Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Кривченков, Развитие метода эйконала в нелинейной электродинамике на основе принципа геометризации, *ТМФ*, 2007, том 150, номер 1, 112–117

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf5968>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 15:40:56

© 2007 г.

И. В. Кривченков*

РАЗВИТИЕ МЕТОДА ЭЙКОНАЛА В НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА ГЕОМЕТРИЗАЦИИ

Выведено уравнение эйконала для электромагнитной волны, распространяющейся во внешнем электромагнитном поле по законам нелинейной электродинамики. На основе принципа геометризации Логунова определены метрические тензоры эффективных римановых пространств для электродинамики Борна–Инфельда, нелинейной электродинамики Гейзенберга–Эйлера и параметризованной постмаксвелловской электродинамики. Проанализированы основные свойства этих нелинейных электродинамик.

Ключевые слова: принцип геометризации, нелинейная электродинамика, уравнение эйконала.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах Анатолия Алексеевича Логунова по теории гравитационного поля [1], [2] был сформулирован принцип геометризации. Он означает, что "... описание движения вещества под действием гравитационного поля в псевдоевклидовом пространстве-времени физически тождественно описанию движения вещества в соответствующем эффективном римановом пространстве".

Идея А. А. Логунова об эффективном римановом пространстве оказалась очень плодотворной. Она применима не только к теории гравитации, но и к теории любого физического поля в псевдоевклидовом пространстве-времени, лагранжиан которого содержит нелинейные члены при высших производных, в том числе и к нелинейной электродинамике.

Однако нелинейная электродинамика имеет ряд отличий от теории гравитации. Основными из них являются следующие:

а) система уравнений нелинейной электродинамики содержит только первые производные от тензора электромагнитного поля $F_{ik} = -F_{ki}$, в то время как уравнения гравитации являются уравнениями второго порядка относительно тензора гравитационного поля $\varphi_{ik} = \varphi_{ki}$;

*МАТИ – Российский государственный технологический университет им. К. Э. Циолковского, Москва, Россия. E-mail: ivk@abiturcenter.ru

б) при наличии гравитационного поля движение вещества и всех полей материи согласно принципу геометризации происходят в едином эффективном римановом пространстве, а получаемое из уравнений нелинейной электродинамики эффективное риманово пространство относится только к электромагнитному полю.

Поиск метрического тензора эффективного риманова пространства в нелинейной электродинамике происходит иначе, чем в теории гравитации. В работе [3] было проведено исследование нелинейно-электродинамических законов распространения электромагнитных волн в частном случае, когда в качестве внешнего электромагнитного поля рассматривалось поле магнитного диполя, причем расчеты проводились лишь с постмаксвелловской точностью.

Покажем, как реализуется принцип геометризации Логунова в общем случае нелинейной электродинамики, лагранжиан которой локально зависит от двух инвариантов электромагнитного поля $I_2 = F_{ik}F^{ki}$, $I_4 = F_{ik}F^{kn}F_{nm}F^{mi}$, и исследуем основные следствия этого принципа.

2. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

В случае, когда лагранжиан L является локальной функцией инвариантов I_2 и I_4 , система уравнений нелинейной электродинамики вне источников имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^k} [Y_2 F_{\cdot i}^{k\cdot} + 2Y_4 F_{(3)\cdot i}^{k\cdot}] &= 0, \\ \frac{\partial F_{nm}}{\partial x^j} + \frac{\partial F_{mj}}{\partial x^n} + \frac{\partial F_{jn}}{\partial x^m} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $F_{(3)}^{ki} = F^{kn}F_{nm}F^{mi}$ – третья степень [4] тензора электромагнитного поля, $Y_2 = \partial L / \partial I_2$, $Y_4 = \partial L / \partial I_4$. Здесь и далее точками обозначены вакансии для поднятия и опускания индексов.

Независимыми уравнениями системы (1) являются шесть уравнений, получаемых при подстановке индексов $i = n = \alpha$, $j = 0$, $m = \beta$. Раскрывая производные в первом уравнении системы (1), получим

$$\begin{aligned} Y_2 g^{ki} \frac{\partial F_{il}}{\partial x^k} + 2F_{\cdot \alpha}^{k\cdot} \left[Y_{22} F^{ni} \frac{\partial F_{in}}{\partial x^k} + 2Y_{24} F_{(3)}^{ni} \frac{\partial F_{in}}{\partial x^k} \right] + \\ + 2Y_4 \left[F_{(2)\cdot \alpha}^{n\cdot} g^{ki} \frac{\partial F_{in}}{\partial x^k} + F^{kn} F_{\cdot \alpha}^{m\cdot} \frac{\partial F_{nm}}{\partial x^k} + F_{(2)}^{km} \frac{\partial F_{m\alpha}}{\partial x^k} \right] + \\ + 4F_{(3)\cdot \alpha}^{k\cdot} \left[2Y_{44} F_{(3)}^{ni} \frac{\partial F_{in}}{\partial x^k} + Y_{24} F^{ni} \frac{\partial F_{in}}{\partial x^k} \right] &= 0, \\ \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^0} + \frac{\partial F_{\beta 0}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial F_{0\alpha}}{\partial x^\beta} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $Y_{22} = \partial Y_2 / \partial I_2$, $Y_{24} = \partial Y_2 / \partial I_4$, $Y_{44} = \partial Y_4 / \partial I_4$.

В галлилеевых координатах псевдоевклидова пространства-времени тензор электромагнитного поля можно представить в интегральном виде:

$$F_{nm} = \int d^3k \tilde{f}_{nm}(\mathbf{k}) \exp\{-iS(\mathbf{r}, t, \mathbf{k})\}, \quad (3)$$

где $S(\mathbf{r}, t, \mathbf{k})$ – эйконал.

Подставляя (3) в производные от тензора электромагнитного поля, входящие в уравнение (2), и комбинируя их, приведем систему (2) к виду

$$\Pi_\alpha^\nu \tilde{f}_{0\nu} = 0, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \Pi_\alpha^\nu = & [Y_2 R + 2Y_4 P] \delta_\alpha^\nu + Y_4 R F_{(2)\cdot\alpha}^{\nu\cdot} - [Y_2 g^{k\nu} + 2Y_4 F_{(2)}^{k\nu}] X_k X_\alpha + \\ & + 2[8Y_{44} F_{(3)\cdot\alpha}^{k\cdot} F_{(3)}^{\nu n} - Y_4 F_{(2)\alpha}^n g^{k\nu} - Y_4 F^{k\nu} F_{\cdot\alpha}^n + 2Y_{22} F_{\cdot\alpha}^{k\cdot} F^{\nu n} + \\ & + 4Y_{24} (F_{\cdot\alpha}^{k\cdot} F_{(3)}^{\nu n} + F_{\cdot\alpha}^{k\cdot} F^{\nu n})] X_k X_n. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь введены обозначения

$$X_n = \frac{\partial S}{\partial x^n}, \quad P = F_{(2)}^{kn} X_k X_n, \quad R = X_k X_n g^{nk}.$$

Для существования нетривиальных решений уравнения (4) необходимо выполнение условия $\det \|\Pi_\alpha^\nu\| = 0$. Согласно [4] это условие эквивалентно равенству

$$2\Pi_{(3)} - 3\Pi_{(2)}\Pi_{(1)} + \Pi_{(1)}^3 = 0, \quad (6)$$

где $\Pi_{(1)} = \Pi_\alpha^\alpha$, $\Pi_{(2)} = \Pi_\beta^\alpha \Pi_\alpha^\beta$, $\Pi_{(3)} = \Pi_\beta^\alpha \Pi_\mu^\beta \Pi_\alpha^\mu$ – инварианты степеней тензора Π_α^ν в трехмерном пространстве.

Однако если подставить выражение (5) в равенство (6), то в полученном соотношении трудно выделить инвариантные и неинвариантные части. Поэтому введем четырехмерное обобщение Q_m^n трехмерного тензора Π_α^ν в соответствии с равенством $Q_\alpha^\nu = \Pi_\alpha^\nu$.

В терминах Q_m^n равенство (6) принимает вид

$$2Q_{(3)n}^n - 3Q_{(1)n}^n Q_{(2)m}^m + (Q_m^n)^3 - 6Q_{(3)0}^0 Q_n^n + 3[Q_{(2)n}^n - (Q_n^n)^2] Q_0^0 = 0.$$

Это равенство содержит как ковариантную часть, так и нековариантную. Поскольку оно должно выполняться во всех допустимых [1] системах отсчета псевдоевклидова пространства-времени, то для этого необходимо и достаточно, чтобы было выполнено равенство

$$2Q_{(3)n}^k - 2Q_{(2)n}^k Q_m^m - Q_n^k [Q_{(2)m}^m - (Q_m^m)^2] = 0.$$

Подставляя четырехмерное обобщение тензора (5) в это равенство, получим

$$P_n^k = [\delta_n^k R - \gamma^{km} X_n X_m] [I_2 Y_4 + Y_2] f = 0, \quad (7)$$

где введено обозначение

$$\begin{aligned}
 f = R^2 \{ & I_2^4 Y_4 Y_{44} + I_2^4 Y_{44} Y_{22} - I_2^4 Y_{24}^2 + I_2^3 Y_2 Y_{44} - I_2^2 Y_4^2 - 4I_2^2 I_4 Y_4 Y_{44} - \\
 & - I_2^2 Y_4 Y_{22} - 4I_2^2 I_4 Y_{44} Y_{22} + 4I_2^2 I_4 Y_{24}^2 + 2I_2^2 Y_2 Y_{24} - I_2 Y_2 Y_4 - 2I_2 I_4 Y_2 Y_{44} + \\
 & + 2I_4 Y_4^2 + 4I_4^2 Y_4 Y_{44} + 2I_4 Y_4 Y_{22} + 4I_4^2 Y_{44} Y_{22} - 4I_4^2 Y_{24}^2 - 4I_4 Y_2 Y_{24} - Y_2^2 \} + \\
 & + 2RP \{ -I_2^3 Y_4 Y_{44} - 2I_2^3 Y_{44} Y_{22} + 2I_2^3 Y_{24}^2 - I_2^2 Y_2 Y_{44} - I_2 Y_4^2 + 2I_2 I_4 Y_4 Y_{44} + \\
 & + 4I_2 I_4 Y_{44} Y_{22} - 4I_2 I_4 Y_{24}^2 - 4I_2 Y_2 Y_{24} - 3Y_2 Y_4 - 2I_4 Y_2 Y_{44} - 2Y_2 Y_{22} \} + \\
 & + 8P^2 \{ I_2^2 Y_{22} Y_{44} - I_2^2 Y_{24}^2 - 2I_2 Y_4 Y_{24} - Y_4^2 - 2I_4 Y_4 Y_{44} - \\
 & - Y_4 Y_{22} - 2I_4 Y_{44} Y_{22} + 2I_4 Y_{24}^2 \}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Уравнение (7) содержит три сомножителя. Для того чтобы рассматриваемая нелинейная модель электродинамики в пределе слабого поля переходила в электродинамику Максвелла, в нуль должен обратиться последний сомножитель выражения (7): $f = 0$. Именно это соотношение и представляет собой уравнение эйконала для произвольной нелинейной электродинамики вакуума, локально зависящей от инвариантов электромагнитного поля.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕТРИЧЕСКОГО ТЕНЗОРА ЭФФЕКТИВНОГО РИМАНОВА ПРОСТРАНСТВА В НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Рассмотрим вид уравнения эйконала $f = 0$ в различных моделях нелинейной электродинамики вакуума и определим, используя принцип геометризации Логунова, метрический тензор эффективного риманова пространства для каждой из них.

В современной научной литературе рассматриваются три модели нелинейной электродинамики вакуума: электродинамика Борна–Инфельда [5], нелинейная электродинамика Гейзенберга–Эйлера [6] и параметризованная постмаксвелловская электродинамика [7]. В нелинейной электродинамике Борна–Инфельда функция L имеет вид

$$L = \frac{4}{a^2} \left\{ 1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{2} I_2 - \frac{a^4}{4} I_4 + \frac{a^4}{8} I_2^2} \right\}, \tag{9}$$

где a – постоянная, для которой известна лишь оценка снизу [5]: $a^2 > 1.2 \cdot 10^{-32} \text{ Гс}^{-2}$.

В нелинейной электродинамике Гейзенберга–Эйлера лагранжиан обычно записывают в приближении слабого поля:

$$L = \frac{1}{16\pi} \left\{ I_2 + \frac{\alpha}{180\pi B_q^2} (14I_4 - 5I_2^2) \right\}, \tag{10}$$

где $\alpha = e^2/\hbar c \approx 1/137$ – постоянная тонкой структуры, а $B_q = m^2 c^2 / e\hbar \approx 4.41 \cdot 10^{13} \text{ Гс}$ – характерная квантовоэлектродинамическая индукция.

И наконец, в параметризованной постмаксвелловской электродинамике вакуума лагранжиан содержит два свободных параметра η_1 и η_2 :

$$L = \frac{1}{32\pi} \{ 2I_2 + \xi [(\eta_1 - 2\eta_2)I_2^2 + 4\eta_2 I_4] \}, \tag{11}$$

где $\xi = 1/B_q^2$.

Величина безразмерных постмаксвелловских параметров η_1 и η_2 зависит от выбора модели нелинейной электродинамики вакуума: в нелинейной электродинамике Гейзенберга–Эйлера эти параметры имеют значения $\eta_1 = \alpha/(45\pi) = 5.1 \cdot 10^{-5}$, $\eta_2 = 7\alpha/(180\pi) = 9.0 \cdot 10^{-5}$, а в теории Борна–Инфельда они выражаются через постоянную a^2 следующим образом: $\eta_1 = \eta_2 = a^2 B_q^2/4$.

Подставляя лагранжиан (9) нелинейной электродинамики Борна–Инфельда в соотношение (8) и потребовав $f = 0$, получим

$$\left\{ \left[\gamma^{km} \left[1 - \frac{a^2 I_2}{2} \right] + a^2 F_{(2)}^{km} \right] \frac{\partial S}{\partial x^k} \frac{\partial S}{\partial x^m} \right\}^2 = 0, \quad (12)$$

где γ^{km} – метрический тензор псевдоевклидова пространства-времени.

В нелинейной электродинамике Гейзенберга–Эйлера с лагранжианом (10) уравнение $f = 0$ принимает вид

$$\left\{ \left[\gamma^{km} + \frac{4\alpha}{45\pi B_q^2} F^{kn} F_{n \cdot}^m \right] \frac{\partial S}{\partial x^k} \frac{\partial S}{\partial x^m} \right\} \left\{ \left[\gamma^{ij} + \frac{7\alpha}{45\pi B_q^2} F^{ip} F_{p \cdot}^j \right] \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^j} \right\} = 0. \quad (13)$$

Совершенно аналогично, подставляя лагранжиан (11) параметризованной постмаксвелловской электродинамики вакуума в соотношение (8) и потребовав $f = 0$, получим

$$\left\{ \left[\gamma^{km} + 4\xi\eta_1 F^{kn} F_{n \cdot}^m \right] \frac{\partial S}{\partial x^k} \frac{\partial S}{\partial x^m} \right\} \left\{ \left[\gamma^{ij} + 4\xi\eta_2 F^{ip} F_{p \cdot}^j \right] \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^j} \right\} = 0. \quad (14)$$

Из уравнения (12) следует, что в электродинамике Борна–Инфельда электромагнитные волны распространяются независимо от их поляризации, и метрический тензор эффективного риманова пространства в этом случае имеет вид

$$g^{km} = \gamma^{km} \left[1 - \frac{a^2 I_2}{2} \right] + a^2 F_{(2)}^{km}. \quad (15)$$

Используя выражение (15) и формулы тензорной алгебры [4], мы без труда можем найти ковариантные компоненты метрического тензора эффективного риманова пространства и его определитель в электродинамике Борна–Инфельда:

$$g_{ik} = \frac{8[\gamma_{ik} - a^2 F_{ik}^{(2)}]}{8 - 4a^2 I_2 - 2a^4 I_4 + a^4 I_2^2}, \quad g = \gamma \left[1 - \frac{a^2}{2} I_2 - \frac{a^4}{4} I_4 + \frac{a^4}{8} I_2^2 \right]^2,$$

где γ – определитель метрического тензора γ_{ik} псевдоевклидова пространства-времени.

Из выражений (13) и (14) следует, что в электродинамике Гейзенберга–Эйлера и в параметризованной постмаксвелловской электродинамике при $\eta_1 \neq \eta_2$ электромагнитные волны во внешних электромагнитных полях распространяются в виде двух нормальных волн со взаимно ортогональной поляризацией. Первая из них распространяется в эффективном римановом пространстве с метрическим тензором $g_{(1)}^{km}$, а вторая – в пространстве с метрическим тензором $g_{(2)}^{km}$, где

$$g_{(1,2)}^{km} = \gamma^{km} + 4\xi\eta_{1,2} F^{kn} F_{n \cdot}^m.$$

Установив метрический тензор эффективного риманова пространства для той или иной нелинейной электродинамики, мы можем проводить дальнейшие исследования законов распространения фотонов во внешних электромагнитных полях, решая уравнения для изотропных геодезических в этом эффективном римановом пространстве.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, электродинамика Гейзенберга–Эйлера и параметризованная постмаксвелловская электродинамика при $\eta_1 \neq \eta_2$ предсказывают существование двойного лучепреломления электромагнитных волн во внешних электромагнитных полях, аналогичное двойному лучепреломлению в кристаллических средах. Поэтому согласно этим теориям электромагнитные волны во внешнем электромагнитном поле должны распространяться в виде двух ортогонально поляризованных нормальных волн вдоль различных лучей и с различной скоростью.

В нелинейной электродинамике Борна–Инфельда воздействие внешних электромагнитных полей на электромагнитные волны осуществляется независимо от их поляризации. На этих различиях в предсказаниях различных моделей нелинейной электродинамики и основаны эксперименты, которые призваны дать ответ на вопрос, какая из этих моделей наиболее адекватна природе.

Благодарности. Настоящая работа выполнена при частичной поддержке Программы поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-4476.2006.2) и РФФИ (грант № 06-02-16514).

Список литературы

- [1] А. А. Логунов, *Лекции по теории относительности и гравитации*, Наука, М., 1987.
- [2] А. А. Логунов, *Теория гравитационного поля*, Наука, М., 2000; А. А. Логунов, М. А. Мествиришвили, *Основы релятивистской теории гравитации*, МГУ, М., 1983.
- [3] В. И. Денисов, *ТМФ*, **132:2** (2002), 211.
- [4] И. П. Денисова, *Введение в тензорное исчисление и его приложения*, УНЦ ДО, М., 2004.
- [5] M. Born, L. Infeld, *Proc. Roy. Soc. A*, **144** (1934), 425.
- [6] W. Heisenberg, H. Euler, *Z. Phys.*, **26** (1936), 714.
- [7] I. P. Denisova, I. V. Krivchenkov, P. A. Vshivtseva, A. A. Zubrilo, *Gen. Relat. Gravit.*, **36:4** (2004), 889.

Поступила в редакцию 14.04.2006