Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Ширков, И. Л. Соловцов, Десятилетие аналитической теории возмущений в КХД, *ТМФ*, 2007, том 150, номер 1, 152–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf5971>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 13:37:32

© 2007 г.

Д. В. Ширков*, И. Л. Соловцов*,†

ДЕСЯТИЛЕТИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ В КХД

Модификация ряда теории возмущений КХД, выполненная методом ренорм-группы, позволяет улучшить свойства разложения в ультрафиолетовой области, однако приводит к нефизическим особенностям в инфракрасной области. Привлекая дополнительные общие требования аналитичности, отраженные в представлениях Челлена–Лемана и Йоста–Лемана и основанные на принципе причинности, метод аналитической теории возмущений реализует следующий шаг в модернизации пертурбативных аппроксимаций, освобождая их от особенностей и делая стабильными к поправкам высших порядков и выбору схемы перенормировки. Представлен обзор основных этапов разработки аналитической теории возмущений в КХД, в том числе недавние приложения к описанию адронных процессов.

Ключевые слова: неаналитичность по α , причинность, представление Челлена–Лемана.

ПРЕАМБУЛА

В методе аналитической теории возмущений (АТВ) находит свое решение проблема устранения нефизических (или призрачных) особенностей инвариантного заряда и матричных элементов квантовой хромодинамики (КХД). Эта трудность, получившая также название проблемы московского нуля или полюса Ландау, впервые возникла в квантовой электродинамике (КЭД) в середине 50-х гг. Она сыграла известную драматическую роль в развитии локальной квантовой теории поля (КТП).

В конце 50-х гг. была опубликована работа Боголюбова, Логунова и Ширкова [1], в которой было предложено явное модельное решение этой проблемы путем синтеза метода ренормализационной группы (РГ) и спектрального представления Челлена–Лемана, выражающего свойство аналитичности в комплексной плоскости переменной Q^2 . Метод АТВ в КХД основан на идеях этой работы.

Разработка метода АТВ в течение последних десяти лет выявила ряд новых важных черт аналитического подхода. Оказалось, что АТВ не только решает проблему

*Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия

†Международный центр перспективных исследований, ГГТУ им. П. О. Сухого, Гомель, Беларусь

нефизических особенностей, но и приводит к таким нестепенным функциональным разложениям хромодинамических величин, которые, по сравнению со степенными разложениями теории возмущений (ТВ), обладают поразительными свойствами стабильности по отношению к учету высших петлевых эффектов и выбору способа перенормировки.

1. ВВЕДЕНИЕ

Неотъемлемой частью вычислений в современной КТП является метод улучшения аппроксимационных свойств ТВ с помощью ренормгрупповой инвариантности, предложенный в работе [2] в середине 50-х гг. (см. также работу [3] и соответствующую главу книги [4]). Его роль оказывается важной в случаях, когда решение имеет сингулярность, структура которой нарушается разложением ТВ, а также когда взаимодействие не является слабым, как, например, в КХД.

Рассмотрение практически всех адронных процессов на основе КХД сегодня немыслимо вне РГ-анализа. В то же время непосредственное решение РГ-уравнений приводит к трудностям, связанным с нефизическими особенностями. Инвариантный заряд в КХД $\bar{\alpha}_s(Q^2)$ в однопетлевом приближении имеет призрачный полюс при $Q^2 = \Lambda^2$, см. ниже формулу (2.1). Учет следующих, многопетлевых, поправок не меняет сути дела, а лишь изменяет вид сингулярности (приводит к нефизическим разрезам). Наличие таких особенностей противоречит общим принципам локальной КТП [4], [5].

В работе [1] был предложен способ разрешения проблемы нефизических сингулярностей инвариантного заряда, состоящий в синтезе основ метода РГ и определенных свойств аналитичности по переменной Q^2 , которые вытекают из отражающего основные принципы локальной КТП спектрального представления Челлена–Лемана для поперечной лоренц-инвариантной амплитуды полного фотонного или бозонного пропагатора:

$$d(Q^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\sigma}{\sigma + Q^2} \rho(\sigma). \quad (1.1)$$

В КЭД квадрат эффективного заряда электрона, введенного впервые Дираком [6] и называемого также инвариантной или бегущей константой связи¹⁾, $\bar{\alpha}(Q^2)$ пропорционален поперечной амплитуде полного фотонного пропагатора, удовлетворяющей спектральному представлению Челлена (1.1), которое отвечает аналитичности в комплексной плоскости переменной Q^2 с разрезом вдоль отрицательной части действительной оси. Согласно работе [1] аналитический инвариантный заряд восстанавливается по этому представлению, спектральная плотность в котором определена как скачок инвариантного заряда, найденного методом РГ в евклидовой области с помощью фейнмановской теории возмущений, на физическом разрезе вдоль отрицательной части действительной оси, $\text{Re } Q^2 < 0$.

Полученные в [1] выражения для аналитического инвариантного заряда $\bar{\alpha}$ в КЭД обладают следующими важными свойствами:

- отсутствие призрачного полюса;

¹⁾Ввиду семантической несуразницы последнего термина мы будем его избегать.

- как функции константы связи α , эти выражения имеют в начале координат существенную особенность вида $\exp(-3\pi/\alpha)$;
- для действительных положительных α выражения допускают степенное разложение, совпадающее с пертурбативным;
- $\bar{\alpha}$ имеет конечный ультрафиолетовый предел, равный 3π , не зависящий от экспериментального значения $\alpha \simeq 1/137$.

В середине 90-х г.г. эта идея была использована в КХД в работах [7], [8]. Разработанный там метод затем получил название АТВ. Объединение ренорминвариантности и Q^2 -аналитичности в случае КХД привело к выявлению ряда важных свойств аналитической функции связи [7], [8]. К их числу относится наличие *универсальной* инфракрасной стабильной точки у инвариантного заряда в евклидовой области $\alpha_E(Q^2)$. Его значение $\alpha_E(Q^2 = 0)$ определяется первым коэффициентом бета-функции β_0 , т.е. однопетлевым вкладом, не изменяется при учете многопетлевых поправок и поэтому является схемно независимым. Инфракрасное (ИК) предельное значение не зависит от экспериментально определяемого масштабного параметра Λ , а набор кривых $\alpha_E(Q^2)$, отвечающих различным значениям Λ , представляет собой пучок с общей точкой $\alpha_E(0) = 1/\beta_0$. Таким образом, наложение условия аналитичности существенным образом модифицирует поведение аналитического инвариантного заряда в ИК-области.

Другой важной чертой аналитического подхода является возможность непротиворечивого определения инвариантной функции связи $\alpha_M(s)$ в минковской, т.е. времениподобной внутри массового гиперboloида, области четырехмерного импульсного многообразия [9]. Современная практика вычислений в КТП, как правило, использует выражения для наблюдаемых и некоторых других промежуточных РГ-инвариантных (или ковариантных) величин, выраженных в терминах инвариантной функции связи (инвариантного заряда). Для этого рассматриваемая величина должна быть записана в соответствующем представлении. Так, через $\bar{\alpha}_s(Q^2)$ могут быть выражены лишь объекты, определенные в евклидовой части 4-импульсного представления.

Между тем ряд наблюдаемых, например, эффективные поперечные сечения рассеяния, а также характеристики инклюзивных распадов, являются, как правило, функциями времениподобного аргумента s – квадрата энергии в системе центра масс (с.ц.м.). Однако переход от пространственноподобных (евклидовых) к времениподобным (минковским) значениям аргумента в контексте РГ не может быть осуществлен непосредственно. Дело в том, что амплитуды пропагаторов, подобные поперечной фотонной амплитуде $d(Q^2)$, и матричные элементы согласно (1.1) принимают комплексные значения при действительных $Q^2 < 0$, т.е. во времениподобной области значений своего аргумента.

Соотношения соответствия между ренормализационно-инвариантными величинами в различных областях, евклидовой и минковской, удается установить лишь более опосредованным образом, при помощи линейных интегральных преобразований. При этом важную роль играют свойства аналитичности инвариантного заряда, которые нарушаются в ТВ и восстанавливаются при аналитическом подходе.

Инвариантная функция связи $\alpha_M(s)$, определенная в минковской области, как и евклидова $\alpha_E(Q^2)$, обладает ИК-стабильной точкой, значение которой совпадает с евклидовым, $\alpha_M(s=0) = 1/\beta_0$, и одинаковым асимптотическим поведением. Однако функции $\alpha_E(Q^2)$ и $\alpha_M(s)$ не могут совпадать по причинам общего характера [10].

Важным свойством новой конструкции, известной как АТВ, является трансформация степенных функциональных разложений (т.е. разложений по степеням функции $\bar{\alpha}_s$) для наблюдаемых в *нестепенные* функциональные разложения, обладающие пониженной чувствительностью к выбору схемы перенормировки и улучшенными свойствами фактической численной сходимости.

Таким образом, возникает самосогласованная картина описания функций и наблюдаемых, обладающая свойствами ренормализационной инвариантности и свободная от трудности, связанной с нефизическими сингулярностями.

2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

2.1. Сингулярности эффективного заряда. Суммирование ультрафиолетовых (УФ) логарифмов методом РГ в однопетлевом приближении приводит к сингулярному выражению для инвариантной функции связи (“инвариантного заряда”) КХД

$$\bar{\alpha}_s^{(\ell=1)}(Q^2) = \frac{\alpha_\mu}{1 + \alpha_\mu \beta_0 \ln(Q^2/\mu^2)} = \frac{1}{\beta_0 \ln(Q^2/\Lambda^2)}, \quad \beta_0(n_f) = \frac{11 - 2n_f/3}{4\pi}, \quad (2.1)$$

где n_f – количество “активных” ароматов. Масштабный параметр определен здесь известным образом: $\Lambda = \mu e^{-\frac{1}{2\alpha_\mu \beta_0}}$.

Функция (2.1) имеет нефизическую сингулярность в ИК-области при $Q^2 = \Lambda^2$. Проблема нефизических особенностей такого сорта не может быть решена [11] за счет учета любого конечного числа многопетлевых вкладов. Нефизические сингулярности при этом не исчезают, а лишь меняют характер. Так, обычное пертурбативное двухпетлевое выражение

$$\bar{\alpha}_s^{(2)}(Q^2) = \frac{1}{\beta_0 l} \left[1 - \frac{\beta_1}{\beta_0^2} \frac{\ln l}{l} \right] + O\left(\frac{\ln^2 l}{l^3}\right), \quad l = \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2}, \quad (2.2)$$

помимо полюса имеет нефизический разрез, обусловленный двойной логарифмической зависимостью от Q^2 .

Аналогичная ситуация имеет место и в КЭД. Следует отметить, что в этом случае нефизические сингулярности отвечают огромным масштабам, лишенным физического смысла. В случае же КХД величина параметра Λ составляет несколько сот МэВ и лежит в физически достижимой области.

2.2. Аналитический подход. Перенормированное разложение теории возмущений не является окончательным результатом и допускает определенные модификации. Так, разложение функции Адлера $D(Q^2)$ записывается в виде двойного ряда по степеням константы связи α_μ , отнесенной к некоторой точке отсчета $Q^2 = \mu^2$, и степеням $\ln(Q^2/\mu^2)$:

$$D_{\text{pt}}\left(\frac{Q^2}{\mu^2}, \alpha_\mu\right) = \sum_n \alpha_\mu^n \sum_{k=0}^n d_{n,k} \ln^k\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right). \quad (2.3)$$

В УФ-области из-за больших значений логарифмов этот ряд плохо определен²⁾.

Аккумулируя большие логарифмы в инвариантный заряд $\bar{\alpha}_s(Q^2) = \bar{\alpha}_s(Q^2/\mu^2, \alpha_\mu)$, метод РГ улучшает УФ-свойства ряда. Обработанная по методу РГ функция D является функцией только одного аргумента, инвариантного заряда $\bar{\alpha}_s$, и записывается в виде функционального степенного разложения:

$$D_{\text{РТ}}(Q^2) = D(\bar{\alpha}_s(Q^2)) = \sum_n d_{n,0} \bar{\alpha}_s^n(Q^2); \quad \text{PT} = \text{pt} + \text{RG}. \quad (2.4)$$

В отличие от (2.3) члены ряда теперь не содержат зависимости от μ , а параметр разложения $\bar{\alpha}_s(Q^2)$ стремится к нулю при $Q^2/\mu^2 \rightarrow \infty$ в соответствии со свойством асимптотической свободы.

Вместе с тем разложение (2.4) формально остается плохо определенным в ИК-области, так как при уменьшении Q^2 проявляется сингулярность параметра разложения $\bar{\alpha}_s(Q^2)$. Таким образом, улучшив методом РГ поведение в УФ-области и получив важное физическое свойство асимптотической свободы, мы потеряли содержащееся в каждом конечном порядке исходного разложения (2.3) отражение определяющего свойства функции $D(Q^2)$ – ее аналитичности в комплексной плоскости Q^2 , разрезанной вдоль отрицательной части действительной оси.

Метод АТВ отвечает второму шагу в модификации пертурбативного результата. В дополнение к принципу *ренормализационной инвариантности* теперь в игру вступает фундаментальный принцип *причинности*, который в данном случае реализуется в виде интегрального представления Челлена–Лемана (1.1). В АТВ функция D представляется нестепенным функциональным разложением:

$$D_{\text{РТ}}(Q^2) = \sum_n d_n \bar{\alpha}_s^n(Q^2) \rightarrow D_{\text{АРТ}}(Q^2) = \sum_n d_n \mathcal{A}_n(Q^2), \quad (2.5)$$

где каждая из евклидовых функций $\mathcal{A}_n(Q^2)$ записывается через представление Челлена–Лемана,

$$\mathcal{A}_n(Q^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\sigma \frac{\rho_n(\sigma)}{\sigma + Q^2}, \quad (2.6)$$

со своей спектральной функцией, которая определена через скачок степени инвариантной функции связи на физическом разрезе: $\rho_k(\sigma) = \text{Im} \bar{\alpha}_s^k(-\sigma - i\epsilon)$. Первая функция $\mathcal{A}_1(Q^2)$ отвечает аналитической функции связи

$$\alpha_E(Q^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\sigma \frac{\rho(\sigma)}{\sigma + Q^2}, \quad \rho(\sigma) \equiv \rho_1(\sigma). \quad (2.7)$$

Представление (2.6) определяет аналитические свойства функций $\mathcal{A}_n(Q^2)$ в комплексной плоскости Q^2 : эти функции, а следовательно, и частичная сумма ряда (2.5), являются аналитическими в плоскости Q^2 с разрезом вдоль отрицательной части вещественной оси без нефизических сингулярностей. Исследование свойств этих функций показывает, что найденное методом АТВ конструктивное решение проблемы призрачного полюса стабилизирует высшие петлевые аппроксимации в ИК-области. Результаты проведенного рассмотрения представлены в табл. 1, отражающей этапы эволюции пертурбативного результата: $\text{ТВ} \rightarrow \text{ТВ} + \text{РГ} \rightarrow \text{АТВ}$.

²⁾По той же причине ряд плохо определен и в ИК-области малых Q^2 . Кроме того, при больших n следует ожидать факториального роста коэффициентов $d_{n,k}$.

ТАБЛ. 1. Свойства различных аппроксимаций

Метод	Вид аппроксимации	Свойства		
		УФ	ИК	Аналитичность
ТВ	Двойной ряд по степеням α_μ и $\ln Q^2/\mu^2$	—	—	+
ТВ + РГ	Степенной ряд по инвариантной функции связи $\bar{\alpha}_s(Q^2)$	+	—	—
АТВ = ТВ + РГ + + аналитичность	Нестепенные разложения по функциям $\mathcal{A}_k(Q^2)$ и $\mathfrak{A}_k(s)$	+	+	+

В последней строке таблицы наряду с функциями $\mathcal{A}_n(Q^2)$ указаны также функции $\mathfrak{A}_n(s)$, которые возникают при описании процессов с характерными времениподобными 4-импульсами, т.е. в “минковской” области. Для того чтобы придти к этим функциям естественным образом, рассмотрим отношение инклюзивного адронного и лептонного сечений процесса (e^+e^-) -аннигиляции – функцию Дрелла $R(s)$, у которой времениподобный аргумент s представляет собой квадрат полной энергии в с.ц.м. Пертурбативное представление в виде степенного ряда по инвариантному заряду, $R_{\text{РТ}}(s) = \sum_n r_n \bar{\alpha}_s^n(s)$, нарушает определяющую связь функций $D(Q^2)$ и $R(s)$:

$$D(Q^2) = Q^2 \int_0^\infty ds \frac{R(s)}{(s + Q^2)^2}. \quad (2.8)$$

В АТВ функция $R(s)$ представлена нестепенным функциональным разложением,

$$R_{\text{АТВ}} = \sum_n d_n \mathfrak{A}_n(s), \quad (2.9)$$

в котором коэффициенты d_n те же, что и в разложении функции D (2.5), а соотношение между $\mathcal{A}_k(Q^2)$ и $\mathfrak{A}_k(s)$,

$$\mathcal{A}_k(Q^2) = Q^2 \int_0^\infty ds \frac{\mathfrak{A}_k(s)}{(s + Q^2)^2}, \quad (2.10)$$

подобно связи $D(Q^2)$ и $R(s)$ в (2.8). Функции $\mathfrak{A}_k$ представляются³⁾ через спектральные функции $\rho_k(\sigma)$ следующим образом [9]:

$$\mathfrak{A}_k(s) = \frac{1}{\pi} \int_s^\infty \frac{d\sigma}{\sigma} \rho_k(\sigma). \quad (2.11)$$

В лидирующем порядке евклидов инвариантный заряд имеет вид [7]

$$\alpha_E^{(1)}(Q^2) = \frac{1}{\beta_0} \left[\frac{1}{\ln(Q^2/\Lambda^2)} + \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 - Q^2} \right]. \quad (2.12)$$

³⁾В работах [12] Ю. Швингер предположил, что в КЭД ренормгрупповая β -функция и спектральная функция фотонного пропагатора (т.е. инвариантного заряда) пропорциональны друг другу. Эта гипотеза нарушается лишь начиная с трехпетлевого уровня. В АТВ гипотеза Швингера оказывается “гибридно” реализованной для β -функции, отвечающей минковскому заряду (2.13), логарифмическая производная которого согласно (2.11) пропорциональна спектральной функции для евклидова заряда.

Поведение аналитического заряда для $\Lambda = 200$ МэВ и $\Lambda = 400$ МэВ изображено на рис. 1. Для сравнения мы приводим также кривые, соответствующие пертурбативным функциям при тех же значениях Λ . Стабильность АТВ-выражений по отношению к высшим петлевым поправкам демонстрируется на рис. 2, где изображены однопетлевая и двухпетлевая функции. Трехпетлевой аналитический заряд практически совпадает с двухпетлевым на уровне 1–2% и на графике не приводится.

Рис. 1. Евклидов α_E и пертурбативный $\bar{\alpha}_s$ заряды.

Таким образом, в противоположность случаю РГ-улучшенной теории возмущений аналитичность, вытекающая из свойства причинности, приводит к стабилизации поведения инвариантного заряда в ИК-области. Важным свойством всех кривых является их прохождение через универсальную точку при $Q^2 = 0$, что и приводит к стабилизации картины. При этом устойчивость в УФ-области (начиная с двухпетлевого уровня) определяется свойством асимптотической свободы.

Инвариантный заряд в минковской области в рамках АТВ может быть определен [13] самосогласованным образом как первая из функций (2.11):

$$\alpha_M(s) = \frac{1}{\pi} \int_s^\infty \frac{d\sigma}{\sigma} \rho(\sigma), \quad \rho(\sigma) \equiv \rho_1(\sigma). \quad (2.13)$$

В лидирующем порядке эта функция имеет вид

$$\alpha_M^{(1)}(s) = \frac{1}{\beta_0 \pi} \arccos \frac{L}{\sqrt{L^2 + \pi^2}} \Big|_{L>0} = \frac{1}{\beta_0 \pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{L}, \quad L = \ln \frac{s}{\Lambda^2}. \quad (2.14)$$

Евклидов (2.7) и минковский (2.13) заряды имеют один и тот же ИК-предел,

$$\alpha_E(0) = \alpha_M(0) = \frac{1}{\beta_0}, \quad (2.15)$$

не зависящий от уровня петлевого приближения.

Рис. 2. Петлевая стабильность евклидова заряда α_E .

2.3. Высшие функции разложений АТВ необходимы для анализа наблюдаемых на основе формул вида (2.9) и (2.5). Они удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\frac{1}{k} \frac{d\mathfrak{A}_k(s)}{d \ln s} = - \sum_{n \geq 1} \beta_{n-1} \mathfrak{A}_{k+n}(s), \quad \frac{1}{k} \frac{d\mathcal{A}_k(Q^2)}{d \ln Q^2} = - \sum_{n \geq 1} \beta_{n-1} \mathcal{A}_{k+n}(Q^2), \quad (2.16)$$

которые могут служить основой итеративного построения. Для этой цели мы должны их явно разрешить, используя дополнительные предположения вида $\beta_{\ell \geq \ell_m} = 0$ и $\mathcal{A}_{k \geq K+1} = 0$. В однопетлевом случае ($\beta_{\ell \geq 1} = 0$) формулы АТВ просты и элегантны. Отправляясь от первых функций (2.12) и (2.14), с помощью соотношения (2.16) получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2^{(1)}(l) &= \frac{1}{\beta_0^2} \left(\frac{1}{l^2} - \frac{e^l}{(e^l - 1)^2} \right), & \mathfrak{A}_2^{(1)}(L) &= \frac{1}{\beta_0^2} \frac{1}{L^2 + \pi^2}, & l &= \ln \left(\frac{Q^2}{\Lambda^2} \right), \\ \mathcal{A}_3^{(1)}(l) &= \frac{1}{\beta_0^3} \left(\frac{1}{l^3} - \frac{1}{2} \frac{e^l + e^{2l}}{(e^l - 1)^3} \right), & \mathfrak{A}_3^{(1)}(L) &= \frac{1}{\beta_0^3} \frac{L}{(L^2 + \pi^2)^2}, & L &= \ln \left(\frac{s}{\Lambda^2} \right). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Двухпетлевой случай технически более сложен. Дело в том, что точное решение для α_s здесь выражается лишь через малоизвестную специальную функцию Ламберта, что приводит к громоздким явным выражениям для $\mathcal{A}_k$ и $\mathfrak{A}_k$ [14].

Однако независимо от уровня приближения все АТВ функции обладают следующими важными качественными свойствами.

- Отсутствие нефизических особенностей достигнуто без введения каких-либо новых параметров.

- Высшие функции (2.17) и пр. не равны степеням первых функций (2.12), (2.14) и осциллируют в окрестности s , $Q^2 \sim \Lambda^2$, обращаясь в нуль в ИК-пределе, см. ниже рис. 3б. В то же время в УФ-пределе они переходят в степени α_s .

• Разложения наблюдаемых по степеням $\alpha_s(Q^2)$ в евклидовом и по $\alpha_s(s)$ в минковском случаях заменяются нестепенными разложениями по наборам $\{\mathcal{A}_k(Q^2)\}$ и $\{\mathfrak{A}_k(s)\}$, обладающими лучшей сходимостью.

2.4. Аналитичность в плоскости α_s . Как уже было отмечено, выражение для евклидовой функции связи $\alpha_E^{(1)}(Q^2/\mu^2, \alpha_\mu)$ содержит неаналитическую структуру вида $\exp[-1/\alpha_s]$, отвечающую существенной сингулярности в начале координат комплексной плоскости переменной α_s .

Напомним здесь, что более полувека назад неизбежность подобной особой точки в КЭД была аргументирована Дайсоном на основе весьма общих соображений [15]. Ее явный вид в точности отвечает структуре, определенной затем в работах [16] путем сочетания ренормализационной инвариантности и условия причинности, а также на основе привлечения результатов, полученных методом функционального перевала [17].

Отметим также, что логическая неизбежность нестепенного характера функциональных АТВ-разложений была подробно прокомментирована в работах [18].

Переход от обычной функции связи в КХД $\alpha_s(L)$ к евклидовой $\alpha_E(L)$ и минковской $\alpha_M(L)$ эквивалентен переходу к новому параметру разложения. Рассмотрим два примера:

$$\alpha \rightarrow w_1^M(\alpha) = \frac{1}{\pi\beta_0} \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + \pi^2\beta_0^2\alpha^2}}, \quad \alpha \rightarrow w_1^E(\alpha) = \alpha + \frac{1}{\beta_0}(1 - e^{1/(\beta_0\alpha)})^{-1}. \quad (2.18)$$

Один из них выглядит подобно переходу к иной схеме перенормировки, так как функция $w^M(\alpha)$ может быть представлена своим разложением по степеням α , тогда как другой в пределе слабой связи подобен тождественному преобразованию, поскольку второй член, имеющий порядок $e^{-1/(\beta_0\alpha)}$ при $\alpha \rightarrow 0$, “не оставляет следов” в степенном разложении.

В то же время переходы (2.18) индуцируют преобразования инвариантной функции связи $\alpha_s^{(1)}(L) \rightarrow \mathfrak{A}_1^{(1)}(L)$, $\alpha_s^{(1)}(L) \rightarrow \mathcal{A}_1^{(1)}(L)$, эквивалентные (2.12) и (2.14).

Функция $w_1^E(\alpha_s)$ обладает существенной особенностью в начале координат комплексной плоскости α_s , что находится в соответствии с результатами работ [15]–[17].

Подобным образом наборы высших функций АТВ-разложений $\{\mathfrak{A}_k(x)\}$, $\{\mathcal{A}_k(x)\}, \dots$ отображаются на нестепенные наборы $\{w_k^M(\alpha_s)\}$, $\{w_k^E(\alpha_s)\}, \dots$ функций⁴⁾:

$$\begin{aligned} w_k^M(\alpha_s) &= \mathfrak{A}_k\left(L = \frac{1}{\alpha_s}\right), & w_k^E(\alpha_s) &= \mathcal{A}_k\left(\frac{1}{\alpha_s}\right), \\ w_k^D(\alpha_s) &= \mathfrak{N}_k\left(\ln \frac{1}{r^2\Lambda^2} = \frac{1}{\alpha_s}\right), & \dots, \end{aligned} \quad (2.19)$$

соседние элементы внутри коих связаны простыми дифференциальными соотношениями

$$w_{k+1}^R(\alpha_s) = \frac{\alpha_s^2}{k} \frac{dw_k^R(\alpha_s)}{d\alpha_s}, \quad R = E, M, D, \dots, \quad (2.20)$$

⁴⁾Здесь $\mathfrak{N}_k(-\ln r^2\Lambda^2)$ – АТВ-функции в конфигурационном представлении, связанные с $\mathcal{A}_k$ -преобразованием Фурье [19].

вытекающими из формул (2.16) в однопетлевом случае. В то же время функции из различных наборов с одинаковыми номерами связаны между собой интегральными преобразованиями, вытекающими из (2.10). При этом все “евклидовы” функции $w_k^E(\alpha)$ обладают существенной сингулярностью при $\alpha = 0$.

Регулярность поведения АТВ-инвариантного заряда во времениподобной области α_M и его “степеней” $\mathcal{A}_k$ обеспечивается за счет суммирования [20] бесконечного числа пертурбативных вкладов, связанных с π^2 -членами. В свою очередь этот результат π^2 -суммирования в минковской области через интегральное преобразование (2.10) приводит к восстановлению невидимых в исходном разложении ТВ, неаналитических вкладов типа $\exp(-1/(\beta_0\alpha_\mu))$ в евклидовой области. Поэтому евклидовы функции $\mathcal{A}_k$ содержат не только логарифмические, но и степенные по Q^2 вклады.

Заметим, что возникшие выше в “представлении α_s ” наборы функций $\{w_k^R(\alpha_s)\}$ имеют очевидную близость с последовательностями Каприни–Фишера [21], полученными, однако, из других соображений.

2.5. Глобальная АТВ и “искривленное зеркало”. При анализе адронных процессов в различных энергетических областях следует учесть зависимость теоретических результатов от числа активных кварковых ароматов n_f . В работах [22] был разработан алгоритм гладкой сшивки, основанный на восходящем к работам Боголюбова массивном ренормгрупповом формализме. Этот алгоритм был использован для анализа эволюции бегущего заряда при $3\text{ГэВ} < Q < 100\text{ГэВ}$ [23].

В безмассовых схемах часто применяется процедура сшивки бегущего заряда на “евклидовых порогах” [24]. Такой способ, очевидно, нарушает гладкость евклидовой функции, а следовательно, не поддерживает и его аналитичность.

Метод АТВ открывает новую возможность согласованного описания областей, отвечающих различному числу активных кварковых ароматов n_f [25], [26]. Отправляясь от обычной сшивки, определяют спектральные плотности $\rho(\sigma, n_f)$, которые затем используют в формулах (2.6) и (2.11). При этом свойство аналитичности евклидовых функций не нарушается, а минковские функции оказываются кусочно-гладкими. В результате возникают “глобальные” АТВ-функции, которые “знают” о всех кварковых порогах.

На рис. 3а, взятом из работы [26], показан глобальный АТВ-заряд в евклидовой и минковской областях. Рис. 3б демонстрирует “искривленное зеркало”, отражающее близкое, но не симметричное поведение евклидовых и минковских функций. Здесь для сравнения с высшими функциями АТВ-разложения $\mathcal{A}_k(Q^2)$ и $\mathcal{A}_k(s)$ приведены кривые, отвечающие степеням первых АТВ-функций.

2.6. Возможности развития минимальной АТВ. Как уже отмечалось, сформулированная версия АТВ не содержит каких-либо новых параметров по сравнению с обычной РГ-улучшенной ТВ КХД. Будем называть ее *минимальной*. Буквальное применение минимальной АТВ в области достаточно низких энергий (порядка Λ) не может представляться бесспорным. Напомним, что при таких масштабах также становятся существенными массы кварков. В этой ситуации вполне естественны попытки модификации минимальной АТВ, содержащие новые параметры.

Рис. 3. а) глобальные евклидова и минковская функции связи КХД для $\Lambda^{(3)} = 350$ МэВ; б) “искривленное зеркало”, демонстрирующее асимметричное поведение евклидовых и минковских функций.

Упомянем здесь так называемую “синтетическую” модификацию, исследованную в работах [27]. В этом случае функция связи усиливается в ИК-области за счет введения дополнительного параметра, что позволяет обсуждать связь с потенциальной кварковой моделью. Другие варианты привлекают эффективные массы партонов, модифицируют спектральное представление путем введения нижнего предела, от-

вечающего двухпиконному порогу [28]; были предложены также более формальные способы модификации минимальной АТВ в области низких энергий [29].

Отметим, что для численных оценок можно использовать результаты работ [14], в которых также представлены выражения для инвариантных функций разложения в терминах функции Ламберта. Ввиду сложности подобных выражений удобно использовать на практике простые приближенные формулы. Впервые простое явное выражение для евклидовой функции КХД было предложено в работе [30] в виде однопараметрической модели

$$\mathcal{A}_{\text{mod}}^{(2)}(Q^2) = \frac{1}{\beta_0} \left[\frac{1}{l_2(a)} + \frac{1}{1 - \exp(l_2(a))} \right], \quad (2.21)$$

представляющей однопетлевое выражение с модифицированным логарифмом

$$l_2 = l + \frac{\beta_1}{2\beta_0^2} \ln(l^2 + a\pi^2), \quad l = \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2}, \quad (2.22)$$

где $a = 4$. Недавно эта модель получила существенное развитие. Было показано [31], что иной выбор параметра $a = 2$ позволяет описать как евклидовы, так и минковские АТВ-функции трехпетлевого приближения $\mathcal{A}_k, \mathfrak{A}_k, k = 1, 2, 3$, в диапазоне выше 1 ГэВ с точностью, достаточной для описания данных всех экспериментов. Должным образом модифицированные рекуррентные соотношения приводят к простым выражениям “однопетлевой” структуры (2.17) для высших функций. Это позволяет без каких-либо технических затруднений использовать новую модель с подстановкой (2.22) при анализе современных данных. В работе [31] она была успешно применена к анализу инклюзивного Υ -распада. Там было показано, что узким местом теоретической обработки достаточно точных данных опыта становится вопрос выбора шкалы.

3. ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Аналитический подход был с успехом использован для описания многих адронных процессов. Литература, посвященная применению АТВ, достаточно обширна и мы не ставим задачу полного ее обзора, а отметим лишь наиболее важные результаты.

3.1. Инклюзивный распад τ -лептона. Единственным лептоном, масса которого достаточно велика для того, чтобы имели место адронные моды распада, является τ -лептон. Многочисленные данные по инклюзивному распаду τ -лептона в адроны, полученные с высокой для адронной физики точностью, предоставляют “естественный полигон” для тестирования низкэнергетической КХД.

Почему при описании τ -распада важна аналитичность? Поясним это на примере. Исходной измеряемой и анализируемой теоретически величиной является интеграл от мнимой части корреляционной функции

$$R_\tau = \frac{2}{\pi} \int_0^{M_\tau^2} \frac{ds}{M_\tau^2} \left(1 - \frac{s}{M_\tau^2} \right)^2 \left(1 + 2 \frac{s}{M_\tau^2} \right) \text{Im } \Pi(s), \quad (3.1)$$

связанный с временем жизни τ -лептона. Из опыта эта величина известна с точностью порядка 1 %. Теоретический расчет R_τ затруднен тем, что интервал интегрирования в (3.1) включает в себя область малых значений s , в которой приближения стандартной ТВ перестают работать, а интеграл в (3.1) при параметризации $\text{Im } \Pi(s)$ сингулярной $\bar{\alpha}_s$ просто перестает существовать. Для преодоления этой трудности обычно, используя аналитические свойства коррелятора $\Pi(s)$, переходят к контурному интегралу в комплексной плоскости переменной s :

$$R_\tau = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|s|=M_\tau^2} \frac{ds}{s} \left(1 - \frac{s}{M_\tau^2}\right)^3 \left(1 + \frac{s}{M_\tau^2}\right) D(-s), \quad (3.2)$$

где $D(-s)$ – функция Адлера, определенная согласно (2.8). Такое преобразование можно осуществить, если метод поддерживает требуемые аналитические свойства коррелятора. Именно это и выполняется в АТВ. Описанию инклюзивного распада τ -лептона в адроны посвящены работы [32], [33].

3.2. Процесс (e^+e^-) -аннигиляции в адроны. Процесс (e^+e^-) -аннигиляции на основе АТВ был рассмотрен в работах [34]. По ряду причин отношение $R(s)$ измеряемых адронного и лептонного сечений не является удобным объектом для теоретического анализа. Мы приведем здесь результаты, полученные на основе аналитического подхода, для введенной в [35] так называемой “сглаженной” функции $R_\Delta(s)$. Параметр Δ характеризует минимальное “безопасное” расстояние в комплексной плоскости, на которое можно приблизиться к разрезу, не столкнувшись с проблемами теоретического описания резонансной области.

Функция $R_\Delta(s)$ записывается в виде

$$R_\Delta(s) = \frac{1}{2i} [\Pi(s + i\Delta) - \Pi(s - i\Delta)] \quad (3.3)$$

с некоторым конечным значением Δ . “Экспериментальная” кривая, соответствующая (3.3), может быть определена, если, воспользовавшись дисперсионным соотношением для $\Pi(q^2)$, переписать выражение (3.3) через измеряемое отношение $R(s)$:

$$R_\Delta(s) = \frac{\Delta}{\pi} \int_0^\infty ds' \frac{R(s')}{(s - s')^2 + \Delta^2}. \quad (3.4)$$

Подставив сюда экспериментальные данные и заменив $R(s)$ на $R_{\text{exp}}(s)$ с некоторым, неизвестным из опыта, теоретическим ультрафиолетовым “хвостом”, можем получить так называемую “экспериментальную” кривую для $R_\Delta(s)$. В результате интегрирования (3.4) происходит сглаживание резонансной структуры $R(s)$. Второй удобной для сравнения функцией является уже упомянутая функция Адлера D с евклидовым аргументом Q^2 . “Экспериментальная” кривая для $D(Q^2)$ получается так же, как и для $R_\Delta(s)$.

Сравнение результатов аналитического подхода (на рисунках использован индекс АА) с экспериментальными кривыми демонстрируется на рис. 4 и 5. На рис. 4 приведена также кривая, полученная в [36] на основе оптимизации схемной зависимости пертурбативного приближения третьего порядка согласно так называемому принципу минимальной чувствительности (PMS). Из этой же работы взята и экспериментальная кривая. Следует подчеркнуть, что несмотря на численную близость

Рис. 4. “Сглаженная” функция $R_{\Delta}(q^2)$ в сравнении с результатами PMS-оптимизации и АТВ.

Рис. 5. “Экспериментальная” функция $D_{\Delta}(Q^2)$ в сравнении с вариантами АТВ.

результатов, полученных на основе АТВ и путем RMS-оптимизации зависимости от выбора схемы перенормировки, эти подходы мотивированы разными причинами. Ниже мы покажем, что, в отличие от чисто пертурбативной схемы, АТВ-результаты практически оказываются независимыми от схемы, и дополнительная оптимизация схемной зависимости не столь актуальна, как в обычной ТВ. “Экспериментальная” кривая для функции D_Δ на рис. 5 взята из работы [37]. Рис. 4 и 5 демонстрируют хорошее согласие теоретических результатов АТВ со “сглаженными” феноменологическими функциями R_Δ и D_Δ , построенными по данным процесса (e^+e^-) -аннигиляции в адроны.

3.3. Зависимость от схемы перенормировки. Неизбежный обрыв ряда ТВ приводит к известной проблеме зависимости результата от способа перенормировки. Отметим, что не существует каких-либо глубоких соображений для выбора ренормализационного предписания. Зависимость частичной суммы от схемы перенормировки является источником теоретической ошибки при описании экспериментальных данных. В КХД такая неопределенность тем больше, чем меньше значение характерного для процесса энергетического масштаба. Поэтому для анализа устойчивости результата (в рамках какой-либо одной из схем перенормировок) недостаточно исследовать лишь петлевую стабильность, следует также рассмотреть вопрос о схемной устойчивости.

Вопрос схемной стабильности получаемых в АТВ результатов был впервые рассмотрен в [38]. На графике из этой работы (рис. 6) изображена КХД-поправка $r(s)$ к отношению сечений $R(s) \propto 1 + r(s)$ в процессе (e^+e^-) -аннигиляции в адроны, вычисленная в трехпетлевом приближении в различных схемах в ТВ и АТВ. В качестве схем выбраны часто используемая $\overline{\text{MS}}$ -схема и так называемая Н-схема, близкая к первой в смысле индекса сокращений. Детали обсуждения схемной зависимости см. в работе [30].

Рис. 6 демонстрирует, что обычная ТВ в области нескольких ГэВ приводит к значительной неопределенности, обусловленной схемной зависимостью. Метод АТВ кардинальным образом изменяет ситуацию: неопределенность теоретических расчетов значительно уменьшается, так что графики АТВ для разных схем практически сливаются в одну кривую. Та же картина наблюдается и для других процессов (см., например, статью [33], в которой был рассмотрен инклюзивный τ -распад, и работы [39], в которых выполнен анализ правил сумм глубоконеупругого лептон-адронного рассеяния).

3.4. Адронный вклад в g -фактор мюона и в постоянную тонкой структуры. Недавно в работе [40] метод АТВ был применен к описанию ряда физических величин, связанных с R -отношением. Среди этих величин важное место занимает вклад сильных взаимодействий в аномальный магнитный момент мюона, который в лидирующем по $\alpha = \alpha_{\text{QED}}$ порядке имеет вид

$$a_\mu^{\text{had}} = \frac{1}{3} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \int_0^\infty \frac{ds}{s} K(s) R(s), \quad (3.5)$$

где $K(s)$ – известная функция.

Рис. 6. Поведение КХД-поправки к функции $R(s)$ в различных схемах перенормировки для аналитического подхода (AA) и для стандартной теории возмущений (PT).

Адронный вклад в постоянную тонкой структуры α представим в виде

$$\Delta\alpha_{\text{had}}^{(5)}(s) = -\frac{\alpha s}{3\pi} \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{ds'}{s'} \frac{R(s')}{s' - s}. \quad (3.6)$$

Здесь верхний индекс (5) означает, что мы ограничиваемся вкладом пяти кварковых ароматов u , d , s , c и b .

Как и в случае τ -распада, интегрирование в этих выражениях включает область малых энергий, где ТВ неприменима. В работе [40] для вычисления величин (3.5) и (3.6) была использована АТВ, дополненная основанным на непертурбативном решении уравнений Дайсона–Швингера предположением о поведении массовой функции кварков при малых импульсах. Полученное теоретическое значение

$$a_\mu^{\text{had}} = (698 \pm 13) \times 10^{-10} \quad (3.7)$$

хорошо соответствует феноменологическим результатам по определению a_μ^{had} на основе данных по (e^+e^-) -аннигиляции и τ -распаду [41], [42].

Полученная в [40] величина адронного вклада в постоянную тонкой структуры на масштабе массы Z -бозона

$$\Delta\alpha_{\text{had}}^{(5)}(M_Z^2) = (278.2 \pm 3.5) \times 10^{-4} \quad (3.8)$$

хорошо согласуется с оценкой, полученной в работе [42] на основе данных по (e^+e^-) -аннигиляции в адроны:

$$\Delta\alpha_{\text{had}}^{(5)}(M_Z^2) = (275.5 \pm 1.9_{\text{expt}} \pm 1.3_{\text{rad}}) \times 10^{-4}. \quad (3.9)$$

Кроме того, в [40] было показано, что метод АТВ позволяет хорошо описать ряд других величин, например, R_τ^V – характеристику τ -распада в векторном канале и соответствующие τ -данным функции $D_\Delta^\tau(Q^2)$ и $R_\Delta^\tau(s)$.

Рис. 7. Анализ 5-кварковой времениподобной области. Различие в положении АТВ-точек, обозначенных +, и стандартных точек, обозначенных $\circ$ и $\bullet$, обусловлено π^2 -поправками. Сплошная АТВ-кривая соответствует $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{(5)} = 270$ и $\alpha_s(M_Z^2) = 0.124$. Для сравнения приведена стандартная кривая (штрих-пунктир), соответствующая $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{(5)} = 213$ и $\alpha_s(M_Z^2) = 0.118$.

3.5. Некоторые другие применения. В АТВ во времениподобной области (s -канал) наблюдаемые представляются в виде нестепенных разложений по функциям, которые суммируют так называемые π^2 -члены. Анализ s -канальных наблюдаемых, выполненный в [26], привел к следующим выводам. В области энергий выше 50 ГэВ при $n_f = 5$ по сравнению со стандартным 2-петлевым (NLO) анализом у функции связи α_s появляется эффективный положительный сдвиг на величину $\Delta\bar{\alpha}_s \simeq +0.002$. При энергиях порядка $10 \div 50$ ГэВ ($n_f = 5$) величина этого сдвига возрастает: $\Delta\bar{\alpha}_s \simeq +0.003$. В результате возникает новое значение заряда КХД на масштабе массы Z -бозона: $\bar{\alpha}_s(M_Z^2) = 0.124$. Полученные результаты приведены на рис. 7 из статьи [26].

ТАБЛ. 2. Вклады различных порядков в ТВ и АТВ

Процесс	Метод	1-й порядок	2-й порядок	3-й порядок
Правила сумм	ТВ	65.1%	24.4%	10.5%
Гросса-Ллевелина Смита	АТВ	75.7%	20.7%	3.6%
Инклюзивный распад τ -лептона	ТВ	54.7%	29.5%	15.8%
	АТВ	87.9%	11.0%	1.1%

Ряды АТВ по свойствам сходимости выгодно отличаются от пертурбативных разложений. Этот факт демонстрируется в табл. 2, где в качестве примера взяты прави-

ла сумм Гросса–Ллевелина Смита для неупругого лептон-нуклонного рассеяния при $\sqrt{Q^2} \sim 1.76$ ГэВ (евклидова область) и процесс инклюзивного распада τ -лептона ($M_\tau = 1.777$ ГэВ, времениподобная область). Другие примеры содержатся в табл. 2 работы [26].

Для полноты изложения упомянем несколько других применений АТВ. Аналитический заряд был успешно использован в анализе спектроскопии мезонов [43]. Недавний предварительный результат миланской группы состоит в том, что если извлекать форму взаимодействия КХД из спектра масс легких кваркониумов как функцию переданного импульса ниже 1 ГэВ, то полученная кривая хорошо описывается трехпетлевой евклидовой $\alpha_E^{(3)}$ при значениях параметра КХД, близких к мировому среднему⁵⁾.

Евклидова функция связи и нестепенное разложение АТВ были использованы для описания формфактора пион-фотонного перехода с судаковским подавлением [44] и электромагнитных формфакторов [45]. Обнаружено сильное ослабление чувствительности результатов к выбору масштаба факторизации [46] и схемы перенормировки [47].

4. ДАЛЬНЕЙШЕЕ РАЗВИТИЕ АТВ: НЕУПРУГОЕ ЛЕПТОН-АДРОННОЕ РАССЕЯНИЕ

Выше метод АТВ применялся для анализа процессов, которые могут быть описаны в терминах двухточечных функций – корреляторов кварковых токов. Условие аналитичности использовалось в форме представления Челлена–Лемана. Ниже рассматривается процесс неупругого лептон-адронного рассеяния, характеризующийся структурными функциями (двух скалярных аргументов), не обладающими простыми аналитическими свойствами. Тем не менее основополагающая идея конструктивной АТВ-реализации общих принципов локальной КТП оказывается плодотворной и для этого случая.

4.1. Представление Йоста–Лемана. Для процесса неупругого лептон-адронного рассеяния общие принципы теории аккумулируются в интегральном представлении для структурных функций – представлении Йоста–Лемана [48]⁶⁾ (ЙЛ), являющимся строгим результатом аксиоматической КТП. В системе покоя нуклона это представление имеет вид [49]

$$W(\nu, Q^2) = \varepsilon(q_0) \int d\mathbf{u} d\lambda^2 \delta[q_0^2 - (M\mathbf{u} - \mathbf{q})^2 - \lambda^2] \psi(\mathbf{u}, \lambda^2), \quad (4.1)$$

причем носитель обобщенной функции $\psi(\mathbf{u}, \lambda^2)$ сосредоточен на множестве

$$\rho = |\mathbf{u}| \leq 1, \quad \lambda^2 \geq \lambda_{\min}^2 = M^2(1 - \sqrt{1 - \rho^2})^2. \quad (4.2)$$

Для процесса неупругого рассеяния физические значения переменных ν и Q^2 положительны. С целью упрощения формул удобно ввести симметричные по ν функции, для которых будем использовать то же обозначение $W(\nu, Q^2)$. Принимая во внимание вытекающую из ковариантности радиальную симметрию весовой

⁵⁾Мы благодарны проф. Дж. Проспери за эту информацию.

⁶⁾Это представление известно также как представление Йоста–Лемана–Дайсона, см. [4].

функции $\psi(\mathbf{u}, \lambda^2) = \psi(\rho, \lambda^2)$, запишем для них представление ЙЛ в ковариантной форме [30]

$$W(\nu, Q^2) = \int_0^1 d\rho \rho^2 \int_{\lambda_{\min}^2}^{\infty} d\lambda^2 \int_{-1}^1 dz \delta(Q^2 + M^2 \rho^2 + \lambda^2 - 2z\rho\sqrt{\nu^2 + M^2 Q^2}) \psi(\rho, \lambda^2). \quad (4.3)$$

В дальнейшем будем использовать общепринятые обозначения $Q^2 = -q^2$ и $\nu = qP$, где P – импульс адрона, а q – передача импульса.

4.2. Дисперсионное соотношение для амплитуды рассеяния вперед.

Найдем, исходя из представления (4.3), ν -дисперсионное соотношение (ДС) для амплитуды $T(\nu, Q^2)$ виртуального комптоновского рассеяния вперед:

$$T(\nu, Q^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 d\rho \rho^2 \int_{\lambda_{\min}^2}^{\infty} d\lambda^2 \int_{-1}^1 dz \frac{\psi(\rho, \lambda^2)}{Q^2 + M^2 \rho^2 + \lambda^2 - 2z\rho\sqrt{\nu^2 + M^2 Q^2} - i\epsilon}. \quad (4.4)$$

В комплексной плоскости ν^2 функция (4.4) имеет разрез вдоль положительной части вещественной оси, начинающийся со значения $\nu_{\min}^2$, которое определяется условием

$$\sqrt{\nu_{\min}^2 + M^2 Q^2} = \min_{\{\lambda, \rho, z\}} \left| \frac{Q^2 + M^2 \rho^2 + \lambda^2}{2z\rho} \right|, \quad (4.5)$$

что дает $\nu_{\min} = Q^2/2$.

Таким образом, искомое ДС имеет вид⁷⁾

$$T(\nu, Q^2) = \frac{1}{\pi} \int_{Q^4/4}^{\infty} \frac{d\nu_1^2}{\nu_1^2 - \nu^2 - i\epsilon} W(\nu_1, Q^2). \quad (4.6)$$

Аналогичным образом на основе представления ЙЛ (4.1) могут быть найдены ДС нечетных по ν структурных функций.

В терминах бьеркенсовской переменной $x = Q^2/2\nu$ ДС (4.6) принимает вид

$$T(\nu, Q^2) \equiv T(x, Q^2) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{dx_1}{x_1} \frac{1}{1 - (x_1/x)^2} W(\nu_1, Q^2). \quad (4.7)$$

Таким образом, $T(x, Q^2)$ является аналитической функцией комплексной переменной x в плоскости с разрезом по отрезку $-1 \leq x \leq 1$. ДС (4.7) удобно для установления связи с операторным разложением (ОР).

При рассмотрении следствий представления ЙЛ естественной “скейлинговой” переменной оказывается [30], [51] величина

$$s = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{Q^2(Q^2 + 4M^2)}{\nu^2 + M^2 Q^2}}. \quad (4.8)$$

В ее терминах возникает аналогичная (4.7) структура дисперсионного интеграла⁸⁾

$$T(\nu, Q^2) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{ds_1}{s_1} \frac{1}{1 - (s_1/s)^2} W(\nu_1, Q^2). \quad (4.9)$$

⁷⁾ Данная формула обобщает ДС для реального Комптона-эффекта. Сравни, например, с результатом работы [50].

⁸⁾ Заметим, что при использовании иных переменных, например, нахтмановской переменной $\xi = 2x/(1 + \sqrt{1 + x^2 4M^2/Q^2})$, такая структура разрушается.

4.3. Аналитические моменты структурных функций. Для представления ЙЛ естественной скейлинговой переменной, моменты структурных функций по которой обладают “хорошими” аналитическими свойствами, является переменная (4.8), которую полезно также переписать в терминах бьеркеновской переменной x ,

$$s = x \sqrt{\frac{Q^2 + 4M^2}{Q^2 + 4M^2 x^2}}, \quad (4.10)$$

откуда видно, что в физической области процесса переменная s изменяется в пределах от нуля до единицы.

Введенная таким образом переменная s отличается как от бьеркеновской, так и от нахтмановской переменной, которые наиболее часто применяются при анализе процессов глубоконеупругого рассеяния. Однако именно эта переменная приводит к моментам, которые обладают хорошими с позиции аналитического подхода свойствами.

Определяя s -моменты структурных функций

$$\mathcal{M}_n(Q^2) = \frac{1}{(1 + 4M^2/Q^2)^{(n-1)/2}} \int_0^1 ds s^{n-2} W(\nu, Q^2), \quad (4.11)$$

можно получить для них представление Челлена–Лемана

$$\mathcal{M}_n(Q^2) = (Q^2)^{n-1} \int_0^\infty d\sigma \frac{m_n(\sigma)}{(\sigma + Q^2)^n}, \quad (4.12)$$

отражающее их аналитические свойства. Весовая функция $m_n(\sigma)$, имеющая носитель на полуоси $\sigma \geq 0$, может быть выражена через исходную функцию $\psi(\rho, \sigma)$ представления ЙЛ.

Взаимосвязь аналитических моментов (4.11) и x -моментов $M_n(Q^2)$ имеет вид [30]

$$\mathcal{M}_n(Q^2) = \frac{1}{\Gamma[(n+1)/2]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma[k + (n+1)/2]}{k!} \left(-\frac{4M^2}{Q^2}\right)^k M_{n+2k}(Q^2). \quad (4.13)$$

В асимптотической области больших значений переданного импульса Q^2 , когда можно пренебречь степенными поправками вида $1/(Q^2)^n$, x -, s -, а также ξ -моменты, совпадают друг с другом. Вне этой области при рассмотрении вкладов высших twists различие между этими моментами следует принимать во внимание.

Моменты структурных функций (4.11), являясь аналитическими функциями в разрезанной Q^2 -плоскости, представляют собой удобные объекты для использования в рамках аналитического подхода. Свойства аналитичности является следствием общих принципов локальной КТП.

4.4. Связь с операторным разложением. Тожество структур ДС по переменным x и s позволяет установить связь аналитических моментов с разложением произведения операторов токов, которое обычно используется для нахождения Q^2 -эволюции моментов структурных функций.

Моменты структурных функций по переменной x соответствуют тому, что в матричных элементах оператора

$$\langle P | \hat{O}_{\mu_1 \dots \mu_n} | P \rangle \quad (4.14)$$

принимаются во внимание лишь лоренц-структуры вида $P_{\mu_1} \dots P_{\mu_n}$. В этом случае применение ОР для комптоновской амплитуды приводит к разложению по степеням $(qP)/Q^2$, т.е. к разложению по обратным степеням x . Такое же разложение по обратным степеням x можно провести и в дисперсионном интеграле (4.7). Коэффициенты при этом будут определяться x -моментами. Сравнение двух рядов и дает искомую связь x -моментов и ОР.

В общем случае симметричный матричный элемент (4.14) содержит лоренц-структуры вида

$$\{P_{\mu_1} \dots P_{\mu_n}\}, \quad M^2 g_{\mu_i \mu_j} \{P_{\mu_1} \dots P_{\mu_{n-2}}\}, \dots$$

Моменты по переменной ξ соответствуют выбору такого операторного базиса, в котором разложение осуществляется по бесследовым тензорам, т.е. таким, что свертка метрического тензора $g_{\mu_i \mu_j}$ с $\langle P | \hat{O}_{\mu_1 \dots \mu_n} | P \rangle$ по любым двум индексам обращается в нуль.

Дисперсионное представление (4.9) позволяет провести разложение комптоновской амплитуды по обратным степеням переменной s . Если выбрать операторные базисы так, чтобы произвольная свертка тензора $\langle P | \hat{O}_{\mu_1 \dots \mu_n} | P \rangle$ с импульсом нуклона P_{μ_i} обращалась в нуль, то ОР приведет к степенному ряду для амплитуды комптоновского рассеяния вперед с параметром разложения $q_\mu q_\nu (P_\mu P_\nu - g_{\mu\nu} P^2) (q^2)^{-2}$, что отвечает разложению в дисперсионном интеграле (4.9) по обратным степеням s . Тем самым устанавливается связь аналитических моментов структурных функций с ОР. Подчеркнем, что требование ортогональности симметричного тензора $\langle P | \hat{O}_{\mu_1 \dots \mu_n} | P \rangle$ импульсу нуклона P_{μ_i} определяет его лоренц-структуру однозначным образом.

4.5. Эффекты, связанные с массой мишени. Метод ОР был применен в работе [52] для описания эффектов, связанных с массой мишени. Такой подход приводит к так называемому ξ -скейлингу, когда аргументом партонных распределений оказывается нахтмановская переменная ξ . В итоге для структурных функций возникают выражения, которые противоречат спектральному условию. Ситуация здесь напоминает проблему призрачного полюса, когда некоторое приближенное решение задачи находится в конфликте с общими положениями теории.

Решение проблемы нефизических особенностей основывалось на представлении Челлена–Лемана. В рассматриваемом случае противоречия со спектральным условием можно избежать, если строить схему учета массы мишени на основе представления Й.Л. Такой способ действий был реализован в [53]. На рис. 8 представлено отношение структурной функции F_3 , в которой учтены массовые поправки, к партонному распределению при $M^2/Q^2 = 1/2$. Сплошная линия отвечает способу учета эффектов, связанных с массой мишени, в соответствии с представлением Й.Л. Штриховая кривая соответствует методу ξ -скейлинга. Рис. 8 показывает, что в области больших значений x наблюдается заметное различие в поведении массивных структурных функций, полученных в рамках метода ξ -скейлинга и в Й.Л.-методе. Но именно в этой области $x \sim 1$ ξ -подход не согласован со спектральным ограничением. В условиях, когда точность экспериментальных данных постоянно повышается и актуальными становятся задачи об изучении таких тонких эффектов, как высшие

Рис. 8. Отношение структурной функции F_3 , в которой учтены массовые поправки, к партонному распределению для $\epsilon = 1/2$. Сплошная линия отвечает учету эффектов, связанных с массой мишени, на основе представления Й.Л. Штриховая кривая соответствует методу ξ -скейлинга.

твисты, целесообразно в теоретических подходах опираться на методы, согласованные с общими принципами КТП.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Ренорминвариантная ТВ – основной инструмент, служащий как для изучения свойств квантово-полевых моделей, так и для выполнения практических расчетов процессов взаимодействия элементарных частиц. Хорошо известны достижения ТВ в КЭД и в теории электрослабых взаимодействий. Пертурбативная компонента КХД существенна при анализе практически всех адронных процессов. При этом в низкоэнергетической области, когда непертурбативные эффекты становятся существенными, логарифмические вклады, вычисляемые в рамках ТВ, обычно дополняются степенными поправками, имеющими непертурбативную природу. Таким образом, ТВ входит как составная часть в непертурбативные расчеты и, тем самым, влияет на определение (из опытных данных) таких непертурбативных параметров, как, например, вакуумные средние кварковых и глюонных конденсатов.

Перенормированный ряд ТВ содержит большие логарифмы. Их наличие приводит к тому, что даже при малом параметре разложения (константе связи α_μ) члены ряда становятся большими при больших значениях импульсных аргументов. Однако специфика КТП такова, что это пертурбативное разложение не является конечным продуктом, а допускает определенные модификации.

Метод РГ позволяет просуммировать большие логарифмы в коэффициентах ряда ТВ, если сконцентрировать их в новом параметре разложения – инвариантном заряде $\bar{\alpha}_s(Q^2)$. В результате возникают новые пертурбативные приближения, которые имеют вид функциональных рядов по степеням функции $\bar{\alpha}_s(Q^2)$. Инвариантный заряд $\bar{\alpha}_s(Q^2)$, определенный в соответствии с методом РГ, оказывается малым при больших Q^2 , т.е. на малых расстояниях, что отражает важное свойство КХД – асимптотическую свободу, т.е. ослабление взаимодействия кварков и глюонов с уменьшением расстояния. Таким образом, принцип ренорминвариантности, реализованный в методе РГ, позволяет провести такую модификацию рядов ТВ, что полученные в результате разложения обладают вполне приемлемыми свойствами в ультрафиолетовой области (конечно, следует помнить об асимптотическом характере рядов ТВ) и пригодны для практического использования.

Однако на этом этапе модификации ряда ТВ возникают новые проблемы, связанные с тем, что инвариантный заряд имеет нефизические особенности. Такого рода особенности противоречат общим принципам локальной квантовой теории поля. Степенное разложение по $\bar{\alpha}_s(Q^2)$ остается неприменимым при малых энергетических масштабах. При умеренных и важных для применений в КХД масштабах обычные пертурбативные результаты содержат значительный произвол, связанный со схемной зависимостью.

АТВ делает следующий шаг в модификации пертурбативного разложения, в результате которого отмеченные трудности оказываются преодоленными. Принцип ренорминвариантности теперь конструктивным образом дополняется принципом причинности. В случае корреляционной функции кварковых токов этот принцип воплощен в условии аналитичности, которое соответствует спектральному представлению Челлена–Лемана. Для неупругого лептон-адронного рассеяния общие свойства структурных функций выражены в интегральном представлении Йоста–Лемана.

В заключение отметим наиболее важные черты АТВ:

- эффективные евклидов $\alpha_E(Q^2)$ и минковский $\alpha_M(s)$ инвариантные заряды определены согласованно, они свободны от нефизических сингулярностей и не содержат новых параметров; подобным свойством обладают высшие АТВ-функции $\mathcal{A}_k$ и $\mathfrak{A}_k$;
- евклидов инвариантный заряд α_E как функция константы связи α_s обладает существенной особенностью $\exp(-1/\beta_0\alpha_s)$ в начале координат;
- он также имеет инфракрасную стабильную точку $\alpha_E(0) = \alpha_M(0) = 1/\beta_0$, значение которой не зависит от определяемого из опыта масштабного параметра Λ ;
- функциональные инвариантные разложения для наблюдаемых по степеням $\bar{\alpha}_s$ в АТВ заменяются на нестепенные разложения по наборам $\{\mathcal{A}_k(Q^2)\}$ и $\{\mathfrak{A}_k(s)\}$;
- зависимость результатов от трехпетлевых (NNLO) и четырехпетлевых (N^3LO) вкладов, также как и от схемы перенормировки, снижается в АТВ по сравнению с ТВ кардинальным образом.

Завершим статью высказыванием, которое послужило эпиграфом к одной из наших работ:

“Позаботьтесь о Принципах и Принципы позаботятся о Вас”.

Надеемся, что эта мысль созвучна творчеству Анатолия Алексеевича Логунова.

Благодарности. Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 05-01-00992), Программы поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-5362.2006.2), БелРФФИ (грант № F06D-002) и Программы сотрудничества организаций Беларуси и ОИЯИ.

Список литературы

- [1] Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, Д. В. Ширков, *ЖЭТФ*, **37**:3(9) (1959), 805.
- [2] Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *ДАН СССР*, **103** (1955), 391.
- [3] N. N. Bogoliubov, D. V. Shirkov, *Nuovo Cim.*, **3** (1956), 845.
- [4] Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Введение в теорию квантованных полей*, Наука, М., 1957, 1973, 1976, 1986.
- [5] Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, И. Т. Тодоров, *Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля*, Наука, М., 1969; Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, А. И. Оксак, И. Т. Тодоров, *Общие принципы квантовой теории поля*, Наука, М., 1987.
- [6] P. A. M. Dirac, “Theorie du Positron”, *Structure et Propriétés des Noyaux Atomiques*, Septième Conseil du Physique Solvay (Bruxelles, 22–29 October 1933), eds. J. Cockcroft, J. Chadwick, F. Joliot, J. Joliot, et al., Gauthier-Villars, Paris, 1934, 203.
- [7] D. V. Shirkov, I. L. Solovtsov, *JINR Rapid Comm.*, **2**[76] (1996), 5; [hep-ph/9604363](#).
- [8] D. V. Shirkov, I. L. Solovtsov, *Phys. Rev. Lett.*, **79** (1997), 1209; [hep-ph/9704333](#).
- [9] K. A. Milton, I. L. Solovtsov, *Phys. Rev. D*, **55** (1997), 5295; [hep-ph/9611438](#).
- [10] K. A. Milton, I. L. Solovtsov, *Phys. Rev. D*, **59** (1999), 107701; [hep-th/9812171](#).
- [11] Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *ДАН СССР*, **105** (1955), 685.
- [12] J. Schwinger, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **71** (1974), 3024; 5047.
- [13] K. A. Milton, O. P. Solovtsova, *Phys. Rev. D*, **57** (1998), 5402; [hep-ph/9710316](#).
- [14] B. A. Magradze, *Int. J. Mod. Phys. A*, **15** (2000), 2715; [hep-ph/0010070](#); Д. С. Курашев, Б. А. Маградзе, *ТМФ*, **135** (2003), 95; [hep-ph/0104142](#).
- [15] F. J. Dyson, *Phys. Rev.*, **85** (1952), 631.
- [16] D. V. Shirkov, *Lett. Math. Phys.*, **1** (1976), 179; *Lett. Nuovo Cim.*, **18** (1977), 452.
- [17] Д. В. Ширков, *ТМФ*, **40**:3 (1979), 340; D. I. Kazakov, D. V. Shirkov, *Fortsch. Phys.*, **28** (1980), 465.
- [18] Д. В. Ширков, *ТМФ*, **119**:1 (1999), 55; [hep-th/9810246](#); D. V. Shirkov, *Lett. Math. Phys.*, **48** (1999), 135.
- [19] Д. В. Ширков, *ТМФ*, **136**:1 (2003), 3; [hep-th/0210013](#).
- [20] A. V. Radyushkin, *JINR Rapid Comm.*, 1996, № 4[78]-96, 9; [hep-ph/9907228](#); N. V. Krasnikov, A. A. Pivovarov, *Phys. Lett. B*, **116** (1982), 168; J. D. Bjorken, “Two topics in quantum chromodynamics”, *Particle Physics: Cargèse*, 1989, Proc. Cargèse Summer Inst. (Cargèse, France, July 18 – August 4, 1989), NATO Sci. Ser. B, **223**, eds. M. Lévy, J. L. Basdevant, M. Jacob, D. Speiser, Plenum, N.Y., 1990, 217–238.
- [21] I. Caprini, J. Fischer, *Phys. Rev. D*, **62** (2000), 054007; [hep-ph/0002016](#); *Eur. Phys. J. C*, **24** (2002), 127; [hep-ph/0110344](#).
- [22] D. V. Shirkov, *Nucl. Phys. B*, **371**:1, 2 (1992), 467; Д. В. Ширков, *ТМФ*, **93**:3 (1992), 466.
- [23] D. V. Shirkov, S. V. Mikhailov, *Z. Phys. C*, **63** (1994), 463; [hep-ph/9401270](#).
- [24] W. J. Marciano, *Phys. Rev. D*, **29** (1984), 580.
- [25] Д. В. Ширков, *ТМФ*, **127** (2001), 3; [hep-ph/0012283](#).
- [26] D. V. Shirkov, *Eur. Phys. J. C*, **22** (2001), 331; [hep-ph/0107282](#).
- [27] A. I. Alekseev, B. A. Arbuzov, *Mod. Phys. Lett. A*, **13** (1998), 1747; [hep-ph/9704228](#); **20** (2005), 103; [hep-ph/0411339](#); А. И. Алексеев, *ТМФ*, **145**:2 (2005), 221; [hep-ph/0511215](#).
- [28] A. V. Nesterenko, J. Papavassiliou, *J. Phys. G*, **32** (2006), 1025; [hep-ph/0511215](#).

- [29] G. Cvetic, C. Valenzuela, I. Schmidt, *A modification of minimal analytic QCD at low energies*, [hep-ph/0508101](#); G. Cvetic, C. Valenzuela, *J. Phys. G*, **32** (2006), L27; [hep-ph/0601050](#).
- [30] И. Л. Соловцов, Д. В. Ширков, *ТМФ*, **120**:3 (1999), 482; [hep-ph/9909305](#).
- [31] Д. В. Ширков, А. В. Заякин, “Аналитическая теория возмущений для практиков и распад ипсилония”, *ЯФ*, Принято к печати; [hep-ph/0512325](#).
- [32] О. П. Соловцова, *Письма в ЖЭТФ*, **64** (1996), 664; K. A. Milton, I. L. Solovtsov, O. P. Solovtsova, *Phys. Lett. B*, **415** (1997), 104; [hep-ph/9706409](#); О. П. Соловцова, *ТМФ*, **134**:3 (2003), 416; K. A. Milton, O. P. Solovtsova, *Int. J. Mod. Phys. A*, **17**:26 (2002), 3789.
- [33] K. A. Milton, I. L. Solovtsov, O. P. Solovtsova, V. I. Yasnov, *Eur. Phys. J. C.*, **14** (2000), 495; [hep-ph/0003030](#).
- [34] D. V. Shirkov, I. L. Solovtsov, “ e^+e^- annihilation at low energies in analytic approach to QCD”, *Proc. Int. Workshop on (e^+e^-) Collisions from ϕ to J/Ψ* (Novosibirsk, Russia, 1–5 March, 1999), eds. G. V. Fedotov, S. I. Redin, 2000, 122; [hep-ph/9906495](#); K. A. Milton, I. L. Solovtsov, O. P. Solovtsova, *Phys. Rev. D*, **64** (2001), 016005; [hep-ph/0102254](#).
- [35] E. C. Poggio, H. R. Quinn, S. Weinberg, *Phys. Rev. D*, **13** (1976), 1958.
- [36] A. C. Mattingly, P. M. Stevenson, *Phys. Rev. D*, **49** (1994), 437; [hep-ph/9307266](#).
- [37] S. Eidelman, F. Jegerlehner, A. L. Kataev, O. Veretin, *Phys. Lett. B*, **454** (1999), 369; [hep-ph/9812521](#).
- [38] I. L. Solovtsov, D. V. Shirkov, *Phys. Lett. B*, **442** (1998), 344; [hep-ph/9711251](#).
- [39] K. A. Milton, I. L. Solovtsov, O. P. Solovtsova, *Phys. Lett. B*, **439** (1998), 421; [hep-ph/9809510](#); *Phys. Rev. D*, **60** (1999), 016001; [hep-ph/9809513](#).
- [40] K. A. Milton, I. L. Solovtsov, O. P. Solovtsova, *Mod. Phys. Lett. A*, **21** (2006), 1355; [hep-ph/0512209](#).
- [41] M. Davier, S. Eidelman, A. Höcker, Z. Zhang, *Eur. Phys. J. C*, **31** (2003), 503; [hep-ph/0308213](#); A. Höcker, “The hadronic contribution to the muon $g - 2$ ”, *Proc. 32 Int. Conf. on High-Energy Physics (ICHEP’04)*, v. 2 (Beijing, China, 16–22 August, 2004), eds. H. Chen, D. Du, W. Li et al., World Scientific, Singapore, 2005, 710; [hep-ph/0410081](#); G. W. Bennett et al. (Muon $g - 2$ Collab.), *Phys. Rev. Lett.*, **92** (2004), 161802; [hep-ex/0401008](#); A. Czarnecki, *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)*, **144** (2005), 201.
- [42] K. Hagiwara, A. D. Martin, D. Nomura, T. Teubner, *Phys. Rev. D*, **69** (2004), 093003; [hep-ph/0312250](#).
- [43] M. Baldicchi, G. M. Prosperi, *Phys. Rev. D*, **66** (2002), 074008; [hep-ph/0202172](#); *AIP Conf. Proc.*, **756** (2005), 152; [hep-ph/0412359](#).
- [44] N. G. Stefanis, W. Schroers, H.-Ch. Kim, *Eur. Phys. J. C*, **18** (2000), 137; [hep-ph/0005218](#).
- [45] A. P. Bakulev, K. Passek-Kumericki, W. Schroers, N. G. Stefanis, *Phys. Rev. D*, **70** (2004), 033014; Erratum, 079906; [hep-ph/0405062](#).
- [46] A. P. Bakulev, A. I. Karanikas, N. G. Stefanis, *Phys. Rev. D*, **72** (2005), 074015; [hep-ph/0504275](#).
- [47] N. G. Stefanis, A. P. Bakulev, A. I. Karanikas, S. V. Mikhailov, *Fractional analytic perturbation theory in QCD and exclusive reactions*, [hep-ph/0601270](#).
- [48] R. Jost, H. Lehmann, *Nuovo Cim.*, **5** (1957), 1598.
- [49] Н. Н. Боголюбов, В. С. Владимиров, А. Н. Тавхелидзе, *ТМФ*, **12**:3 (1972), 305.
- [50] Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *ДАН СССР*, **113** (1957), 529.
- [51] B. Geyer, D. Robaschik, E. Wiczorek, *Fortschr. Phys.*, **27** (1979), 75; Б. Гайер, Д. Робашик, Э. Вичорек, *ЭЧАЯ*, **11**:1 (1980), 132.
- [52] H. Georgi, H. D. Politzer, *Phys. Rev. D*, **14** (1976), 1829.
- [53] I. L. Solovtsov, *Part. Nucl. Lett.*, **4**[101] (2000), 10.