal{S}_{\text{mixed}}^{(2)}, \quad (15)$$

где

$$\mathcal{S}_{\text{mesons}}^{(2)} = - \int d^4x \frac{\sigma^2 + \pi_a^2}{4G} + \frac{i}{4} \text{Tr}_{\text{scfx}} \{ S_{11} \Sigma S_{11} \Sigma + 2 S_{12} \Sigma^t S_{21} \Sigma + S_{22} \Sigma^t S_{22} \Sigma^t \}, \quad (16)$$

$$\mathcal{S}_{\text{diquarks}}^{(2)} = - \int d^4x \frac{\Delta_A \Delta_A^*}{4H} + \frac{i}{4} \text{Tr}_{\text{scfx}} \{ S_{12} K^* S_{12} K^* + 2 S_{11} K S_{22} K^* + S_{21} K S_{21} K \}, \quad (17)$$

$$\mathcal{S}_{\text{mixed}}^{(2)} = \frac{i}{2} \text{Tr}_{\text{scfx}} \{ S_{11} \Sigma S_{12} K^* + S_{21} \Sigma S_{11} K + S_{12} \Sigma^t S_{22} K^* + S_{21} K S_{22} \Sigma^t \}, \quad (18)$$

а S_{ij} – матричные элементы пропагатора кварков S_0 , определенного в формате (11).

2.2. ТДП, кварковый пропагатор и фазовая структура модели. Напомним, что фазовая структура любой теории определяется значениями ее параметров порядка. В нашем случае это величины σ^0 , π_a^0 , Δ_A^o , $\Delta_{A'}^{*o}$, являющиеся координатами точки глобального минимума ТДП Ω и удовлетворяющие уравнениям стационарности (10). В действительности количество параметров порядка можно значительно сократить. Во-первых, мы полагаем, что Р-четность не нарушена, поэтому $\langle \pi_a(x) \rangle \equiv \pi_a^0 = 0$. Во-вторых, используя инвариантность ТДП относительно цветowych $SU_c(3)$ -вращений, можно ограничиться лишь случаем, когда $\langle \Delta_2(x) \rangle \equiv \Delta_2^o \neq 0$,

$\langle \Delta_{5,7}(x) \rangle \equiv \Delta_{5,7}^0 = 0$. Таким образом, задача по нахождению фазовой структуры исходной модели сводится к нахождению только двух параметров порядка, $\Delta \equiv \langle \Delta_2(x) \rangle$ и $\sigma^0 \equiv \langle \sigma(x) \rangle$. Вводя динамическую массу кварков $m \equiv m_0 + \sigma^0$, теперь нетрудно с помощью соотношения (13) найти ТДП системы (см. также работы [17], [18]):

$$\Omega(m, \Delta) = \frac{(m - m_0)^2}{4G} + \frac{|\Delta|^2}{4H} - 4 \sum_{\pm} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} |E_{\Delta}^{\pm}| - 2 \sum_{\pm} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} |E^{\pm}|, \quad (19)$$

где $E_{\Delta}^{\pm} = \sqrt{(E^{\pm})^2 + |\Delta|^2}$, $E^{\pm} = E \pm \mu$, $E = \sqrt{\vec{q}^2 + m^2}$. Так как интегралы в выражении (19) содержат ультрафиолетовые расходимости, мы регуляризуем их, т.е. полагаем $|\vec{q}| < \Lambda$, где значение Λ дано в (2). При $m_0 \neq 0$ в зависимости от значений μ глобальный минимум ТДП (19) может находиться или в точке $\Delta = 0$, $m \neq 0$ (в этом случае в системе реализуется нормальная $SU_c(3)$ -инвариантная фаза, в которой ЦСП отсутствует), или в точке $\Delta \neq 0$, $m \neq 0$, соответствующей ЦСП-фазе плотной кварковой материи, в которой $SU_c(3)$ -симметрия спонтанным образом нарушена до $SU_c(2)$. Чтобы узнать, в какой из двух фаз находится система при данном значении μ , необходимо найти все решения уравнений стационарности для ТДП (19) (их называют еще уравнениями щели, или гар-уравнениями):

$$\frac{\Delta}{4H_s} = 4i\Delta \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{1}{q_0^2 - (E_{\Delta}^+)^2} + \frac{1}{q_0^2 - (E_{\Delta}^-)^2} \right\} = 2\Delta \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{1}{E_{\Delta}^+} + \frac{1}{E_{\Delta}^-} \right\}, \quad (20)$$

$$\frac{m - m_0}{2G} = 4im \sum_{\pm} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{E} \left\{ \frac{E^{\pm}}{q_0^2 - (E^{\pm})^2} \right\} + 8im \sum_{\pm} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{E} \left\{ \frac{E^{\pm}}{q_0^2 - (E_{\Delta}^{\pm})^2} \right\}, \quad (21)$$

а затем выбрать то из них, в котором ТДП принимает наименьшее значение. Конечно, описанную процедуру в полной мере удастся провести только с помощью численного анализа, результаты которого представлены на рис. 1, где нанесены координаты точки глобального минимума ТДП в зависимости от значений кваркового химического потенциала μ . Видно, что при $\mu < \mu_c \approx 350$ МэВ система находится в нормальной фазе, так как здесь $\Delta = 0$. При $\mu > \mu_c$ параметр порядка Δ уже отличен от нуля, что соответствует фазе с ЦСП. Отметим, что при $\mu = \mu_c$ переход из нормальной фазы в ЦСП-фазу происходит скачкообразно, т.е. с помощью фазового перехода первого рода³⁾.

Матричные элементы S_{ij} кваркового пропагатора S_0 , необходимого для нахождения эффективных действий (16)–(18), можно найти, используя процедуру, изложенную в работах [19]:

$$S_{11} = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} e^{-iq(x-y)} \left\{ \frac{q_0 - E^+}{q_0^2 - (E_{\Delta}^+)^2} \gamma^0 \bar{\Lambda}_+ + \frac{q_0 + E^-}{q_0^2 - (E_{\Delta}^-)^2} \gamma^0 \bar{\Lambda}_- \right\} P_{12}^{(c)} + \\ + \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} e^{-iq(x-y)} \left\{ \frac{\gamma^0 \bar{\Lambda}_+}{q_0 + E^+} + \frac{\gamma^0 \bar{\Lambda}_-}{q_0 - E^-} \right\} P_3^{(c)}, \quad (22)$$

³⁾Если голая масса кварков равна нулю, т.е. $m_0 = 0$, то при $\mu < \mu_c$ реализуется фаза со спонтанным нарушением киральной ($SU(2)_L \times SU(2)_R$)-инвариантности (здесь точка глобального минимума ТДП имеет вид $\Delta = 0$, $m \neq 0$). Однако при $\mu > \mu_c$ глобальный минимум располагается уже в точке вида $\Delta \neq 0$, $m = 0$, т.е. в этой области значений μ уже цветовая $SU_c(3)$ -симметрия спонтанно нарушена, а киральная $SU(2)_L \times SU(2)_R$ восстановлена.

$$S_{22} = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} e^{-iq(x-y)} \left\{ \frac{q_0 - E^-}{q_0^2 - (E_\Delta^-)^2} \gamma^0 \bar{\Lambda}_+ + \frac{q_0 + E^+}{q_0^2 - (E_\Delta^+)^2} \gamma^0 \bar{\Lambda}_- \right\} P_{12}^{(c)} + \\ + \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} e^{-iq(x-y)} \left\{ \frac{\gamma^0 \bar{\Lambda}_+}{q_0 + E^-} + \frac{\gamma^0 \bar{\Lambda}_-}{q_0 - E^+} \right\} P_3^{(c)}, \quad (23)$$

$$S_{21} = -i\Delta^* \tau_2 \lambda_2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} e^{-iq(x-y)} \left\{ \frac{\gamma^5 \bar{\Lambda}_+}{q_0^2 - (E_\Delta^+)^2} + \frac{\gamma^5 \bar{\Lambda}_-}{q_0^2 - (E_\Delta^-)^2} \right\}, \quad (24)$$

$$S_{12} = -i\Delta \tau_2 \lambda_2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} e^{-iq(x-y)} \left\{ \frac{\gamma^5 \bar{\Lambda}_+}{q_0^2 - (E_\Delta^-)^2} + \frac{\gamma^5 \bar{\Lambda}_-}{q_0^2 - (E_\Delta^+)^2} \right\}, \quad (25)$$

где $\bar{\Lambda}_\pm = (1 \pm \gamma^0(\vec{\gamma}\vec{q} - m)/E)/2$, а $P_{12}^{(c)} = \text{diag}(1, 1, 0)$, $P_3^{(c)} = \text{diag}(0, 0, 1)$ – два проекционных оператора в цветовом пространстве. Необходимо заметить, что как в выражениях (22)–(25), так и выше в формулах (20), (21) q_0 есть сокращенное обозначение для $q_0 + i\varepsilon \text{sign}(q_0)$, где $\varepsilon \rightarrow 0_+$. В импульсном представлении полюсы матричных элементов (22)–(25) определяют дисперсионные соотношения, т.е. зависимость энергии q_0 кварков, движущихся в плотной среде, от их трехмерных импульсов. Таким образом, имеем $q_0 = E_\Delta^-$ для энергии красного/зеленого кварков и $q_0 = E_\Delta^+$ для энергии красного/зеленого антикварков. Кроме того, энергия голубого кварка (антикварка) есть $q_0 = E^-$ ($q_0 = E^+$). Из рис. 1 видно, что в ЦСП-фазе, где $\mu > \mu_c$ и $m < \mu$, величина E может достигать значения μ , которое называется энергией Ферми. В этом случае очевидно, что для рождения в ЦСП-среде красного или зеленого кварков необходимо минимальное количество энергии, которое на уровне Ферми $E = \mu$ есть $(q_0)_{\min} = |\Delta|$ (иными словами, в спектре энергий этих кварков имеется щель (гар), равная $|\Delta|$). Для рождения голубых кварков в ЦСП-фазе никаких затрат энергии не требуется (щель в спектре энергий отсутствует), так как для них $(q_0)_{\min} = 0$ при $E = \mu$. В нормальной же фазе, т.е. при $\mu < \mu_c$, для рождения кварка любого цвета требуется минимальная энергия, равная $(m - \mu)$. Заметим, что в любой фазе минимальные энергии рождения антикварков и кварков отличаются друг от друга, что отражает факт нарушения зарядовой симметрии при $\mu \neq 0$.

3. МЕЗОНЫ И ДИКВАРКИ В ПЛОТНОЙ КВАРКОВОЙ СРЕДЕ

Далее предполагается, что Δ – действительная неотрицательная величина. Для того чтобы найти массы одночастичных бозонных возбуждений основного состояния кварковой материи, мы будем исходить из эффективного действия (15), необходимого для определения одночастично неприводимых (1PI) двухточечных функций Грина бозонных полей $\sigma(x)$, $\pi_a(x)$, $\Delta_A(x)$, $\Delta_{A'}^*(x)$. С их помощью мы затем будем находить массы частиц. В вакууме, т.е. при $T = 0$, $\mu = 0$, лоренц-инвариантность не нарушена, поэтому в импульсном представлении все двухточечные функции Грина зависят от единственной переменной $p^2 = p_0^2 - \vec{p}^2$. Квадрат массы частицы в этом случае есть нуль соответствующей 1PI-функции Грина (или полюс пропагатора) по p^2 . В плотной среде (при $\mu \neq 0$) лоренц-инвариантность нарушена, поэтому двухточечные функции Грина зависят от двух переменных, p_0 и $\vec{p}^2$. В этом случае квадрат массы скалярной частицы определяется как нуль соответствующей 1PI-функции Грина в системе покоя, т.е. при $\vec{p} = 0$, по переменной p_0^2 (см., например, работы [6], [20]). Таким образом, задача по нахождению масс мезонов и дикварков

Рис. 1. Динамическая масса кварков m (сплошная линия) и параметр порядка Δ (штриховая линия) как функции химического потенциала μ .

сводится к вычислению 1PI-функций Грина в импульсном пространстве и определению их нулей в системе покоя.

Для дальнейшего необходимо сделать замечание технического характера. Как видно из выражения (15), в эффективном действии присутствует слагаемое $\mathcal{S}_{\text{mixed}}^{(2)}$ (18), смешивающее поля $\sigma(x)$, $\Delta_2(x)$, $\Delta_2^*(x)$ и порождающее недиагональные 1PI-функции Грина вида $\Gamma_{\sigma\phi}(p)$, у которых одна из внешних линий соответствует σ -полю, а другая – полю ϕ ($\phi = \Delta_2^*, \Delta_2$). Однако детальные вычисления показывают, что в системе покоя, т.е. при $p = (p_0, 0, 0, 0)$, каждая из этих функций пропорциональна $m\Delta$ (см. работу [7]). Следовательно, в нормальной кварковой фазе, где $\Delta = 0$ и цветовая симметрия не нарушена, смешивание σ -мезона с дикварками отсутствует. При вычислениях же масс частиц в ЦСП-фазе мы пренебрегаем недиагональными функциями Грина вида $\Gamma_{\sigma\phi}(p)$ по причине относительной малости динамической массы кварков m по сравнению с Δ (см. рис. 1)⁴.

3.1. Массы π - и σ -мезонов. Одночастично неприводимые функции Грина соответственно для σ - и π -мезонов находятся из выражения (16) по формулам

$$\Gamma(x-y) = -\frac{\delta^2 \mathcal{S}_{\text{mesons}}^{(2)}}{\delta\sigma(y)\delta\sigma(x)}, \quad \Pi_{ab}(x-y) = -\frac{\delta^2 \mathcal{S}_{\text{mesons}}^{(2)}}{\delta\pi_b(y)\delta\pi_a(x)}. \quad (26)$$

Используя в выражении (16) формулы (22)–(25) для матричных элементов S_{ij} , нетрудно с помощью соотношений (26) получить 1PI-функции Грина $\Gamma(x-y)$, $\Pi_{ab}(x-y)$, а затем и их выражения в импульсном представлении $\Gamma(p)$, $\Pi_{ab}(p)$, соответственно. Нули последних определяют дисперсионные соотношения для частиц и античастиц. Поскольку нас интересуют только массы частиц в плотной кварковой среде, то, как было сказано выше, мы должны перейти в систему покоя, в которой

⁴Более того, если голая масса кварков m_0 равна нулю, то и $m = 0$ в ЦСП-фазе. Поэтому в киральном пределе смешивание между σ -мезонами и дикварками в ЦСП-фазе вообще отсутствует.

нули функций $\Gamma(p_0)$, $\Pi_{ab}(p_0)$ являются массами соответствующих частиц. Таким образом, если $\vec{p} = 0$, то

$$\begin{aligned} \Pi_{ab}(p_0) = & \frac{\delta_{ab}}{2G} - 8\delta_{ab} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{E_{\Delta}^+ E_{\Delta}^- + E^+ E^- + \Delta^2}{E_{\Delta}^+ E_{\Delta}^-} \frac{E_{\Delta}^+ + E_{\Delta}^-}{(E_{\Delta}^+ + E_{\Delta}^-)^2 - p_0^2} - \\ & - 16\delta_{ab} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{\theta(E - \mu)E}{4E^2 - p_0^2} \equiv \delta_{ab}\Pi(p_0), \end{aligned} \quad (27)$$

$$\Gamma(p_0) = \Gamma_0(p_0^2) + \Gamma_1(p_0^2), \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_0(p_0^2) = & \frac{1}{2G} - 8 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{\bar{q}^2}{E^2} \frac{E_{\Delta}^+ E_{\Delta}^- + E^+ E^- + \Delta^2}{E_{\Delta}^+ E_{\Delta}^-} \frac{E_{\Delta}^+ + E_{\Delta}^-}{(E_{\Delta}^+ + E_{\Delta}^-)^2 - p_0^2} - \\ & - 16 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{\bar{q}^2}{E} \frac{\theta(E - \mu)}{4E^2 - p_0^2}, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\Gamma_1(p_0^2) = 16\Delta^2 m^2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 E^2} \left\{ \frac{1}{E_{\Delta}^+ [p_0^2 - 4(E_{\Delta}^+)^2]} + \frac{1}{E_{\Delta}^- [p_0^2 - 4(E_{\Delta}^-)^2]} \right\}, \quad (30)$$

где использованы те же обозначения, что и в выражении (19). Значения p_0 , в которых функции (27), (28) обращаются в нуль, есть массы π - и σ -мезонов, соответственно (см. рис. 2)⁵⁾.

Из рис. 2 видно, что в ЦСП-фазе массы π - и σ -мезонов имеют величины порядка 300 МэВ. Кроме того, подчеркнем, что в этой фазе π -мезон стабилен относительно каналов сильного распада. Если не учитывать смешивание σ -мезона и Δ_2 -дикварка (именно этот случай рассматривается здесь), то σ -мезон – также стабильная частица в ЦСП-фазе. Однако следует заметить, что с учетом смешивания σ -мезон в ЦСП-фазе является резонансом с довольно малой шириной порядка 30 МэВ (см. работу [7]).

3.2. Массы дикварков. В этом случае мы должны исходить из эффективного действия (17), которое можно представить в виде $\mathcal{S}_{\text{diquarks}}^{(2)} = \mathcal{S}_{22}^{(2)} + \mathcal{S}_{55}^{(2)} + \mathcal{S}_{77}^{(2)}$, где

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{22}^{(2)} = & - \int d^4x \frac{\Delta_2 \Delta_2^*}{4H} + \frac{i}{4} \text{Tr}_{scfx} \{ S_{12} i \Delta_2^* \gamma^5 \tau_2 \lambda_2 S_{12} i \Delta_2^* \gamma^5 \tau_2 \lambda_2 + \\ & + 2S_{11} i \Delta_2 \gamma^5 \tau_2 \lambda_2 S_{22} i \Delta_2^* \gamma^5 \tau_2 \lambda_2 + S_{21} i \Delta_2 \gamma^5 \tau_2 \lambda_2 S_{21} i \Delta_2 \gamma^5 \tau_2 \lambda_2 \}, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\mathcal{S}_{AA}^{(2)} = - \int d^4x \frac{\Delta_A \Delta_A^*}{4H} + \frac{i}{2} \text{Tr}_{scfx} \{ S_{11} i \Delta_A \gamma^5 \tau_2 \lambda_A S_{22} i \Delta_A^* \gamma^5 \tau_2 \lambda_A \}, \quad (32)$$

$A = 5, 7$. Отсюда следует, что дикварки не смешиваются друг с другом, а каждое из выражений (31), (32) представимо в виде ($A = 2, 5, 7$)

$$\mathcal{S}_{AA}^{(2)} = - \frac{1}{2} \sum_{X,Y} \int d^4u d^4v X(u) {}_A\Gamma_{XY}(u-v) Y(v), \quad (33)$$

где (для каждого фиксированного $A = 2, 5, 7$) $X(x), Y(x) = \Delta_A(x), \Delta_A^*(x)$, и ${}_A\Gamma_{XY}(z)$ есть матричные элементы (2×2) -матрицы ${}_A\Gamma(z)$ 1PI-функций Грина (в выражении (33) используется координатное представление) дикварковых полей $\Delta_A(x), \Delta_A^*(x)$.

⁵⁾ Отметим, что слагаемое $\Gamma_1(p_0^2)$ в формуле (28) пропорционально $\Delta^2 m^2$ и в силу этого является малой величиной более высокого порядка, чем недиагональные 1PI-функции Грина $\Gamma_{\sigma\phi}(p_0)$ ($\phi = \Delta_2^*, \Delta_2$). Последние, как мы договорились выше, не учитываются в нашем рассмотрении. По этой же причине и член (30) был опущен в численных расчетах массы σ -мезона.

Рис. 2. Массы σ - (сплошная линия) и π -мезонов (штриховая линия) как функции μ .

В общем случае эта матрица недиагональна, поэтому массы дикварков являются нулями детерминанта ее импульсного представления.

3.2.1. Массы дикварков в ЦСП-фазе ($\Delta \neq 0$, $\mu > \mu_c$). Рассмотрим сначала сектор Δ_5 и Δ_5^* дикварков. Как следует из (33) при $A = 5$,

$${}_5\Gamma_{XY}(x-y) = -\frac{\delta^2 \mathcal{S}_{55}^{(2)}}{\delta Y(y) \delta X(x)} \quad (34)$$

(здесь $X, Y = \Delta_5(x), \Delta_5^*(x)$). Напомним также, что ${}_5\Gamma(z)$ является симметричной матрицей, т.е. ${}_5\Gamma_{XY}(z) = {}_5\Gamma_{YX}(-z)$. Из выражений (32) и (34) следует, что ${}_5\Gamma_{\Delta_5\Delta_5}(z) = {}_5\Gamma_{\Delta_5^*\Delta_5^*}(z) = 0$, а ненулевые матричные элементы в импульсном представлении имеют вид

$${}_5\Gamma_{\Delta_5^*\Delta_5}(p) = \frac{1}{4H} - i \text{Tr}_{sc} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \{S_{11}(q+p) i\gamma^5 \lambda_5 S_{22}(q) i\gamma^5 \lambda_5\}, \quad (35)$$

${}_5\Gamma_{\Delta_5\Delta_5^*}(p) = {}_5\Gamma_{\Delta_5^*\Delta_5}(-p)$, где $S_{11}(q)$, $S_{22}(q)$ – фурье-образы выражений (22) и (23). Так как нас интересуют массы дикварков, необходимо в выражении (35) перейти в систему покоя, где $p = (p_0, 0, 0, 0)$ (см. работы [6], [20]). В этом случае нетрудно получить

$${}_5\Gamma_{\Delta_5^*\Delta_5}(p_0) = \frac{1}{4H} - 4i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{q_0 + E^+}{(p_0 + q_0 + E^+)(q_0^2 - (E_\Delta^+)^2)} + \frac{q_0 - E^-}{(p_0 + q_0 - E^-)(q_0^2 - (E_\Delta^-)^2)} \right\}. \quad (36)$$

Это выражение справедливо как при $\Delta = 0$, так и при $\Delta \neq 0$. При $\Delta \neq 0$, т.е. в ЦСП-фазе, в выражении (36) полезно исключить константу связи H с помощью гар-уравнения (20), а затем проинтегрировать по q_0 , используя прескрипцию:

$q_0 \rightarrow q_0 + i\varepsilon \operatorname{sign}(q_0)$, $(p_0 + q_0) \rightarrow (p_0 + q_0) + i\varepsilon \operatorname{sign}(p_0 + q_0)$. В результате получается

$${}_5\Gamma_{\Delta_5^* \Delta_5}(p_0) = 2p_0 H(p_0), \quad {}_5\Gamma_{\Delta_5 \Delta_5^*}(p_0) = -2p_0 H(-p_0), \quad (37)$$

где

$$H(p_0) = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{1}{(p_0 + E^+ + E_\Delta^+) E_\Delta^+} + \frac{\theta(E^-)}{(p_0 - E^- - E_\Delta^-) E_\Delta^-} + \frac{\theta(-E^-)}{(p_0 - E^- + E_\Delta^-) E_\Delta^-} \right\} \quad (38)$$

(при выводе этого уравнения мы учли, что $\mu > 0$). Теперь с помощью формул (37) нетрудно получить детерминант матрицы ${}_5\Gamma(p_0)$:

$$\det {}_5\Gamma(p_0) = -{}_5\Gamma_{\Delta_5^* \Delta_5}(p_0) {}_5\Gamma_{\Delta_5 \Delta_5^*}(p_0) \equiv 4p_0^2 H(p_0) H(-p_0). \quad (39)$$

Напомним, что значение p_0^2 , при котором $\det {}_5\Gamma(p_0)$ обращается в нуль, определяет квадрат массы бозонного возбуждения в Δ_5 -секторе теории. Так как $\Delta_5(x)$ – комплексное поле (имеет две вещественные степени свободы), то по переменной p_0^2 уравнение $\det {}_5\Gamma(p_0) = 0$ должно иметь или два различных решения (этот случай соответствует двум частицам с разными массами), или одно, но двукратно вырожденное решение (в этом случае можно говорить о двух разных частицах с одинаковыми массами). Очевидно, что это уравнение имеет одно тривиальное решение $p_0^2 = 0$, которое можно отождествить с безмассовым голдстоуновским бозоном (ГБ). (Так как $H(0) \neq 0$ при $\mu \neq 0$, то других безмассовых бозонов в Δ_5 -секторе нет.) В отличие от лоренц-инвариантных систем, где безмассовые частицы имеют линейный закон дисперсии, этот бозон обладает квадратичным законом дисперсии, т.е. $p_0 \sim \vec{p}^2$ при $|\vec{p}| \rightarrow 0$ [5]. Далее, предположим, что в некоторой ненулевой точке $p_0 = -m_1$ функция $H(p_0)$ обращается в нуль, т.е. $H(-m_1) = 0$. Тогда $\det {}_5\Gamma(p_0)$ по переменной p_0 обращается в нуль в двух точках $p_0 = \pm m_1$ (по переменной p_0^2 – в точке $p_0^2 = m_1^2$), что соответствует бозону массы m_1 . Численные расчеты показывают, что в ЦСП-фазе m_1 есть очень малая величина: $m_1 \sim 15$ МэВ.

Точно такая же картина наблюдается и в Δ_7 -секторе модели, где присутствует безмассовый ГБ, а также легкий бозон массы m_1 . Учитывая, что основное состояние ЦСП-фазы $SU_c(2)$ -симметрично, можно сказать, что в Δ_5 - Δ_7 -секторе модели мы обнаружили $SU_c(2)$ -дублет ГБ, а также $SU_c(2)$ -дублет легких бозонов с массой m_1 . На рис. 3 масса дублета легких бозонов m_1 изображена пунктирной линией.

Исследуем теперь спектр бозонных возбуждений ЦСП-фазы в секторе Δ_2 , Δ_2^* дикварков. Для этих полей матрица 1PI-функций Грина ${}_2\Gamma(p_0)$ в системе покоя импульсного представления имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned} {}_2\Gamma_{\Delta_2 \Delta_2}(p_0) &= {}_2\Gamma_{\Delta_2^* \Delta_2^*}(p_0) = 4\Delta^2 I_0(p_0^2), \\ {}_2\Gamma_{\Delta_2 \Delta_2^*}(p_0) &= {}_2\Gamma_{\Delta_2^* \Delta_2}(-p_0) = (4\Delta^2 - 2p_0^2) I_0(p_0^2) + 4p_0 I_1(p_0^2), \end{aligned} \quad (40)$$

где

$$I_0(p_0^2) = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_\Delta^+ [4(E_\Delta^+)^2 - p_0^2]} + \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_\Delta^- [4(E_\Delta^-)^2 - p_0^2]}, \quad (41)$$

$$I_1(p_0^2) = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{E^+}{E_\Delta^+ [4(E_\Delta^+)^2 - p_0^2]} - \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{E^-}{E_\Delta^- [4(E_\Delta^-)^2 - p_0^2]}. \quad (42)$$

Спектр масс определяется уравнением

$$\det {}_2\Gamma(p_0) \equiv 4p_0^2 \{ (p_0^2 - 4\Delta^2) I_0^2(p_0^2) - 4I_1^2(p_0^2) \} = 0. \quad (43)$$

Рис. 3. Массы дикварков. При $\mu < \mu_c = 350$ МэВ шесть дикварковых состояний образуют $SU_c(3)$ -триплет и антриплет. В триплет входят тяжелые частицы с массой M_{Δ^*} (сплошная линия), в антриплет – легкие частицы с массой M_{Δ} (штриховая линия) (см. (46)). В ЦСП-фазе (при $\mu > \mu_c$) спектр масс в секторе дикварков содержит три ГБ (штриховая линия), $SU_c(2)$ -дублет легких дикварков (пунктирная линия), а также синглетный по цвету тяжелый резонанс. Его масса M представлена штрих-пунктирной линией. Ширина резонанса Γ имитируется на рисунке затененным параллелограммом с шириной Γ . Его верхняя граница лежит на $\Gamma/2$ выше, а нижняя – на $\Gamma/2$ ниже, чем масса резонанса M .

По переменной p_0^2 это уравнение имеет очевидное решение $p_0^2 = 0$, соответствующее ГБ. Детальные исследования (см. работу [6]) показывают, что на втором римановом листе переменной p_0^2 существует второе решение уравнения (43), которое соответствует тяжелому резонансу. Его масса M и ширина Γ нанесены на рис. 3 при $\mu > \mu_c$. В дикварковом секторе Δ_2, Δ_2^* как ГБ, так и тяжелый резонанс являются синглетами относительно $SU_c(2)$ -группы.

Отметим одну интересную особенность ЦСП-фазы, которая выражается в нестандартном количестве ГБ. Хорошо известно, что если в лоренц-инвариантной теории некоторая группа внутренней симметрии $\mathcal{G}$ размерности r_1 спонтанно нарушается до подгруппы $\mathcal{H}$ размерности r_2 , то в спектре масс должны присутствовать $r_1 - r_2$ ГБ (теорема Голдстоуна). Так как в нашем случае $\mathcal{G} \equiv SU_c(3)$, $\mathcal{H} \equiv SU_c(2)$, то $r_1 - r_2 = 5$. Однако мы обнаружили только три ГБ, что не согласуется с теоремой Голдстоуна. Решение этого парадокса заключается в следующем. Теорема Голдстоуна формулируется в рамках лоренц-инвариантных систем, а в лагранжиане (1) член с химическим потенциалом явным образом нарушает лоренцеву симметрию. В таких ситуациях необходимо руководствоваться теоремой Нильсена–Чадхи [21]: пусть n_1 и n_2 суть числа безмассовых возбуждений, обладающих соответственно линейным ($E \sim |\vec{p}|$) и квадратичным ($E \sim |\vec{p}|^2$) законами дисперсии в области малых

значений трехмерного импульса $\vec{p}$ (E – энергия частицы); тогда $r_1 - r_2 \leq n_1 + 2n_2$. Вспоминая, что два из трех безмассовых возбуждений ЦСП-фазы модели (1) обладают квадратичным законом дисперсии, мы видим, что наши результаты не противоречат этой более общей теореме. Нестандартное количество ГБ присутствует и в других квантовых теориях с химическим потенциалом [22].

Все вышесказанное относится к кварковой материи, в которой отсутствует цветовая нейтральность. Для описания нейтральной по цвету ЦСП-среды необходимо в лагранжиан (1) ввести слагаемое с цветовым химическим потенциалом (см., например, работы [7], [23]). С учетом нового члена цветовая симметрия модели редуцируется до группы $\mathcal{G} \equiv SU_c(2) \times U_{\lambda_8}(1)$, для которой $r_1 = 4$. В ЦСП-фазе этой системы симметрия основного состояния по-прежнему есть $\mathcal{H} \equiv SU_c(2)$, т.е. $r_2 = 3$. Следовательно, $r_1 - r_2 = 1$. Именно такое (стандартное) число ГБ, равное единице, и было обнаружено в спектре масс нейтральной по цвету ЦСП-фазы кварковой материи [7], [23]. Кроме того, в дикварковом секторе модели присутствуют четыре (вместо двух) легких дикварковых состояния и тяжелый резонанс, а массы мезонов при наложении условия цветовой нейтральности практически не меняются [7], [23].

3.2.2. Массы дикварков в нормальной фазе ($\Delta = 0$, $\mu < \mu_c$). В $SU_c(3)$ -симметричной фазе ($\mu < \mu_c$) параметр порядка Δ равен нулю, и три дикварковых поля $\Delta_A(x)$ ($A = 2, 5, 7$) не смешиваются в эффективном действии (15) ни между собой, ни с мезонными полями. Поэтому достаточно рассмотреть спектр бозонных возбуждений, например, в Δ_5 -секторе. В этой фазе детерминант ${}_5\Gamma(p_0)$ матрицы 1PI-функций Грина дикварковых полей Δ_5 , Δ_5^* имеет вид (мы используем систему покоя в импульсном представлении)

$$\det {}_5\Gamma(p_0) = {}_5\Gamma_{\Delta_5^* \Delta_5}(p_0) {}_5\Gamma_{\Delta_5 \Delta_5^*}(p_0) = {}_5\Gamma_{\Delta_5^* \Delta_5}(p_0) {}_5\Gamma_{\Delta_5^* \Delta_5}(-p_0), \quad (44)$$

где ${}_5\Gamma_{\Delta_5^* \Delta_5}(p_0)$ задана выражением (36). (Равенство (39) для $\det {}_5\Gamma(p_0)$ справедливо только при $\Delta \neq 0$, т.е. в ЦСП-фазе. Для $SU_c(3)$ -симметричной фазы, где $\Delta = 0$, выражение (39) использовать нельзя.) Принимая во внимание соотношение $m > \mu$, справедливое при $\mu < \mu_c$ (см. рис. 1), мы видим, что в нормальной фазе $E \equiv \sqrt{\vec{q}^2 + m^2} > \mu$, т.е. $E^\pm > 0$. В этом случае в выражении (36) нетрудно провести интегрирование по q_0 и получить выражение, которое справедливо только в $SU_c(3)$ -симметричной фазе:

$${}_5\Gamma_{\Delta_5^* \Delta_5}(p_0) = \frac{1}{4H} - 16 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{E}{4E^2 - (p_0 + 2\mu)^2} \equiv \frac{1}{4H} - F(\epsilon), \quad (45)$$

где $\epsilon = (p_0 + 2\mu)^2$. Очевидно, что массы дикварков определяются уравнением $\det {}_5\Gamma(p_0) = 0$, т.е. нулями выражения (45), в котором функция $F(\epsilon)$ аналитична в комплексной ϵ -плоскости, за исключением разреза вдоль действительной оси $4m^2 < \epsilon$. Численные расчеты показывают, что для значений (2) параметров модели уравнение ${}_5\Gamma_{\Delta_5^* \Delta_5}(p_0) = 0$ имеет единственный корень ϵ_0 , лежащий на действительной оси ($0 < \epsilon_0 < 4m^2$), который приводит к следующим значениям масс дикварков (решениям уравнения (44)) при $\mu < \mu_c$:

$$(M_\Delta)^2 = (1.998m - 2\mu)^2, \quad (M_{\Delta^*})^2 = (1.998m + 2\mu)^2. \quad (46)$$

Мы связываем M_Δ с массой дикварка, обладающего барионным зарядом $B = 2/3$, и M_{Δ^*} – с массой антидикварка и барионным зарядом $B = -2/3$. Разница между массами дикварка и антидикварка объясняется отсутствием зарядовой симметрии

при $\mu \neq 0$. Благодаря $SU_c(3)$ -симметрии частицы с массами (46) присутствуют и в секторах Δ_2 , Δ_7 . Таким образом, в спектре масс модели при $\mu < \mu_c$ мы имеем $SU(3)_c$ -антитриплет дикварков массы M_Δ , а также $SU(3)_c$ -триплет антидикварков массы M_{Δ^*} . Зависимость этих масс от μ представлена на рис. 3 при $\mu < \mu_c$.

Напомним, что до сих пор мы рассматривали случай $H = 3G/4$. Интересно, однако, исследовать влияние величины H (при фиксированном значении G) на спектр масс дикварков в нормальной фазе. Из формулы (45) следует, что нуль ϵ_0 этого выражения лежит внутри интервала $0 < \epsilon_0 < 4m^2$, только если $H^* < H < H^{**}$, где

$$H^* \equiv \frac{1}{4F(4m^2)} = \frac{\pi^2}{4[\Lambda\sqrt{m^2 + \Lambda^2} + m^2 \ln((\Lambda + \sqrt{m^2 + \Lambda^2})/m)]},$$

$$H^{**} \equiv \frac{1}{4F(0)} = \frac{\pi^2}{4[\Lambda\sqrt{m^2 + \Lambda^2} - m^2 \ln((\Lambda + \sqrt{m^2 + \Lambda^2})/m)]} = \frac{3mG}{2(m - m_0)}. \quad (47)$$

В этом случае в нормальной фазе присутствуют стабильные дикварки, массы которых качественно описываются формулами (46). Если взаимодействие в дикварковом канале довольно мало, т.е. $H < H^*$, то ϵ_0 переходит на второй риманов лист переменной ϵ и, как результат, появляются нестабильные дикварковые моды (резонансы). В другом предельном случае, т.е. при сильном взаимодействии в дикварковом канале ($H > H^{**}$), нуль ϵ_0 выражения (45) располагается на отрицательной полуоси переменной ϵ , т.е. $(p_0 + 2\mu)^2 < 0$. Это обстоятельство указывает на тахионную нестабильность нормальной фазы и является достаточным признаком существования другого, более глубокого, основного состояния системы. Действительно, как было показано в работе [24], при больших значениях константы связи H цветовая симметрия модели нарушается даже при $\mu = 0$, а значит, при всех $\mu > 0$ ЦСП-фаза более предпочтительна, чем нормальная кварковая фаза.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основной целью предложенной статьи является описание плотной кварковой материи в рамках модели НИЛ (1), содержащей кварк-антикварковый и дикварковый каналы взаимодействия. Исследуя ТДП, мы показали, что для значений параметров (2) в модели реализуется фаза с ЦСП при $\mu > \mu_c = 350$ МэВ. Так как в основном состоянии этой фазы дикварковый конденсат отличен от нуля, то исходная $SU_c(3)$ -симметрия спонтанно нарушена до $SU_c(2)$. В этом случае, если использовать теорему Голдстоуна в качестве основы для определения числа ГБ в спектре масс, можно ожидать появления пяти ГБ. Однако мы показали, что в ЦСП-фазе присутствует нестандартное их количество, равное трем, два из которых имеют квадратичный закон дисперсии. Противоречия никакого нет, поскольку в лоренц-неинвариантных системах таких, как НИЛ-модель (1), при подсчете ГБ безмассовые бозоны с квадратичной зависимостью энергии от импульса нужно учитывать дважды [21]. Помимо трех ГБ в дикварковом секторе ЦСП-фазы модели мы обнаружили дублет легких состояний (их масса ~ 15 МэВ), а также тяжелый резонанс массы ~ 1100 МэВ.

Что касается мезонных возбуждений ЦСП-фазы, то доказано присутствие стабильных π -мезонов с массой ~ 330 МэВ. Примерно такую же массу имеет и σ -мезон, который стабилен только в киральном пределе, где токовая масса кварков $m_0 = 0$. Если же $m_0 \neq 0$, то, во-первых, в ЦСП-фазе σ -мезон смешивается с дикварками, а во-вторых, он является нестабильной частицей с шириной распада ~ 30 МэВ.

Мы также рассмотрели массы дикварков в нормальной кварковой фазе, в которой $SU_c(3)$ -симметрия не нарушена ($\mu < \mu_c$). В этом случае для значений (2) параметров модели все дикварки – стабильные частицы, три из которых (антидикварки) образуют тяжелый $SU_c(3)$ -триплет, а другие три (дикварки) – легкий антитриплет (см. формулы (46) и рис. 3). Такое расщепление масс дикварков и антидикварков обусловлено отсутствием зарядовой симметрии при $\mu \neq 0$. Если константа связи H достаточно мала, то в нормальной фазе все дикварки становятся нестабильными состояниями. Если же взаимодействие в дикварковом канале велико ($H > H^{**}$, где величина H^{**} представлена формулой (47)), то нормальная кварковая фаза запрещена в исходной НИЛ-модели, и цветовая симметрия обязательно спонтанно нарушена.

Благодарности. Авторы признательны В. Л. Юдичеву за плодотворное сотрудничество и полезные обсуждения. Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 05-02-16699), а также Немецкого исследовательского общества (DFG-project 436 RUS 113/477/0-2).

Список литературы

- [1] B. C. Barrois, *Nucl. Phys. B*, **129** (1977), 390; D. Bailin, A. Love, *Nucl. Phys. B*, **190** (1981), 175.
- [2] D. T. Son, *Phys. Rev. D*, **59** (1999), 094019; T. Schäfer, F. Wilczek, *Phys. Rev. D*, **60** (1999), 114033; D. K. Hong, V. A. Miransky, I. A. Shovkovy et al., *Phys. Rev. D*, **61** (2000), 056001; W. E. Brown, J. T. Liu, H.-C. Ren, *Phys. Rev. D*, **61** (2000), 114012.
- [3] Y. Nambu, G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.*, **124** (1961), 246.
- [4] R. Rapp, T. Schäfer, E. V. Shuryak et al., *Ann. Phys.*, **280** (2000), 35; M. Alford, *Annual Rev. Nucl. Part. Sci.*, **51** (2001), 131; G. Nardulli, *Riv. Nuovo Cimento*, **25**:3 (2002), 1; M. Buballa, *Phys. Rep.*, **407** (2005), 205; M. Huang, *Int. J. Mod. Phys. E*, **14** (2005), 675; I. A. Shovkovy, *Found. Phys.*, **35** (2005), 1309.
- [5] D. Blaschke, D. Ebert, K. G. Klimenko et al., *Phys. Rev. D*, **70** (2004), 014006.
- [6] D. Ebert, K. G. Klimenko, V. L. Yudichev, *Phys. Rev. C*, **72** (2005), 015201.
- [7] D. Ebert, K. G. Klimenko, V. L. Yudichev, *Phys. Rev. D*, **72** (2005), 056007.
- [8] Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, А. И. Оксак, И. Т. Тодоров, *Общие принципы квантовой теории поля*, Наука, М., 1987.
- [9] М. К. Волков, Д. Эберт, *ЯФ*, **36** (1982), 1265; M. K. Volkov, D. Ebert, *Z. Phys. C*, **16** (1983), 205; M. K. Volkov, *Ann. Phys.*, **157** (1984), 282; D. Ebert, H. Reinhardt, *Nucl. Phys. B*, **271** (1986), 188; D. Ebert, H. Reinhardt, M. K. Volkov, *Progr. Part. Nucl. Phys.*, **33** (1994), 1; R. G. Jafarov, V. E. Rochev, *Central Eur. J. Phys.*, **2** (2004), 367; R. G. Jafarov, *Azerbaijan J. phys.*, **2005**:3 (2005), 27; *On pion correction to quark mass in next-leading order of mean-field expansion in NJL model*, [hep-ph/0412114](#).
- [10] М. К. Волков, *ЭЧАЯ*, **17** (1986), 433.
- [11] T. Hatsuda, T. Kunihiro, *Phys. Rep.*, **247** (1994), 221; S. P. Klevansky, *Rev. Mod. Phys.*, **64** (1992), 649.
- [12] D. Ebert, L. Kaschluhn, G. Kastelewicz, *Phys. Lett. B*, **264** (1991), 420; U. Vogl, *Z. Phys. A*, **337** (1990), 191; U. Vogl, W. Weise, *Progr. Part. Nucl. Phys.*, **27** (1991), 195.
- [13] D. Ebert, L. Kaschluhn, *Phys. Lett. B*, **297** (1992), 367; D. Ebert, T. Jurke, *Phys. Rev. D*, **58** (1998), 034001; L. J. Abu-Raddad, D. Ebert, A. Hosaka et al., *Phys. Rev. C*, **66** (2002), 025206; H. Reinhardt, *Phys. Lett. B*, **244** (1990), 316; N. Ishii, W. Benz, K. Yazaki, *Phys. Lett. B*, **301** (1993), 165; C. Hanhart, S. Krewald, *Phys. Lett. B*, **344** (1995), 55.

- [14] V. P. Gusynin, V. A. Miransky, I. A. Shovkovy, *Phys. Lett. B*, **349** (1995), 477; А. С. Вшивцев, К. Г. Клименко, Б. В. Магницкий, *Письма в ЖЭТФ*, **62** (1995), 265; А. С. Вшивцев, М. А. Вдовиченко, К. Г. Клименко, *ЯФ*, **63** (2000), 542; D. Ebert, K. G. Klimenko, M. A. Vdovichenko et al., *Phys. Rev. D*, **61** (2000), 025005; T. Inagaki, D. Kimura, T. Murata, *Prog. Theor. Phys.*, **111** (2004), 371; E. J. Ferrer, V. de la Incera, C. Manuel, *Phys. Rev. Lett.*, **95** (2005), 152002.
- [15] T. Inagaki, T. Muta, S. D. Odintsov, *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, **127** (1997), 93; E. V. Gorbary, *Phys. Rev. D*, **61** (2000), 024013; Ю. И. Шильнов, В. В. Читов, *ЯФ*, **64** (2001), 2138; X. Huang, X. Hao, P. Zhuang, *Chiral phase structure at finite temperature and density in Einstein universe*, [hep-ph/0602186](#); D. K. Kim, I. G. Koh, *Phys. Rev. D*, **51** (1995), 4573; А. С. Вшивцев, М. А. Вдовиченко, К. Г. Клименко, *ЖЭТФ*, **114** (1998), 418; А. С. Вшивцев, А. К. Клименко, К. Г. Клименко, *ЯФ*, **61** (1998), 543; E. J. Ferrer, V. de la Incera, V. P. Gusynin, *Phys. Lett. B*, **455** (1999), 217; E. J. Ferrer, V. de la Incera, *Вестник ТГПУ*, **44:7** (2004), 88; [hep-ph/0408229](#).
- [16] M. Asakawa, K. Yazaki, *Nucl. Phys. A*, **504** (1989), 668; P. Zhuang, J. Hüfner, S. P. Klevansky, *Nucl. Phys. A*, **576** (1994), 525; D. Ebert, Yu. L. Kalinovsky, L. Münchow et al., *Int. J. Mod. Phys. A*, **8** (1993), 1295; M. Buballa, *Nucl. Phys. A*, **611** (1996), 393; А. С. Вшивцев, К. Г. Клименко, *Письма в ЖЭТФ*, **64** (1996), 313; D. Ebert, K. G. Klimenko, *Nucl. Phys. A*, **728** (2003), 203.
- [17] T. M. Schwarz, S. P. Klevansky, G. Papp, *Phys. Rev. C*, **60** (1999), 055205; M. Sadzikowski, *Mod. Phys. Lett. A*, **16** (2001), 1129; D. Ebert, K. G. Klimenko, H. Toki, *Phys. Rev. D*, **64** (2001), 014038; D. Ebert V. V. Khudiyakov, V. Ch. Zhukovsky, K. G. Klimenko, *Phys. Rev. D*, **65** (2002), 054024; T. Ohsaku, *Phys. Lett. B*, **634** (2006), 285; *Dynamical chiral symmetry breaking, color superconductivity, and Bose–Einstein condensation in an $SU(N_c) \times U(N_f)_L \times U(N_f)_R$ -invariant supersymmetric Nambu–Jona–Lasinio model at finite temperature and density*, [hep-ph/0601009](#).
- [18] M. Huang, P. Zhuang, W. Chao, *Phys. Rev. D*, **67** (2003), 065015.
- [19] M. Huang, P. Zhuang, W. Chao, *Phys. Rev. D*, **65** (2002), 076012; Z. G. Wang, S. L. Wan, W. M. Yang, *New approach for calculating Nambu–Gorkov propagator in color superconductivity theory*, [hep-ph/0508302](#).
- [20] J. B. Kogut, M. A. Stephanov, D. Toublan et al., *Nucl. Phys. B*, **582** (2000), 477; P. Costa, M. C. Ruivo, C. A. de Sousa et al., *Phys. Rev. C*, **70** (2004), 025204.
- [21] H. B. Nielsen, S. Chadha, *Nucl. Phys. B*, **105** (1976), 445.
- [22] V. A. Miransky, I. A. Shovkovy, *Phys. Rev. Lett.*, **88** (2002), 111601; V. P. Gusynin, V. A. Miransky, I. A. Shovkovy, *Phys. Lett. B*, **581** (2004), 82; *Mod. Phys. Lett. A*, **19** (2004), 1341; T. Brauner, *Phys. Rev. D*, **72** (2005), 076002; L. He, M. Jin, P. Zhuang, *Phys. Rev. A*, **74** (2006), 033604; [cond-mat/0604580](#).
- [23] L. He, M. Jin, P. Zhuang, *Neutral color superconductivity and pseudo-goldstone modes*, [hep-ph/0504148](#).
- [24] В. Ч. Жуковский, К. Г. Клименко, В. В. Худяков, Д. Эберт, *Письма в ЖЭТФ*, **74** (2001), 595; D. Ebert, V. V. Khudiyakov, K. G. Klimenko, H. Toki, V. Ch. Zhukovsky, *Chromomagnetic catalysis of chiral symmetry breaking and color superconductivity*, [hep-ph/0108185](#).

Поступила в редакцию 11.05.2006