Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ж. Жерве, Уравнения Лакса в десятимерных суперсимметричных классических теориях Янга–Миллса, *ТМФ*, 2000, том 123, номер 2, 189–197

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf597>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 17:48:46

© 2000 г.

Ж.-Л. Жерве*

УРАВНЕНИЯ ЛАКСА В ДЕСЯТИМЕРНЫХ СУПЕРСИММЕТРИЧНЫХ КЛАССИЧЕСКИХ ТЕОРИЯХ ЯНГА–МИЛЛСА

Савельев и Жерве показали [1], что на массовой оболочке существует калибровка светового конуса, в которой нелинейная часть полевых уравнений сводится к (суперсимметричному) варианту уравнений Янга, которые можно решать методами, аналогичными разработанным ранее для четырехмерных самодуальных уравнений Янга–Миллса. Эта аналогия становится еще отчетливее, если написать систему линейных дифференциальных уравнений в частных суперпроизводных, условия совместности которых можно получить из десятимерных суперсимметричных уравнений Янга–Миллса и которые являются аналогами пары Лакса–Белавина–Захарова. На простейшем примере двухполюсного анзаца показано, что работает тот же метод получения решений, который был разработан в конце 70-х годов для получения известных многоинстантонных решений. Однако в отличие от пары Лакса–Белавина–Захарова полученное здесь представление Лакса есть лишь следствие уравнений поля (но не эквивалентно им).

Памяти Михаила Савельева

1. ВВЕДЕНИЕ

Получение Лезновым и Савельевым два десятилетия назад общего решения сферически-симметричных самодуальных уравнений Янга–Миллса привело к дальнейшим замечательным открытиям. Впервые я встретил Мишу в 1992 г., когда уже стало ясно, насколько эта работа важна для двумерных конформных/интегрируемых систем. С этого момента началось наше постоянное сотрудничество. В отличие от многих своих соотечественников Миша был уверен, что не должен покидать свою страну в поисках лучшей жизни. Он боролся за свою семью и себя, в то же время с неослабевающим энтузиазмом отдавая исследовательской работе. Совместная работа с Мишей, оборававшаяся столь внезапно, удивительно обогащала. Я всегда буду помнить наши горячие и дружеские споры, его доброту и энтузиазм, его поразительное знание научной литературы! Мы несколько раз приглашали его к нам в Эколь Нормаль на длительное время, и его посещения были чрезвычайно плодотворны. Встречались мы и в других местах, но слишком редко, поэтому обменивались бесчисленными посланиями по электронной

*Laboratoire de Physique Théorique de l'École Normale Supérieure, Paris, France

почте. Сейчас я сожалею, что не смог воспользоваться многими возможностями встретиться с ним. В частности, я ни разу не нашел времени посетить его в России. Наша последняя встреча произошла в Кембридже (Великобритания) в начале марта 1997 г. В то время мне казалось совершенно естественным, что вскоре мы встретимся снова, но так не случилось! Из многочисленных электронных посланий, которыми мы обменялись после той встречи, видно, что он был сильно подавлен, тем не менее его продолжали волновать новые идеи, вычисления и т.д.

Мне жаль также, что нам редко удавались неформальные встречи помимо работы. Я всегда буду помнить о таких очень теплых и дружеских встречах, особенно тех, на которых присутствовали, как он обычно говорил, его Светланы.

М. Савельев был велик и как ученый, и как человек. Без сомнения, он был замечательным отцом, мужем, другом!

В последнее время мы обратились [1] к интегрированию классических теорий с локальной расширенной суперсимметрией в пространствах с числом измерений больше двух. Этому были две причины. С одной стороны, эта проблема очень важна сейчас с точки зрения дуальности и М-теории. С другой стороны, недавние успехи, связанные с именами Зайберга и Виттена, дают указания на то, что эти теории во многих отношениях являются многомерными аналогами двумерных конформных/интегрируемых систем, что вселяет надежду на успех. С осени 1997 г. мы занялись изучением десятимерных суперсимметричных теорий Янга–Миллса. Виттен показал [2], что полевые уравнения этих теорий эквивалентны условиям нулевой кривизны. Априори это напоминает хорошо известную ситуацию с основными уравнениями в теориях Тоды, хотя никакого реального прогресса в те времена ожидать не приходилось, поскольку соответствующие уравнения лаксовского типа содержали произвольный светоподобный вектор, который играл роль спектрального параметра. Сперва мы переформулировали полевые уравнения так, что они стали похожи на суперсимметричный вариант многомерных обобщений теорий Тоды, развитых Разумовым и Савельевым [3], в которых калибровочная алгебра Янга–Миллса расширена до супералгебры. Однако этот результат не был опубликован, поскольку, вопреки нашим первоначальным надеждам, казалось, что эти два типа теорий не эквивалентны. Я надеюсь вернуться к этой проблеме в ближайшем будущем. Тем временем мы нашли в суперсимметричной теории Янга–Миллса такую калибровку, в которой полевые уравнения в очень сильной степени упрощаются и впервые проявляется сходство с четырехмерной самодуальной теорией Янга–Миллса [1]. Это напрямую привело к нынешнему успеху.

Хорошо известно, что десятимерные суперсимметричные теории Янга–Миллса описывают стандартное неабелево калибровочное поле, взаимодействующее с заряженным спинорным полем Майораны–Вейля в присоединенном представлении калибровочной группы. Динамика определяется стандартным действием

$$S = \int d^{10}x \operatorname{Tr} \left\{ -\frac{1}{4} Y_{mn} Y^{mn} + \frac{1}{2} \bar{\phi} (\Gamma^m \partial_m \phi + [X_m, \phi]_-) \right\}, \quad (1.1)$$

$$Y_{mn} = \partial_m X_n - \partial_n X_m + [X_m, X_n]_-. \quad (1.2)$$

Обозначения следующие¹⁾: $X_m(\underline{x})$ – векторный потенциал, $\phi(\underline{x})$ – спинор Майораны–Вейля. Оба поля являются матрицами в присоединенном представлении калибровочной группы $\mathbf{G}$. Латинские индексы $m = 0, \dots, 9$ соответствуют компонентам пространства Минковского. Греческие индексы $\alpha = 1, \dots, 16$ обозначают компоненты кирального спинора. Мы будем использовать суперполеую формулировку с нечетными координатами θ^α . Компоненты векторного суперпотенциала, принимающие значения в калибровочной алгебре, обозначаются через $A_m(\underline{x}, \underline{\theta})$, $A_\alpha(\underline{x}, \underline{\theta})$. Как показано в работах [2, 4], можно устранить все добавочные поля и однозначно построить физические поля X_m и ϕ из полей A_m и A_α , если на последние наложить условие $\theta^\alpha A_\alpha = 0$. При этом условия полевые уравнения, следующие из лагранжиана (1.1), эквивалентны условиям нулевой кривизны

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta} = 0, \quad (1.3)$$

где $\mathcal{F}$ – суперковариантная кривизна,

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta} = D_\alpha A_\beta - D_\beta A_\alpha + [A_\alpha, A_\beta] + 2(\sigma^m)_{\alpha\beta} A_m, \quad (1.4)$$

D_α обозначает суперковариантную производную,

$$D_\alpha = \partial_\alpha - (\sigma^m)_{\alpha\beta} \theta^\beta \partial_m, \quad (1.5)$$

и используются матрицы Дирака вида

$$\Gamma^m = \begin{pmatrix} 0_{16 \times 16} & ((\sigma^m)^{\alpha\beta}) \\ ((\sigma^m)_{\alpha\beta}) & 0_{16 \times 16} \end{pmatrix}, \quad \Gamma^{11} = \begin{pmatrix} 1_{16 \times 16} & 0 \\ 0 & -1_{16 \times 16} \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Всюду в дальнейшем используется следующее специальное представление:

$$((\sigma^9)^{\alpha\beta}) = ((\sigma^9)_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} -1_{8 \times 8} & 0_{8 \times 8} \\ 0_{8 \times 8} & 1_{8 \times 8} \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

$$((\sigma^0)^{\alpha\beta}) = -((\sigma^0)_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1_{8 \times 8} & 0_{8 \times 8} \\ 0_{8 \times 8} & 1_{8 \times 8} \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

$$((\sigma^j)^{\alpha\beta}) = ((\sigma^j)_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{\mu, \bar{\nu}}^j \\ (\gamma^j)^T_{\nu, \bar{\mu}} & 0 \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, 8. \quad (1.9)$$

Соглашение относительно греческих букв следующее: начальные буквы алфавита пробегают значения от 1 до 16, буквы из середины алфавита – от 1 до 8. Таким образом, мы будем разделять два спинорных представления группы $O(8)$, переписывая $\alpha_1, \dots, \alpha_{16}$ в виде $\mu_1, \dots, \mu_8, \bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_8$.

Используя приведенное выше явное представление, можно переписать исходные уравнения в виде

$$F_{\mu\nu} \equiv D_\mu A_\nu - D_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]_+ = 2\delta_{\mu\nu}(A_0 + A_9), \quad (1.10)$$

$$F_{\bar{\mu}\bar{\nu}} \equiv D_{\bar{\mu}} A_{\bar{\nu}} - D_{\bar{\nu}} A_{\bar{\mu}} + [A_{\bar{\mu}}, A_{\bar{\nu}}]_+ = 2\delta_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(A_0 - A_9), \quad (1.11)$$

$$F_{\mu\bar{\nu}} \equiv D_\mu A_{\bar{\nu}} - D_{\bar{\nu}} A_\mu + [A_\mu, A_{\bar{\nu}}]_+ = -2 \sum_{i=1}^8 A_i \gamma_{\mu, \bar{\nu}}^i. \quad (1.12)$$

¹⁾ Фактически они те же, что и в работе [1].

В нашей последней работе с М. Савельевым [1] эти условия нулевой кривизны в суперпространстве были использованы для перехода к калибровке светового конуса на массовой оболочке, в которой половина суперполей обращается в нуль. После редукции к размерности $(1+1)$ нелинейная часть уравнений переходит в уравнения для скалярного суперполя, которые являются (суперсимметричными) аналогами так называемых уравнений Янга, интенсивно изучавшихся в связи с решением четырехмерных самодуальных уравнений Янга–Миллса. Главные различия между этими двумя типами уравнений состоят в том, что в уравнениях Янга производные заменяются на суперковариантные производные, имеется шестнадцать уравнений вместо четырех и индексы по-разному разбиваются на пары. Тем не менее оказалось, что эти особенности не препятствуют тому, чтобы решать наши уравнения методами, очень похожими на те, что были развиты в связи с четырехмерными самодуальными теориями Янга–Миллса. Цель настоящей работы состоит в том, чтобы проследить эту аналогию гораздо дальше и получить аналоги пары Лакса–Белафина–Захарова [5], с помощью которой в конце 70-х годов были получены многоинстантонные решения.

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЛАКСА

Исходная теория инвариантна относительно группы $O(9, 1)$, но выбранные выше матрицы Дирака ковариантны только относительно специальной подгруппы $O(8)$. Представление Лакса возникает, если специальным образом выбрать подгруппу $O(7)$ из $O(8)$. Для этого заметим, что одну из матриц γ^i можно выбрать единичной, в этом случае остальные матрицы антисимметричны и подчиняются алгебре Дирака, отвечающей группе $O(7)$. Это имеет место, например, в следующем используемом всюду ниже явном представлении гамма-матриц, отвечающих группе $O(8)$, в котором γ^8 равна единице:

$$\begin{aligned}\gamma^1 &= \tau_1 \otimes \tau_3 \tau_1 \otimes \mathbf{1}, & \gamma^2 &= \mathbf{1} \otimes \tau_1 \otimes \tau_3 \tau_1, \\ \gamma^3 &= \tau_3 \tau_1 \otimes \mathbf{1} \otimes \tau_1, & \gamma^4 &= \tau_3 \tau_1 \otimes \tau_3 \tau_1 \otimes \tau_3 \tau_1, \\ \gamma^5 &= \tau_3 \otimes \tau_3 \tau_1 \otimes \mathbf{1}, & \gamma^6 &= \mathbf{1} \otimes \tau_3 \otimes \tau_3 \tau_1, \\ \gamma^7 &= \tau_3 \tau_1 \otimes \mathbf{1} \otimes \tau_3, & \gamma^8 &= \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}.\end{aligned}\tag{2.1}$$

При этом выборе из уравнений (1.10)–(1.12) следует, что

$$F_{\mu\nu} = 2\delta_{\mu\nu}(A_0 + A_g), \quad F_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = 2\delta_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(A_0 - A_g), \quad F_{\mu\bar{\nu}} + F_{\nu\bar{\mu}} = -4\delta_{\mu\nu}A_g.\tag{2.2}$$

Мы симметризовали смешанные (последние) уравнения, чтобы правые части содержали только дельта-символы Кронекера по спинорным индексам. Взяв в качестве γ^8 единичную матрицу, мы ввели отображение между индексами с чертой и без нее. Соответственно в предыдущем уравнении и в последующих, всюду, где встречаются индексы с чертой и без нее, обозначенные одной и той же буквой (например, μ и $\bar{\mu}$), подразумевается, что они численно равны, так что $\gamma_{\mu\bar{\mu}}^8 = 1$. Далее, как и в случае четырехмерной самодуальной теории Янга–Миллса, удобно перейти к комплексным (супер)координатам.

Введем следующие величины²⁾:

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= F_{\mu\nu} - F_{\bar{\mu}\bar{\nu}} + iF_{\bar{\mu}\nu} + iF_{\mu\bar{\nu}}, \\ G_{\bar{\mu}\bar{\nu}} &= F_{\mu\nu} - F_{\bar{\mu}\bar{\nu}} - iF_{\bar{\mu}\nu} - iF_{\mu\bar{\nu}}, \\ G_{\mu\bar{\nu}} &= F_{\mu\nu} + F_{\bar{\mu}\bar{\nu}} + iF_{\bar{\mu}\nu} - iF_{\mu\bar{\nu}}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\Delta_\mu = D_\mu + iD_{\bar{\mu}}, \quad \Delta_{\bar{\mu}} = D_\mu - iD_{\bar{\mu}}, \quad (2.4)$$

$$B_\mu = A_\mu + iA_{\bar{\mu}}, \quad B_{\bar{\mu}} = A_\mu - iA_{\bar{\mu}}, \quad (2.5)$$

где i — мнимая единица. Прямое вычисление дает

$$\begin{aligned} [\Delta_\mu, \Delta_\nu]_+ &= 4\delta_{\mu\nu}(\partial_9 - i\partial_8), \quad [\Delta_{\bar{\mu}}, \Delta_{\bar{\nu}}]_+ = 4\delta_{\mu\nu}(\partial_9 + i\partial_8), \\ [\Delta_\mu, \Delta_{\bar{\nu}}]_+ + [\Delta_\nu, \Delta_{\bar{\mu}}]_+ &= 8\delta_{\mu\nu}\partial_0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\mathcal{D}_\mu \Psi(\lambda) \equiv (\Delta_\mu + \lambda\Delta_{\bar{\mu}} + B_\mu + \lambda B_{\bar{\mu}})\Psi(\lambda) = 0, \quad \mu = 1, \dots, 8. \quad (2.7)$$

Конечно, $\Psi(\lambda)$ есть суперполевая функция от $\underline{x}$ и $\underline{\theta}$, хотя для упрощения обозначений мы не выписали этого явно. Параметр λ является произвольным комплексным числом. Условие совместности этих уравнений

$$[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu]_+ \Psi(\lambda) = 0 \quad (2.8)$$

в развернутой форме имеет вид

$$\begin{aligned} \{4\delta_{\mu\nu}(\partial_9 - i\partial_8) + G_{\mu\nu}\}\Psi + \lambda\{8\delta_{\mu\nu}\partial_0 + G_{\nu\bar{\mu}} + G_{\bar{\mu}\nu}\}\Psi + \\ + \lambda^2\{4\delta_{\mu\nu}(\partial_9 + i\partial_8) + G_{\bar{\nu}\bar{\mu}}\}\Psi = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при $\mu \neq \nu$

$$G_{\mu\nu} = G_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = G_{\mu\bar{\nu}} + G_{\nu\bar{\mu}} = 0$$

и $G_{\mu\mu}$, $G_{\bar{\mu}\bar{\mu}}$, $G_{\mu\bar{\mu}}$ не зависят от μ . Таким образом, эти условия совместности эквивалентны симметризованным динамическим уравнениям (2.2).

²⁾При новой символике теоретико-групповой смысл фермионных индексов $\mu, \bar{\mu}$ теряется. Однако мы принимаем ее, чтобы избежать неуклюжих обозначений.

3. УСЛОВИЯ ЭРМИТОВОСТИ ДЛЯ СУПЕРПОЛЕЙ

В качестве калибровочной группы возьмем группу $SU(N)$. Тогда физические поля X_m и ϕ^α являются антиэрмитовыми матрицами. Мы перенесем эти условия в виде соответствующих условий эрмитовости на суперполя A_m, A_α . Рассмотрим общее суперполе

$$F(\underline{x}, \underline{\theta}) = \sum_{p=0}^{16} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} \frac{\theta^{\alpha_1} \dots \theta^{\alpha_p}}{p!} F_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{[p]}(\underline{x}), \quad (3.1)$$

тогда

$$F^\dagger(\underline{x}, \underline{\theta}) = \sum_{p=0}^{16} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} F_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{[p]\dagger}(\underline{x}) \frac{\theta^{\alpha_p \dagger} \dots \theta^{\alpha_1 \dagger}}{p!}.$$

Если $F = F_b$ – бозонное поле, то $F_b^{[p]}$ – коммутирующее (антикоммутирующее) поле для четных (нечетных) p . Тогда, полагая, что $\theta^{\alpha \dagger} = \theta^\alpha$, можно написать

$$F_b^\dagger(\underline{x}, \underline{\theta}) = K_b \sum_{p=0}^{16} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} \frac{\theta^{\alpha_1} \dots \theta^{\alpha_p}}{p!} F_{b\alpha_1 \dots \alpha_p}^{[p]\dagger}(\underline{x}) K_b, \quad (3.2)$$

где

$$K_b = (-1)^{\mathcal{R}(\mathcal{R}+1)/2}, \quad \mathcal{R} = \theta^\alpha \partial_\alpha. \quad (3.3)$$

Если $F = F_f$ – фермионное поле, то $F_f^{[p]}$ – антикоммутирующее (коммутирующее) поле для четных (нечетных) p . Тогда

$$F_f^\dagger(\underline{x}, \underline{\theta}) = K_f \sum_{p=0}^{16} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} \frac{\theta^{\alpha_1} \dots \theta^{\alpha_p}}{p!} F_{f\alpha_1 \dots \alpha_p}^{[p]\dagger}(\underline{x}) K_f, \quad (3.4)$$

$$K_f = (-1)^{\mathcal{R}(\mathcal{R}-1)/2}.$$

Можно проверить, что суперполя A_m, A_α имеют разложения вида (3.1), причем $F_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{[p]\dagger} = -F_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{[p]}$ при всех p . Отсюда следует, что $A_m^\dagger = -K_b A_m K_b$, $A_\alpha^\dagger = -K_f \times A_\alpha K_f$. Рассмотрим теперь действие оператора суперковариантной производной. Его действие на p -ю компоненту суперполя (3.1) дается выражением

$$(D_\alpha F)_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{[p]} = F_{\alpha \alpha_1 \dots \alpha_p}^{[p+1]} - \sum_{j=1}^p (-1)^{j+1} \sigma_{\alpha \alpha_j}^m \partial_m F_{\alpha_1 \dots \alpha_j \dots \alpha_p}^{[p-1]}.$$

Из действительности матриц σ^m немедленно следует, что

$$D_\mu (K_b F_b^\dagger K_b) = K_f (D_\mu F_b)^\dagger K_f, \quad D_\mu (K_b F_f^\dagger K_b) = K_f (D_\mu F_f)^\dagger K_f. \quad (3.5)$$

Разумеется, последние уравнения согласуются с тем, что суперковариантные производные преобразуют бозонное суперполе в фермионное и обратно. В то же время тот факт, что A_α и его суперковариантные производные удовлетворяют различным условиям эрмитовости, приводит к усложнениям, которых можно избежать, если искать решения

с $\phi^\alpha = 0$. Для этих чисто бозонных решений $A_{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_{2p}}^{[2p]} = 0$ и $A_{m\alpha_1\ldots\alpha_{2p+1}}^{[2p+1]} = 0$. Все компоненты суперполя являются коммутирующими, поэтому можно считать, что

$$K_b = K_f = K = (-1)^{\mathcal{R}(\mathcal{R}-1)/2}. \quad (3.6)$$

Тогда легко показать, что $\Psi(\lambda)$ и $(K\Psi^\dagger(1/\lambda^*)K)^{-1}$ удовлетворяют одному и тому же уравнению. Таким образом, мы предположим, что

$$\Psi(\lambda) = K(\Psi^\dagger)^{-1}\left(\frac{1}{\lambda^*}\right)K. \quad (3.7)$$

4. ДВУХПОЛЮСНЫЙ АНЗАЦ

Так же, как в четырехмерной самодуальной теории Янга–Миллса, мы предполагаем, что Ψ – мероморфная функция λ . Из условия (3.7) следует, что полюсы появляются парами. Простейший анзац содержит два полюса. Повторяя фактически рассуждения работы [5], покажем, как возникает соответствующее решение для калибровочной группы $SU(2)$. Выбирая полюсы в нуле и на бесконечности, запишем анзац в виде

$$\Psi(\lambda) = u\mathbf{1} + \lambda fA - \frac{\tilde{f}\tilde{A}}{\lambda}, \quad \Psi^{-1}(\lambda) = u\mathbf{1} - \lambda fA + \frac{\tilde{f}\tilde{A}}{\lambda}, \quad (4.1)$$

где

$$A = \frac{1}{a\tilde{a} + b\tilde{b}} \begin{pmatrix} ab & a^2 \\ -b^2 & -ab \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Здесь u, f, a, b являются суперполями. В соответствии с равенством (3.6) введем обозначение

$$\tilde{F} = KF^\dagger K \quad (4.3)$$

для любого суперполя (в том числе и матричнозначного). Легко видеть, что

$$A^2 = \tilde{A}^2 = 0, \quad [A, \tilde{A}]_+ = \mathbf{1}. \quad (4.4)$$

Последние уравнения означают, что анзац (4.1) совместим с условием (3.7), а также с соотношением $\Psi(\lambda)\Psi^{-1}(\lambda) = 1$ при условии, что

$$u^2 = 1 - f\tilde{f}. \quad (4.5)$$

Далее мы получаем алгебраические уравнения для суперполей, входящих в анзац, переписывая уравнение (2.7) в виде

$$B_\mu + \lambda B_{\bar{\mu}} = \Psi(\lambda)(\Delta_\mu + \lambda\Delta_{\bar{\mu}})\Psi^{-1}(\lambda). \quad (4.6)$$

Отождествляя коэффициенты при различных степенях λ , получаем систему независимых уравнений

$$\tilde{f}\tilde{A}\Delta_\mu(\tilde{f}\tilde{A}) = 0, \quad (4.7)$$

$$\tilde{f}\tilde{A}\Delta_\mu u - u\Delta_\mu(\tilde{f}\tilde{A}) - \tilde{f}\tilde{A}\Delta_{\bar{\mu}}(\tilde{f}\tilde{A}) = 0, \quad (4.8)$$

$$u\mathbf{1}\Delta_\mu u + \tilde{f}\tilde{A}\Delta_{\bar{\mu}} u + \tilde{f}\tilde{A}\Delta_\mu(fA) - u\Delta_{\bar{\mu}}(\tilde{f}\tilde{A}) + fA\Delta_\mu(\tilde{f}\tilde{A}) = -B_\mu, \quad (4.9)$$

дополненную еще тремя соотношениями (4.4), полученными выше из уравнения (3.7). Здесь удобно использовать представление

$$A = \frac{1}{a\tilde{a} + b\tilde{b}} \Upsilon. \quad (4.10)$$

Поскольку матрица Υ такова, что $\Upsilon^2 = 0$, уравнение (4.7) удовлетворяется тогда и только тогда, когда

$$\Delta_\mu \tilde{a} = \Delta_\mu \tilde{b} = 0. \quad (4.11)$$

Уравнение (4.8) можно привести к виду

$$\tilde{\Upsilon} \Delta_\mu \tilde{g} = \tilde{\Upsilon} \Delta_{\bar{\mu}} \tilde{\Upsilon},$$

где по определению

$$\tilde{g} = u \frac{a\tilde{a} + b\tilde{b}}{\tilde{f}}. \quad (4.12)$$

Уравнение (4.8) выполняется, если

$$\Delta_\mu \tilde{g} = \tilde{h}_{\bar{\mu}}, \quad \tilde{h}_{\bar{\mu}} = \tilde{b} \Delta_{\bar{\mu}} \tilde{a} - \tilde{a} \Delta_{\bar{\mu}} \tilde{b}. \quad (4.13)$$

Замечательно, что уравнение (4.11) является специальным случаем уравнений, которые уже появлялись в работе [1], где были получены общие решения, зависящие только от x^0 и x^9 . Ниже мы получим решения уравнений (4.13). Как только оба эти уравнения будут решены, уравнение (4.9) позволит получить векторные потенциалы. Для этого удобно переписать его в виде

$$B_\mu = \frac{1}{u} \Delta_\mu u + \frac{\tilde{\Upsilon}}{\tilde{g}} \Delta_\mu \left(\frac{\Upsilon}{g} \right) - \Delta_{\bar{\mu}} \left(\frac{\tilde{\Upsilon}}{\tilde{g}} \right) + \frac{\Upsilon \tilde{\Upsilon}}{g} \Delta_\mu \left(\frac{1}{\tilde{g}} \right). \quad (4.14)$$

5. ЧАСТНОЕ РЕШЕНИЕ

Для того чтобы получить конкретное решение на этой предварительной стадии, мы выбираем простой специальный анзац. Оставим только зависимость от $x^0 \equiv t$ и $x^9 \equiv x$. Простое линейное решение уравнений (4.11) имеет вид

$$a = 1, \quad b = t + i \sum_{\mu} \theta^\mu \theta^{\bar{\mu}}, \quad (5.1)$$

так что

$$\begin{aligned} \Delta_\mu a &= 0, & \Delta_\mu b &= 2D_\mu b = (\theta^\mu + i\theta^{\bar{\mu}}), \\ a\tilde{a} + b\tilde{b} &= b + \tilde{b} = 2t. \end{aligned}$$

Тогда уравнение (4.13) дает

$$g = -8x + c, \quad (5.2)$$

где $\Delta_{\bar{\mu}}c = 0$. Пусть для простоты c – константа. Используя уравнения (4.5), (4.12), находим

$$u = \sqrt{\frac{|c - 8x|^2}{4t^2 + |c - 8x|^2}}.$$

С учетом уравнения (4.14) окончательно получаем

$$\begin{aligned} B_{\mu} = & (\theta^{\mu} + i\theta^{\bar{\mu}}) \left\{ \frac{4t}{4t^2 + |c - 8x|^2} - \frac{2}{|c - 8x|^2} \begin{pmatrix} \tilde{b} + 2\tilde{b}^2b & \tilde{b}^2 \\ 1 + 2\tilde{b}b & \tilde{b} \end{pmatrix} + \right. \\ & + \frac{8}{(c^* - 8x)^2} \begin{pmatrix} b & 1 \\ -b^2 & -b \end{pmatrix} \left. \right\} + (\theta^{\mu} - i\theta^{\bar{\mu}}) \left\{ \frac{-16(16x - c - \tilde{c})t^2}{|c - 8x|^2(4t^2 + |c - 8x|^2)} - \right. \\ & - \frac{8}{(c - 8x)|c - 8x|^2} \begin{pmatrix} \tilde{b}b + \tilde{b}^2b^2 & \tilde{b} + \tilde{b}^2b \\ b + \tilde{b}b^2 & 1 + \tilde{b}b \end{pmatrix} + \frac{2}{c^* - 8x} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2\tilde{b} & -1 \end{pmatrix} - \\ & \left. - \frac{8}{(c^* - 8x)|c - 8x|^2} \begin{pmatrix} b\tilde{b} + 1 & -b\tilde{b}^2 - \tilde{b} \\ -b^2\tilde{b} - b & b^2\tilde{b}^2 + b\tilde{b} \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

6. ПЕРСПЕКТИВЫ

Кажется несомненным, что, как и четырехмерная самодуальная теория Янга–Миллса, симметризованная система уравнений (2.2) полностью и явно интегрируема. Заметим, что в калибровке работы [1], в которой $A_{\bar{\mu}} = 0$, последние уравнения из системы (2.2) дают $D_{\bar{\mu}}A_{\nu} + D_{\bar{\nu}}A_{\mu} = 0$ при $\mu \neq \nu$. Это в точности то самое условие, которое использовалось в работе [1], для того чтобы положить $A_{\mu} = D_{\bar{\mu}}\Phi$. Другими словами, полученная здесь пара Лакса эквивалентна системе уравнений, которая уже была решена в работе [1].

Что касается полной системы уравнений Янга–Миллса, или, что то же самое, системы несимметризованных уравнений (1.10)–(1.12), то любое их решение есть также решение системы симметризованных уравнений (2.2). Таким образом, мы должны найти такие достаточно общие решения последней системы уравнений, чтобы они были решениями и исходной системы уравнений. В настоящее время эта проблема находится в стадии изучения.

Благодарности. Автор благодарен П. Форгачу и Г. Самтлебену за стимулирующие обсуждения.

Список литературы

- [1] *J.-L. Gervais, M. V. Saveliev.* Progress in classically solving ten dimensional supersymmetric reduced Yang–Mills theories. hep-th/9811108.
- [2] *E. Witten.* Nucl. Phys. B. 1986. V. 266. P. 245–264.
- [3] *А. В. Разумов, М. В. Савельев.* ТМФ. 1997. Т. 112. № 2. С. 254–282; hep-th/9609031.
- [4] *E. Abdalla, M. Forger, M. Jacques.* Nucl. Phys. B. 1988. V. 307. P. 198–220.
- [5] *A. A. Belavin, V. E. Zakharov.* Phys. Lett. B. 1978. V. 73. P. 53–57.