Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Славянов, Ф. Р. Вукайлович, Изомонодромные деформации и “антиквантование” для простейших ОДУ, *ТМФ*, 2007, том 150, номер 1, 143–151

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf5970>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 16:23:58

© 2007 г.

С. Ю. Славянов*, Ф. Р. Вукайлович†

ИЗОМОНОДРОМНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ И “АНТИКВАНТОВАНИЕ” ДЛЯ ПРОСТЕЙШИХ ОДУ

Рассмотрены три различные модели линейных дифференциальных уравнений и их изомонодромных деформаций. Показано, что каждая модель имеет свою специфику, хотя все они приводят к одному и тому же конечному результату. Оказывается, что изомонодромные деформации тесно связаны с гамильтоновой структурой как классической, так и квантовой механики.

Ключевые слова: изомонодромные деформации, “антиквантование”, акцессорный параметр, несущественная особенность.

ВВЕДЕНИЕ

В этой публикации мы постарались объединить различные сведения, касающиеся инвариантных преобразований, изомонодромных деформаций и “антиквантования” для простейших ОДУ, содержащих акцессорный параметр и несущественную особенность. Некоторые из этих сведений являются новыми, часть опубликована в других статьях одного из авторов [1]–[3], часть рассеяна как фольклор. Изложение ведется на физическом уровне строгости без использования сложных математических конструкций. Мы надеемся, что эта публикация поможет физикам осмыслить взаимосвязь квантовой и классической механики на основе изомонодромных деформаций.

План публикации следующий. В разделах 1–3 вводятся основные линейные фуксовы уравнения, содержащие акцессорный параметр и несущественные (ложные) особенности:

- 1) уравнение второго порядка (уравнение Шредингера),
- 2) система 2×2 уравнений первого порядка¹⁾,
- 3) специальная система 3×3 уравнений первого порядка.

В рамках этих разделов обсуждаются взаимосвязи между этими уравнениями.

В разделе 4 обсуждается понятие изомонодромной деформации, а в разделе 5 предложено понятие “антиквантования” для рассмотренных задач.

¹⁾Некоторые авторы называют ее системой Шлезингера.

*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: slav@SS2034.spbu.edu

†Vinca Institute of Nuclear Sciences, Belgrade, Serbia

Одному из авторов (Ф. Р. Вукайловичу) посчастливилось встречать профессора А. А. Логунова во время его визита в институт ВИНЧА в 1986 г., и он до сих пор помнит очень интересные и полезные беседы во время этой встречи. Другой автор (С. Ю. Славянов) в течение ряда лет работает членом редколлегии журнала “Теоретическая и математическая физика” под чутким и мудрым руководством главного редактора – профессора А. А. Логунова. Оба автора рады опубликовать эту совместную статью в выпуске, посвященном 80-летию юбилею Анатолия Алексеевича, и пожелать ему всего наилучшего.

1. ФУКСОВО УРАВНЕНИЕ С ЧЕТЫРЬМЯ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ В ИНВАРИАНТНОЙ ФОРМЕ

Мы начнем с так называемого уравнения Гойна – уравнения второго порядка с четырьмя фуксовыми особенностями. Для наших целей оно будет записано в форме

$$\begin{aligned} \sigma(z)y''(z) + \sum_{j=1}^3 \sigma_j(z)(b_j + 1)y'(z) + \\ + \left[\frac{1}{4} \sum_{j=1}^3 (b_j^2 - \Delta_j^2) \frac{\sigma_j(z)}{z - z_j} + \frac{1}{4} \left(\sum_{j=1}^3 \Delta_j^2 - \Delta_\infty^2 \right) (z - z_3) + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^3 \left(b_j + \frac{1}{3} \right) (z - z_j) + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq j, j \neq k, k \neq i}}^3 b_i b_j (z - z_k) - \lambda \frac{\sigma_3(z_3)}{z_2 - z_1} \right] y(z) = 0, \quad (1) \end{aligned}$$

где

$$\sigma(z) = \prod_{j=1}^3 (z - z_j), \quad \sigma_j(z) = \frac{\sigma(z)}{z - z_j},$$

$b_j, \Delta_j, \Delta_\infty, \lambda$ и z_j – параметры. В дальнейшем параметры z_j будут заданы следующим образом: $z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = t$. Последний параметр t часто понимается как время. Параметр λ называется акцессорным параметром. Его можно рассматривать как энергию в квантовых приложениях изучаемых уравнений.

Характеристические экспоненты Фробениуса ρ_{mj} (где первый индекс отвечает определенному решению Фробениуса), задаваемые соответствующей формой решения в каждой конечной фуксовой особенности z_j ,

$$y_m(z) = (z - z_j)^{\rho_{mj}} \sum_{k=0}^{\infty} g_k(z - z_j)^k, \quad m = 1, 2,$$

могут быть выражены из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \rho_{1j} + \rho_{2j} &= -b_j, \\ (\rho_{1j} - \rho_{2j})^2 &= \Delta_j^2, \\ \rho_{1j} \rho_{2j} &= \frac{1}{4} (b_j^2 - \Delta_j^2). \end{aligned} \quad (2)$$

Характеристические экспоненты Фробениуса $\rho_{m\infty}$, $m = 1, 2$, определенные в фуксовой особенности на бесконечности, могут быть найдены из уравнений

$$\begin{aligned}\rho_{1\infty} + \rho_{2\infty} &= -\left(2 + \sum_{j=1}^3 b_j\right), \\ (\rho_{1\infty} - \rho_{2\infty})^2 &= \Delta_\infty^2, \\ \rho_{1\infty}\rho_{2\infty} &= \frac{1}{4}(b_j^2 - \Delta_j^2) + \sum_{j=1}^3 b_j + 2 \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^3 b_j b_k.\end{aligned}\tag{3}$$

Первое равенство в (3) есть следствие теоремы Фукса.

Довольно своеобразное представление уравнения Гойна (1), которое отличается от уравнения Гойна в общепринятых обозначениях,

$$\sigma(z)y''(z) + \sum_{j=1}^3 \sigma_j(z)\alpha_j y'(z) + [\gamma z + \lambda]y(z) = 0,\tag{4}$$

связано с тем, что в (1), во-первых, представлена общая форма уравнения Гойна во-вторых, сделано различие между теми параметрами (b_j) , которые меняются при s -гомотопных преобразованиях

$$y(z) \rightarrow \prod_{j=1}^3 (z - z_j)^{\mu_j} y(z),$$

и теми параметрами (Δ_j, λ) , которые не меняются при этих преобразованиях. Чтобы доказать утверждение об инвариантности (1), необходимо изучить инвариант (см. работу [3]²⁾)

$$I(z) = 4R(z)Q(z) - (P(z) - R'(z))^2 - 2(P'(z) - R''(z))R(z)\tag{5}$$

уравнения

$$L_z y = R(z)y''(z) + P(z)y'(z) + Q(z)y(z) = 0\tag{6}$$

при общем калибровочном преобразовании $L_z \rightarrow S^{-1}(z)L_z S(z)$. Для изучаемого уравнения этот инвариант записывается как

$$\begin{aligned}I(z) &= \sigma(z) \left[\sum_{j=1}^3 (b_j^2 - \Delta_j^2) \frac{\sigma_j(z)}{z - z_j} + \left(\sum_{j=1}^3 \Delta_j^2 - \Delta_\infty^2 \right) (z - z_3) + \right. \\ &\quad \left. + 4 \sum_{j=1}^3 \left(b_j + \frac{1}{3} \right) (z - z_j) + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq j, j \neq k, k \neq i}}^3 b_i b_j (z - z_k) - \left(\sum_{j=1}^3 b_j \sigma_j(z) \right)^2 - \right.\end{aligned}$$

²⁾В соответствующей формуле (1.3.17) в [3] опечатка: в последнем члене нет множителя R .

$$\begin{aligned}
& -4 \sum_{j=1}^3 b_j(z - z_j) + 4\sigma(z) \sum_{j=1}^3 (z - z_j) + \lambda \frac{\sigma_3(z_3)}{z_2 - z_1} \Big] - \\
& - \left(\sum_{j=1}^3 b_j \sigma_j(z) \right)^2 - 2\sigma(z) \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq j, j \neq k, k \neq i}}^3 b_i b_j (z - z_k).
\end{aligned} \tag{7}$$

После нескольких упрощений данное равенство приобретает вид

$$I(z) = \sigma(z) \left[- \sum_{j=1}^3 \Delta_j^2 \frac{\sigma_j(z)}{z - z_j} + \left(\sum_{j=1}^3 \Delta_j^2 - \Delta_\infty^2 \right) (z - z_3) + \lambda \frac{\sigma_3(z_3)}{z_2 - z_1} \right]. \tag{8}$$

Это выражение не содержит параметров b_j , что доказывает наше утверждение об инвариантности (1) относительно s -гомотопных преобразований. Более того, (1) инвариантно относительно линейных преобразований независимой переменной z . Это объясняет присутствие множителей при λ .

Если $b_j = 0$, уравнение (1) имеет самосопряженную форму, которая в основном используется для квантовых приложений.

Ниже в уравнении (1) будет добавлена пятая особенность, а именно несущественная особенность – фуксова особенность с тривиальной монодромией и характеристическими показателями, равными 0, 2. Деформации, связанные с изменениями, относящимися к этой точке, исследуются в разделе 4.

2. СИСТЕМА 2×2 УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Наряду с уравнением второго порядка можно изучать фуксову систему 2×2 уравнений первого порядка

$$\vec{Y}'(z) + T(z)\vec{Y}(z) = 0, \tag{9}$$

где (2×2) -матрица $T(z)$ имеет три простых полюса,

$$T(z) = \sum_{j=1}^3 A_j \frac{1}{z - z_j}, \tag{10}$$

а A_j – постоянные матрицы. Если выбрать в качестве первой компоненты вектора $\vec{Y}(z)$ функцию $y_1(z) := y(z)$, то мы получим для этой функции уравнение второго порядка

$$y''(z) + p(z)y(z) + q(z)y(z) = 0, \tag{11}$$

где

$$p(z) = \text{tr } T - T'_{12} T_{12}^{-1}, \quad q(z) = T'_{11} - T'_{12} T_{12}^{-1} T_{11} + \det T. \tag{12}$$

Из выражений для $p(z)$ и $q(z)$ следует, что уравнение (11) имеет фуксовы особенности не только в точках z_j и в бесконечности, но также в точках d_i – корнях недиагонального матричного элемента T_{12} . Число этих корней не превышает двух. Поскольку функция $y(z)$ голоморфна в d_i , эти особенности могут быть только несущественными. Их появление является следствием того, что одно из решений $y(z)$

уравнения (11) может быть разложено в ряд Тейлора в окрестности d_i , начинающийся с квадратичных членов. Этот факт может быть проверен прямыми вычислениями. Приняв во внимание свойства логарифмической производной, получим

$$T'_{12}T_{12}^{-1} = \frac{1}{z - d_i} + h(z),$$

где $h(z)$ голоморфна в $z = d_i$. Разыскивая решение в виде

$$y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(z - d_i)^k,$$

мы можем получить два первых уравнения для коэффициентов g_1, g_2 :

$$\begin{aligned} g_1 + T_{11}(d_i)g_0 &= 0, \\ 0 \cdot g_2 + (\operatorname{tr} T(d_i) + h(d_i) - T_{11}(d_i))g_1 + (\det T(d_i) + T_{11}(d_i)h(d_i))g_0 &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Нетрудно проверить, что, поскольку $T_{12}(d_i) = 0$, все члены в левой части уравнения (13) равны нулю, и оно является тривиальным тождеством. Общее решение $y(z)$ голоморфно в $z = d_i$, причем g_2 произвольно.

Система (9) может быть преобразована в эквивалентную систему преобразований

$$T \rightarrow S^{-1}TS$$

с постоянной матрицей S . Эта матрица может быть выбрана таким образом, чтобы, например, диагонализировать матрицу A_1 . В этом случае недиагональный матричный элемент T_{12} примет вид

$$T_{12} = \frac{k(z - q)}{\prod_{j=1}^3 (z - z_j)} \quad (14)$$

с $k \neq 0$. В результате появляется только одна несущественная особенность $z = q$, и ситуация сводится к той, что изучается в разделе 4. Это означает, что (11) является фуксовым уравнением с тремя фуксовыми особенностями в конечных точках, одной особенностью на бесконечности и одной несущественной особенностью в $z = q$.

Другая возможность “убить” вторую несущественную особенность – это поставить условие

$$\lim_{z \rightarrow \infty} zT(z) = \begin{pmatrix} -\kappa_1 & 0 \\ 0 & -\kappa_2 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Это также ведет к равенству (14) и используется даже чаще. Бабич в деталях изучил проблему “калибровки” систем 2×2 [4]. Те, кто практически пытался выполнить дальнейшие вычисления без такого упрощения, знают, насколько они трудоемки. Найти физическую интерпретацию матричных элементов A_j также непросто.

3. СПЕЦИАЛЬНАЯ ФУКSOVA СИСТЕМА 3×3

Рассмотрим специальную фуксову систему 3×3 уравнений первого порядка с тремя фуксовыми особенностями в конечных точках z_j и с одной в бесконечности:

$$A(z)\vec{w}'(z) + B\vec{w}(z) = 0, \quad \vec{w}(z) = \begin{pmatrix} w_1(z) \\ w_2(z) \\ w_3(z) \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Предполагается, что матрицы $A(z)$ и B имеют вид

$$A(z) = \begin{pmatrix} z - z_1 & 0 & 0 \\ 0 & z - z_2 & 0 \\ 0 & 0 & z - z_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Специфика системы (16) связана со специальными значениями характеристических экспонент Фробениуса в особенностях:

$$\rho_{1j} = 0, \quad \rho_{2j} = 1, \quad \rho_{3j} = -b_{jj}.$$

Выполняется равенство

$$A'(z) = I, \quad (18)$$

где I – единичная матрица. Дважды продифференцировав (16), получим

$$A(z)\vec{w}''(z) + (B + I)\vec{w}'(z) = 0, \quad (19)$$

$$A(z)\vec{w}'''(z) + (B + 2I)\vec{w}''(z) = 0. \quad (20)$$

Используя введенные обозначения σ и σ_j , в первой строке матричного равенства (20) имеем

$$\sigma(z)w_1'''(z) + \sigma_1(z)[(b_{11} + 2)w_1''(z) + b_{12}w_2''(z) + b_{13}w_3''(z)] = 0. \quad (21)$$

Вторая и третья строчки матричного равенства (19) дают

$$\begin{aligned} \sigma_1(z)w_2''(z) + (z - z_3)[b_{21}w_1'(z) + (b_{22} + 1)w_2'(z) + b_{23}w_3'(z)] &= 0, \\ \sigma_1(z)w_3''(z) + (z - z_2)[b_{31}w_1'(z) + b_{32}w_2'(z) + (b_{33} + 1)w_3'(z)] &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Эти два уравнения помогают исключить вторые производные w_2'' и w_3'' из (21):

$$\begin{aligned} \sigma(z)w_1'''(z) + \sigma_1(z)(b_{11} + 2)w_1''(z) - [b_{12}b_{21}(z - z_3) + b_{13}b_{31}(z - z_2)]w_1'(z) - \\ - [b_{12}(b_{22} - 1)(z - z_3) + b_{13}b_{32}(z - z_2)]w_2'(z) - \\ - [b_{12}b_{23}(z - z_3) + b_{13}(b_{33} - 1)(z - z_2)]w_3'(z) = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Дальнейшие манипуляции с различными уравнениями из (16) и (19), которые включают умножение строк на миноры B_{11} , B_{21} , B_{31} матрицы B ,

$$B_{11}zw_1'(z) - B_{21}(z - 1)w_2'(z) + B_{31}(z - t)w_3'(z) = \det B w_1(z), \quad (24)$$

приводят к важным равенствам, в которых вводится дополнительная особая точка $z = q$:

$$\begin{aligned} kb_{12}(z - q)(z - 1)w_2'(z) &= b_{12}B_{31}[\sigma(z)w_1'' - \sigma_1(z)(b_{11} - 1)w_1'] + \\ &\quad + b_{12}b_{13}[B_{11}\sigma_3(z)w_1' - \det B w_1], \\ kb_{13}(z - q)(z - t)w_3'(z) &= b_{13}B_{21}[\sigma(z)w_1'' - \sigma_1(z)(b_{11} - 1)w_1'] - \\ &\quad - b_{12}b_{13}[B_{11}\sigma_2(z)w_1' - \det B w_1], \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$k = b_{13}B_{21} + b_{12}B_{31}, \quad q = \frac{b_{13}B_{21}z_2 + b_{12}B_{31}z_3}{b_{13}B_{21} + b_{12}B_{31}}.$$

Использование этих равенств окончательно упрощает (21), в результате имеем

$$\begin{aligned} \sigma(z)w_1'''(z) + \left(\sum_{j=1}^3 \sigma_j(z)(b_{jj} + 1) - \sigma_1(z) + \frac{\sigma(z)}{z - q} \right) w_1''(z) + \\ + \left(\sum_{j=1}^3 B_{jj}(z - z_j) - \frac{(1 - b_{11})\sigma_1(z)}{z - q} + \frac{B_{11}b_{13}b_{12}(z_2 - z_3)z}{k(z - q)} \right) w_1' - \\ - \frac{(z_2 - z_3)b_{13}b_{12} \det B}{k(z - q)} w_1 = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Это фуксово уравнение третьего порядка с фуксовыми особенностями в $z = z_j$ и в бесконечности и одной дополнительной несущественной особенностью в $z = q$. Схема Римана для этого уравнения

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & q & \infty \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} + \frac{\text{tr } B}{2} + \kappa \\ 1 - b_{11} & 1 - b_{22} & 1 - b_{33} & 3 & \frac{1}{2} + \frac{\text{tr } B}{2} - \kappa \end{pmatrix} \quad (27)$$

задает характеристические показатели Фробениуса (значение κ легко может быть вычислено).

С уравнением (26) связано интегральное преобразование (преобразование Эйлера), сохраняющее его свойства и зависящее от одного параметра μ , вида

$$y(z) = \int_{\gamma} (z - \zeta)^{\mu} v(\zeta) d\zeta. \quad (28)$$

Мы предполагаем, что при подходящем выборе контура интегрирования γ интегралы сходятся, а члены, возникающие при интегрировании по частям, пропадают. Это преобразование, примененное к уравнению третьего порядка, подобному (26), подробно изучалось Казаковым [5]. Следующие утверждения могут быть доказаны тем же путем, что и в [5].

1. Преобразование (28) сохраняет фуксовы особенности.
2. Подходящим выбором параметра μ можно обратить в нуль последний член в (26) с функцией w_1 . В этом случае решение есть сумма константы и решения особого уравнения Гойна с добавленной несущественной особенностью.

4. ИЗОМОНОДРОМНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ

Мы рассмотрим понятие изомонодромной деформации на неформальном уровне. Предположим, что к четырем фуксовым особым точкам в уравнении Гойна добавлена несущественная особенность в точке $q = q_0$. Единственным локальным параметром, дополнительно определяющим эту точку, является вычет коэффициента перед функцией $y(z)$; пусть этот вычет есть $p = p_0$. Матрица монодромии для этой точки

тривиальна (равна единичной матрице). Положим, что в уравнении присутствует параметр t , который, изменяясь, задает это положение третьей особенности z_3 . Свойство изомодромности означает следующее: ни то, что точка является несущественной особенностью, ни полная монодромия (определяемая значением аксессуарного параметра) не нарушаются при деформации. Помимо локальных параметров в фуксовых особенностях, которые фиксированы³⁾, у нас есть три изменяющиеся функции $\lambda(p, q, t)$, $p(t)$, $q(t)$, но есть и требование, чтобы эти изменения не нарушали монодромию.

Рассмотрим уравнение с пятью фуксовыми особыми точками:

$$L_z^0 y(z) - \frac{\sigma(z)}{z - q} y'(z) + \sigma_3(q) \frac{z - t}{z_2 - z_1} \frac{p}{z - q} y(z) = 0, \quad (29)$$

где L_z^0 – дифференциальный оператор, введенный в уравнении (1), с фиксированными z_1 , z_2 и изменяющейся $z_3 = t$. Это уравнение может быть названо деформированным уравнением Гойна. Для дальнейших целей его можно переписать как

$$D^2 y(z) + \left(P_H(z) - \frac{1}{z - q} \right) y'(z) + \left(Q_H(z) + \frac{p\sigma_3(q)}{\sigma_3(z)(z - q)} - \frac{\lambda\sigma_3(t)}{\sigma(z)(z_2 - z_1)} \right) y(z) = 0. \quad (30)$$

Выражения для P_H и Q_H могут быть легко восстановлены путем сравнения (1) и (30). Как было показано в [1], [2] (а первоначально в [6]) с помощью локальных разложений $y(z)$ в окрестности $z = q$, необходимое условие того, что точка $z = q$ является несущественной особенностью, может быть записано в виде

$$\lambda(p, q, t) = \frac{\sigma(q)(z_2 - z_1)}{\sigma_3(t)} \left[p^2 + \left(P_H(q) - \frac{1}{q - z_1} - \frac{1}{q - z_2} \right) + Q_H(q) \right]. \quad (31)$$

Функцию $\lambda(p, q, t)$ можно рассматривать как гамильтониан. Условие монодромии означает, что значение λ (энергии) не изменяется при изменении параметров $p = p(t)$, $q = q(t)$ несущественной особенности. Известно, что это справедливо, если $p(t)$ и $q(t)$ являются решениями уравнений Гамильтона

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{d\lambda}{dq}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{d\lambda}{dp}, \quad (32)$$

что эквивалентно сохранению энергии при движении. Поскольку аксессуарный параметр не меняется, и монодромия в несущественной особенности тривиальна, полная монодромия сохраняется. Уравнение движения Эйлера–Лагранжа оказывается уравнением Пенлеве P^6 [2].

Недавно Новиков [7] обнаружил, что упомянутое выше интегральное преобразование Эйлера приводит к так называемому преобразованию Окамото для P^6 .

5. АНТИКВАНТОВАНИЕ

Уравнение (1) можно переписать как

$$H(\hat{p}, \hat{q}, t) y(z) = \frac{\sigma(z)(z_2 - z_1)}{\sigma_3(t)} \left[D^2 y(z) + P_H(z) D y(z) + Q_H(z) y(z) \right] = \lambda y(z) \quad (33)$$

³⁾ Иначе монодромия не сохраняется.

с оператором $\hat{p} = D$ и оператором $\hat{q}$ умножения на z . Это уравнение можно считать квантовым уравнением Шредингера, заданным квантовым гамильтонианом $H(\hat{p}, \hat{q}, t)$. Под антиквантованием мы понимаем:

1) подстановку в квантовом гамильтониане $H(\hat{p}, \hat{q}, t)$ вместо операторов $\hat{p}$, $\hat{q}$ переменных классического движения p , q , что означает переход к классическому гамильтониану $h(p, q, t)$;

2) непринципиальные изменения параметров, определяющих характеристические показатели Фробениуса: $b_1 \rightarrow b_1 - 1$, $b_2 \rightarrow b_2 - 1$;

3) сокращение функции $y(z)$ в левой и правой частях последнего равенства в (33)⁴.

После этих действий мы приходим к (31) (без всякой ссылки на несущественную особенность или изомонодромную деформацию!). Однако формальное использование уравнений движения снова приводит к уравнению Пенлеве P^6 . Следовательно, определенная выше процедура антиквантования формально эквивалентна изомонодромным деформациям.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Были рассмотрены три модели линейных ОДУ, в которых применимо понятие изомонодромной деформации. Первая модель (ОДУ второго порядка) требует искусственного включения несущественной особенности в уравнение Гойна. С другой стороны, она имеет простую физическую интерпретацию. Вторая модель (система 2×2 уравнений первого порядка) перегружена несущественными особенностями и требует дополнительной калибровки, которая носит слегка искусственный характер. Третья модель (система 3×3 уравнений первого порядка) кажется наиболее адекватной с точки зрения числа несущественных особенностей и параметров, но она пока недостаточно исследована.

Благодарности. Авторы рады поблагодарить проф. М. Бабица за ценные пояснения. Мы выражаем благодарность MNŽS за поддержку (грант № 141039A).

Список литературы

- [1] S. Yu. Slavyanov, *J. Phys. A*, **29** (1996), 7329.
- [2] С. Ю. Славянов, *ТМФ*, **123** (2000), 395; S. Yu. Slavyanov, *Oper. Theory Adv. Appl.*, **132** (2002), 395.
- [3] С. Ю. Славянов, В. Лай, *Специальные функции: Единая теория, основанная на особенностях*, Невский диалект, С.-Пб., 2002.
- [4] М. В. Бабиц, *Уравнения Шлезингера и уравнения Гарнье–Пенлеве 6, геометрия перехода*, Препринт ПОМИ, 06-06, 2006; <http://www.pdmi.ras.ru/preprint/2006/06-06.html>.
- [5] А. Я. Казаков, *ТМФ*, **116:3** (1998), 323.
- [6] R. Fuchs, *Math. Ann.*, **63** (1907), 301.
- [7] Д. П. Новиков, *ТМФ*, **146:3** (2006), 355.

Поступила в редакцию 29.08.2006

⁴Мой (С. Ю. Славянова) лектор по квантовой механике, покойный профессор Г. Друкарев, рассказывал студентам, что его однажды спросили: “А почему бы в равенстве $H\Psi = E\Psi$ не сократить Ψ в обеих частях?” Этот вопрос кажется не совсем глупым.