Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Александров, А. Д. Миронов, А. Ю. Морозов, *М-теория матричных моделей*, *ТМФ*, 2007, том 150, номер 2, 179–192

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf5972>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 14:24:50

© 2007 г.

А. С. Александров*, А. Д. Миронов*[†],
А. Ю. Морозов*

M-ТЕОРИЯ МАТРИЧНЫХ МОДЕЛЕЙ

Малые M -теории объединяют различные модели, представляющие единое семейство, таким же образом, как M -теория объединяет множество суперструнных моделей. Мы рассматриваем эту идею в приложении к семейству картановских матричных моделей: их M -теория объединяет различные ветви эрмитовой матричной модели (в том числе статистические суммы Дийкграафа–Вафы) с τ -функцией Концевича. Более того, соответствующие соотношения дуальности напоминают разложения по инстантонам и меронам, известные в теории Янга–Миллса.

Ключевые слова: теория струн, матричные модели, дуальность.

1. ВВЕДЕНИЕ

Подход теории струн¹⁾ к анализу моделей КТП содержит следующие семь шагов.

1. Конкретная модель КТП обычно определена как пертурбативное разложение вокруг заданного “классического” внешнего поля.

2. Теория возмущений в большинстве случаев определена через корреляторы, которые являются *гауссовыми* интегралами. Это, как обычно, приводит к двум следствиям. Одно, хорошее, заключается в том, что имеет место теорема Вика и работает мощная диаграммная техника. Другое, плохое, в том, что ряд теории возмущений, как следует из стандартного рассуждения Дайсона, асимптотически расходится. Это связано с разложением в ряд подынтегральных выражений без учета их асимптотик и, следовательно, без учета нетривиальной структуры фаз/ветвей²⁾.

¹⁾Мы используем этот термин в духе работы [1] как название современной версии общей квантовой теории поля (КТП) с многочисленными применениями, среди которых различные суперструнные модели запланковской физики являются важными, но не исчерпывающими примерами.

²⁾Некоторые более хитрые негауссовы разложения с весами, диктуемыми действиями с доминантными неквадратичными членами, уже стоят в повестке дня (различные подходы к этому вопросу обсуждаются в работах [2]), но еще далеки от практической реализации.

*Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.
E-mail: al@itep.ru, morozov@itep.ru

[†]Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия.
E-mail: mironov@itep.ru, mironov@lpi.ru

3. Расходящиеся ряды теории возмущений часто могут быть представлены в виде асимптотических рядов “разложения по родам” по единому параметру – “постоянной Планка”. При этом конкретные члены разложения по родам являются *сходящимися* рядами по другим многочисленным параметрам теории возмущений (называемым константами связи или временами).

4. В непertурбативные статистические суммы дают вклады различные “классические” внешние поля, и каждый вклад сопровождается собственным рядом теории возмущений.

Сделав эти четыре шага, мы получаем представление непertурбативной статистической суммы, т.е. единственного объекта, имеющего объективное физическое значение, в виде специального *трехкратного* разложения: разложения по “классическим” внешним полям, асимптотического квазиклассического разложения (по родам) в окрестности каждого внешнего поля и представления каждого члена разложения по родам в виде сходящегося ряда по степеням констант связи. На самом деле, границы между тремя уровнями иерархии определены плохо: изменения переменных интегрирования легко приводят к перемешиванию уровней. Что еще хуже, для заданного тройного разложения (для которого обычно можно вычислить лишь первые члены) довольно сложно понять структуру глобально определенной непertурбативной статистической суммы. Вне всяких сомнений она является настоящей функцией, а не просто формальным рядом, но обладает сложной аналитической структурой с многочисленными ветвлениями и (часто) существенными особенностями, что делает ряды теории возмущений многочисленными, расходящимися и запутанными. Следующие три шага нацелены на исправление сложившегося положения.

5. Из трех уровней наивысший – сумма по внешним полям – понят хуже всего. Он часто формулируется на языке “инстантонов”. Идея заключается в том, что эта сумма имеет свою собственную иерархическую структуру, и бесконечно много членов в сумме некоторым образом выражаются через многоинстантонные конфигурации (которые, вероятно, могут быть построены из одноинстантонных путем действия нескольких операторных генераторов). Замечательные реализации этой идеи существуют как на уровне обычной квантовой механики [3], так и в четырехмерной КТП в суперсимметричной версии (где пертурбативные вклады искусственно обращаются в нуль) [4].

6. Однако, как хорошо известно, инстантонное исчисление едва ли является исчерпывающим, соответствующие генераторы (если таковые вообще существуют) должны строиться из элементарных составляющих – *меронов* [5], [6]³⁾. Также остается плохо изученным (как почти всё в физике меронов) участие меронов в распре-

³⁾В теории Янга–Миллса с этим связана некоторая загадка: инстантон Янга–Миллса может быть описан как процесс рождения и уничтожения монополь-антимонполюной пары. Расщепление инстантона в два мерона используется для разделения вкладов этих индивидуальных квазичастиц, что, возможно, позволит описать конденсацию монополей в адекватных переменных. Таким образом, меронное исчисление должно играть центральную роль в механизме конфинмента [5]. В то же время в АДХМ-конструкции [7] роль меронов совершенно неясна.

делении ролей между суммами по внешним полям и по родам, т.е. между двумя верхними уровнями тройного разложения.

7. Различные типы разложений, возникающие при использовании различных моделей КТП на шаге 1, объединяются на непертурбативном уровне в глобальную статсумму. Поскольку она объединяет *a priori* различные модели, то заслуживает отдельного имени: сегодня ее часто называют *М-теорией*. Являясь истинным результатом *функционального интегрирования*, глобальная статсумма наследует скрытые симметрии [8] (возникающие из-за свободы в выборе переменных интегрирования и дающие нетривиальные обобщения симметрий типа тождеств Уорда): она принадлежит к узкому классу τ -функций [9], удовлетворяющих мистическим с физической точки зрения квадратичным соотношениям [8], [10]. Принято говорить, что модели, возникающие в различных пределах на пространстве констант связи (когда та или иная конфигурация внешних полей дает доминирующие вклады), связаны *дуальностью*: иногда, но не всегда, преобразования дуальности образуют малую группу (не обязательно Z_2 или $SL(2)$, некоторые дуальности могут выглядеть как *триальности* и т.д., вообще говоря, малой группы может вовсе не быть). Включая все более и более членов теории возмущений, мы увеличиваем *М-теорию* и в конце концов приходим к объединяющей все “теории всего” (называвшейся в [1] теорией струн), в которой любые две модели КТП “дуальны” в том смысле, что сложные корреляторы, вычисленные в одной из них, аналитическим продолжением связываются с другими сложными корреляторами в другой. Можно, однако, остановиться на промежуточном шаге: ограничив классы корреляторов (к примеру, полиномами полей), мы приходим к *М-теории* для достаточно малых многообразий моделей КТП.

Задачей настоящей статьи является краткое введение в *М-теорию* обычных *картановских* матричных моделей [8]. Она основана на нашей недавней работе [11], в которой предложен универсальный вывод значительных результатов, касающихся связей между *a priori* различными матричными моделями (моделью Концевича [12], комплексной матричной моделью [13], [14] и эрмитовой моделью [15], [16] с ее многочисленными фазами [17], включающими решение Дийкграафа–Вафы [18] и другие ветви [19]). Эти результаты, получены в последнее десятилетие [20]–[22] и основаны на длительном изучении картановских матричных моделей с того момента, когда они были впервые введены Дайсоном в 1962 г. [15].

Соотношения дуальности связывают статсуммы эрмитовой матричной модели и модели Концевича. Третья важная картановская модель в той же *М-теории* – менее популярная, но тем не менее важная *комплексная* матричная модель со статсуммой $Z_C(t)$. На самом деле, дуальность выражает $Z_C(t)$ через $Z_K(\tau)$ [11], где $Z_K(\tau)$ обозначает простейшую концевичевскую ветвь статсуммы обобщенной модели Концевича (ОМК) (о дуальностях между различными ветвями ОМК см. [23]).

Подобно эрмитовой модели комплексная матричная модель имеет много фаз (ветвей), отличающихся сдвигом времен. Мы резервируем обозначение $Z_C(t)$ для простейшей гауссовой фазы комплексной модели, а $Z_G(t)$ – для гауссовой фазы эрмитовой модели.

Другие модели, особенно очень важная унитарная модель, рассмотренная в работе [24], вероятно, могут быть также включены в эту M -теорию матричных моделей. Во избежание недоразумения напомним, что термин “ M -теория” был введен в [25] для универсального описания зоопарка моделей суперструн. Прогресс этой суперструнной M -теории возродил интерес к старой точке зрения на теорию струн в духе теории ландшафта [26] (см., например, [1], [27]) и в конце концов обеспечил повышенное внимание к теории струн *per se*, безотносительно к ее частным приложениям, даже таким важным, как объединение всех фундаментальных взаимодействий и всех космологических сценариев. Рассмотренная в настоящей статье M -теория матричных моделей не имеет прямой связи с суперструнной M -теорией (которая также использует технику матричных моделей [28]). Хотя они подобны математически и физически (это то, что делает наше исследование важным), но имеют дело с совершенно различными физическими теориями: очень маленькой, даже не содержащей временной эволюции (но допускающей детальное и строгое описание) и чрезвычайно большой, достаточной, чтобы включить весь наш мир вместе с многообразием всех других миров, воображаемых и невообразимых.

2. ЗООПАРК ДУАЛЬНОСТЕЙ МАТРИЧНЫХ МОДЕЛЕЙ

2.1. Основные инстантонные и меронные разложения. Статсумма эрмитовой модели имеет много фаз (ветвей), некоторые из них нумеруются двумя функциями $W(\xi)$ и $f(\xi)$ [17], [19], и это приводит к обозначению $Z_{W,f}(t)$. Эти фазы выделены существованием специального разложения по родам (разложения ’т Хоофта), где род – это действительно род ленточных графов Фейнмана–’т Хоофта. Лидирующие (сферические) члены этого разложения известны как статсуммы Дийкграафа–Вафы [18]. Лучше всего изучена гауссова фаза $Z_G(t)$, ассоциированная с $W(\xi) = M\xi^2/2$ и $f(\xi) = 4MS = \text{const}$. Здесь $S = Ng$, а N – размер эрмитовой матрицы. Гауссова фаза $Z_G(t)$ является τ -функцией цепочки Тоды [16], в то время как другие $Z_{W,f}(t)$ суть τ -функции менее известных иерархий.

Для полиномиальных W и f фаза $Z_{W,f}$ может быть выражена через гауссову фазу $Z_G(t)$, подобно тому как многоинстантонная статсумма должна бы выражаться через одноинстантонную. Если производная $W'(\xi)$ – полином степени n по ξ , $W'(\xi) = \prod_{i=1}^n (\xi - \xi_i)$, то

$$Z_{W,f}(t) = \widehat{U}_{W|G}(t | t^{(1)}, \dots, t^{(n)}) \left\{ \bigotimes_{i=1}^n Z_G^{(i)}(t^{(i)}) \right\}, \quad (1)$$

где времена $t^{(i)}$ получены из t сдвигами, так что они описывают разложение в окрестности экстремума ξ_i полинома $W(\xi)$, а параметры M_i и N_i в $Z_G^{(i)}$ связаны с $W''(\xi_i)$ и $f(\xi_i)$, см. детали в работах [17], [19], [22]. Оператор $\widehat{U}(t | t^{(1)}, \dots, t^{(n)})$ сплетает элементарные составляющие, такие сплетающие операторы появляются во всех соотношениях дуальности. Все эти операторы имеют очень специальный вид, типичный для операторов Вейля–Мояла [27], [29] и их обобщений в духе Баталина–Вилковисского [30]: они являются квадратичными экспонентами от времен t и/или производных по временам.

Однако, формула разложения (1) – это только начало. Подобно тому как инстантоны Янга–Миллса представляют собой два мерона, гауссова статсумма $Z_G(t)$ раскладывается в две τ -функции Концевича $Z_K(\tau)$ [11]:

$$Z_G(t) = \hat{U}_{G|K}(t | \tau_{\pm}) \{Z_K(\tau_+) \otimes Z_K(\tau_-)\}, \quad (2)$$

где переменные $\tau_{\pm}$ могут быть выражены через t множеством способов (для частного случая соотношения между t и $\tau_{\pm}$ эта формула была впервые предложена в [14] и аккуратно выведена в [20]). Соответствующее меронное разложение существует для других ветвей, описываемых полиномом W степени $n + 1$:

$$Z_{W,f}(t) = \hat{U}_{W|K}(t | \tau_{\pm}^{(1)}, \dots, \tau_{\pm}^{(n)}) \left\{ \bigotimes_{i=1}^n (Z_K^{(i)}(\tau_+^{(i)}) \otimes Z_K^{(i)}(\tau_-^{(i)})) \right\}. \quad (3)$$

Однако в отличие от (2) эта формула не полностью исследована в [11], оператор $\hat{U}_{W|K}$ еще не построен явно, а соотношение

$$\hat{U}_{W|G} \bigotimes_{i=1}^n \hat{U}_{G|K}^{(i)} = \hat{U}_{W|K} \quad (4)$$

также требует прямого вывода. Полная теория операторов Вейля–Мояла и стоящих за ней $*$ -структур [11] еще должна быть построена.

2.2. Полиномиальное представление (моменты как переменные). Фазы $Z_G(t)$ и $Z_K(\tau)$ инвариантны относительно некоторой ограниченной замены переменных [11]:

$$Z_G(t) = U_{G|G}(t | \tilde{t}) Z_G(\tilde{t}), \quad (5)$$

$$Z_K(\tau) = U_{K|K}(\tau | \tilde{\tau}) Z_K(\tilde{\tau}). \quad (6)$$

В этих формулах сплетающие операторы $U_{G|G}$ и $U_{K|K}$ не содержат производных по времени: они зависят только от времен, и мы не пишем *шляпки* над ними. Как и во всех предыдущих случаях, мы не выписываем весьма длинные формулы для преобразований времен явно (они могут быть найдены в [11]). В (5) и (6) эти преобразования линейны и зависят от двух свободных параметров. Однако эти параметры могут сами быть заданы как *произвольные* функции времен, и двухпараметрические семейства *линейных* преобразований генерируют бесконечно большие (но все еще специальные) семейства *нелинейных* преобразований. Более того, среди этих нелинейных преобразований имеется одно, которое значительно упрощает $Z_G(t)$ и $Z_K(\tau)$, а именно такое, что все члены в разложении по родам, за исключением двух первых, оказываются *полиномами* по временам. Мы обозначаем этот специальный выбор переменных как $\bar{t}$ и $\bar{\tau}$, и при этом

$$\bar{Z}_G(t) = \bar{Z}_G(\bar{t}), \quad (7)$$

$$\bar{Z}_K(\tau) = \bar{Z}_K(\bar{\tau}). \quad (8)$$

В этих формулах $\bar{Z}$ определена следующим образом: если $\ln Z = \sum_{p \geq 0} g^{2p-2} F_p$ есть разложение по родам для Z , то $\ln \bar{Z} = \sum_{p \geq 2} g^{2p-2} \bar{F}_p$, и все $\bar{F}_p$ с $p \geq 2$ суть *полиномы* от переменных $\bar{t}$ или $\bar{\tau}$ (степень которых растет с ростом p). Поскольку в (5) и (6) сплетающие операторы являются *функциями* и, как следствие, содержат в этом случае только члены с g^{-2} и g^0 в показателе экспоненты, они не появляются в (7) и (8). Эти формулы – лучшая из возможных иллюстраций шага 3 введения: вклады данного рода не просто сходятся, в подходящих координатах они являются полиномами.

Нужно сразу оговориться, что, в то время как (8) верно для обычного разложения по родам (разложения 'т Хоофта), в (7) подразумевается другое – *петлевое* – разложение [11]. Полиномиальные координаты существуют в гауссовом случае [31] и для разложения 'т Хоофта, причем соответствующие переменные известны как *моменты*, но в отличие от (7) аналогичное соотношение

$$Z_G(t) = \hat{U}_{G|АСКМ}(t | \mu) Z_{АСКМ}(\mu) \quad (9)$$

имеет дело с новой статсуммой $Z_{АСКМ}(\mu)$: вклады родов с $p \geq 2$ в $\ln Z_{АСКМ}(\mu)$ – это полиномы по μ , но $Z_{АСКМ}$ и Z_G – разные функции⁴⁾.

3. ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВОЙ ПОДХОД

Статсуммы картановских матричных моделей лучше всего определяются как векторы старшего веса в специальных модулях Верма алгебр Вирасоро, т.е. они являются собственными векторами их максимальных (борелевских) подгрупп:

$$\hat{L}_-^I Z_I = 0. \quad (10)$$

Здесь $I = G, K, C$, вирасоровские петлевые операторы задаются формулами

$$\begin{aligned} \hat{L}_-^G(z) &= \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{dz^2}{z^{n+2}} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} k t'_k \frac{\partial}{\partial t_{k+n}} + g^2 \sum_{a+b=n} \frac{\partial^2}{\partial t_a \partial t_b} \right\}, \\ \hat{L}_-^K(z) &= \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{dz^2}{z^{n+2}} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left(k + \frac{1}{2} \right) \tau'_k \frac{\partial}{\partial \tau_{k+n}} + g^2 \sum_{a+b=n-1} \frac{\partial^2}{\partial \tau_a \partial \tau_b} \right\} + \\ &\quad + \frac{1}{16g^2} \tau_0^2 \delta_{n,-1} + \frac{1}{16} \delta_{n,0}, \\ \hat{L}_-^C(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{dz^2}{z^{n+2}} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} k t'_{2k} \frac{\partial}{\partial t_{2k+2n}} + g^2 \sum_{a+b=n} \frac{\partial^2}{\partial t_{2a} \partial t_{2b}} \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

В этих формулах

$$t'_k = -\frac{1}{2} M \delta_{k,2} + t_k, \quad \tau'_k = -\frac{2}{3} M \delta_{k,1} + \tau_k, \quad (12)$$

⁴⁾Во избежание недоразумений представим тривиальный пример, иллюстрирующий разницу между (5) и (9):

$$\sin t = \sin \bar{t} = \frac{\mu - \mu^{-1}}{2i},$$

где $\bar{t} = t + 2\pi$ и $\mu = e^{it}$. Первое равенство – модель для (5) с общей функцией $Z(\cdot) = \sin(\cdot)$, в то время как второе равенство связывает две *различные* функции $\sin(\cdot)$ и $\frac{(\cdot) - (\cdot)^{-1}}{2i}$.

$Z_{W,f}$ удовлетворяет уравнению

$$\hat{L}_-^W Z_{W,f} = 0, \quad (13)$$

где $\hat{L}_-^W(z)$ отличается от $\hat{L}_-^G(z)$ только сдвигом: для $W(\xi)$ общего вида это может быть записано как

$$\sum_k k t'_k \xi^{k-1} = -W'(\xi) + \sum_k k t_k \xi^{k-1}. \quad (14)$$

Функция $f(\xi)$ параметризует в терминах формальных рядов разные решения этого петлевого уравнения, обладающие разложением 'т Хоофта по родам. В гауссовом случае, когда $W(\xi) = M\xi^2/2$, она сводится к $f(\xi) = 4MS = \text{const}$.

Ожидается, что подобные представления существуют для общих непертурбативных статсумм (хотя даже подходящие аналоги алгебр Вирасоро еще не известны для большинства случаев). Таким образом, адекватный формализм *нелинейных* реализаций симметрий обладает универсальной важностью. Реализации нелинейны из-за *сдвигов* времен в уравнениях Вирасоро. Чтобы понять структуру и симметрии (дуальности) собственных векторов в нелинейных представлениях, стоит начать с простейших примеров, с обычных операторов вместо петлевых. Мы вернемся к матричным моделям в разделе 5.

4. ПРИМЕРЫ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕАЛИЗАЦИЙ СИММЕТРИЙ

В этом разделе x, y, z, t, τ будут играть роль времен t и τ предыдущих разделов.

4.1. Группа $\mathbb{R}^* \otimes SO(2)$. Рассмотрим $SO(2)$ -инвариантные функции Z_N на вещественной плоскости $\mathbb{R}^2$, которые реализуют представление группы умножений на вещественные числа веса N :

$$\begin{aligned} \left(y' \frac{\partial}{\partial x} - x' \frac{\partial}{\partial y} \right) Z_N &= 0, \\ \left(x' \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} \right) Z_N &= N Z, \end{aligned} \quad (15)$$

где сдвинутые переменные $x' = R \cos \phi = x + r$, $y' = R \sin \phi = y$ параметризуют вещественную плоскость. Поскольку нет центрального расширения, в качестве максимальной подалгебры в этом случае может быть взята полная алгебра.

Теперь можно использовать две различные стратегии, чтобы найти Z_N . Прежде всего, можно просто заметить, что $SO(2)$ -инвариантные функции на вещественной плоскости $\mathbb{R}^2$ зависят только от радиальной переменной R , а второе уравнение в (15) – условие однородности – подразумевает, что Z_N пропорциональна R^N . Основная тонкость здесь связана со сдвигом координат $(x', y') \rightarrow (x, y)$: $SO(2)$ -симметрия, линейно реализованная в координатах (x', y') , ($\phi \rightarrow \phi + \alpha$), реализуется нелинейно в координатах (x, y) , отвечающих сдвинутому началу координат.

Таким образом, “статсумма” имеет вид

$$Z_N = \text{const} \cdot R^N \sim \left(1 + \frac{2x}{r} + \frac{x^2 + y^2}{r^2} \right)^{N/2}. \quad (16)$$

Другой возможный способ вычисления – сконструировать решение уравнений (15) как степенной ряд по x и y , нормированный так, чтобы он начинался с единицы:

$$Z_N(x, y) = \left(1 + \frac{2x}{r} + \frac{x^2 + y^2}{r^2}\right)^{N/2} = 1 + \frac{N}{r}x + \frac{N(N-1)}{2r^2}x^2 + \frac{N}{2r^2}y^2 + \dots \quad (17)$$

Коэффициенты этого ряда могут быть рекуррентно определены из (15) (это единственный путь построения решений, доступный в матричных моделях).

Чтобы сравнить два этих подхода, можно заметить, что имеется следующее тождество: для любого α

$$Z(x, y) = Z(-r(1 - \cos \alpha) + x \cos \alpha + y \sin \alpha, -r \sin \alpha - x \sin \alpha + y \cos \alpha). \quad (18)$$

Проверим его для степенных рядов:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{N}{r}(-r(1 - \cos \alpha) + x \cos \alpha + y \sin \alpha) + \frac{N(N-1)}{2r^2}(-r(1 - \cos \alpha) + \\ + x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 + \frac{N}{2r^2}(-r \sin \alpha - x \sin \alpha + y \cos \alpha)^2 + \dots = \\ = 1 + \frac{N}{r}x + \frac{N(N-1)}{2r^2}x^2 + \frac{N}{2r^2}y^2 + \dots, \end{aligned} \quad (19)$$

где обе части равенства должны пониматься как степенные ряды по x, y и α . К примеру, члены без x и y дают

$$\begin{aligned} -N(1 - \cos \alpha) + \frac{1}{2}N \sin^2 \alpha + \frac{1}{2}N(N-1)(1 - \cos \alpha)^2 + \dots = \\ = \frac{N}{2} \left(\sin^2 \alpha - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 4 \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \dots \right) + \frac{N^2}{2} \left(4 \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \dots \right) + \dots \end{aligned} \quad (20)$$

Для $\alpha = \pi/2$ получаем

$$Z_N(x, y) = Z_N(-r + y, -r - x). \quad (21)$$

Это простейшее равенство, если знать, что Z – функция от $(r+x)^2 + y^2$, но оно является крайне нетривиальным тождеством для формальных рядов, если их суммы явно не известны.

4.2. T -дуальность. Гораздо ближе к матричным моделям лежит следующий пример⁵⁾:

$$\left(t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) Z = 0. \quad (22)$$

Заменой переменной $t = e^{i\tau}$ это уравнение преобразуется в уравнение теплопроводности/Шредингера (среди прочего это $(t - \tau)$ -соотношение подчеркивает “неестественность” разложений по целым степеням t , разложение в окрестности точки $t = 0$ не слишком хорошее с точки зрения уравнения теплопроводности)

$$\left(-i \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) Z = 0 \quad (23)$$

⁵⁾Простой одномерный пример, который очень близок к случаю матричных моделей, рассматривался в [32].

с общим решением

$$Z(x | \tau) = \int e^{ipx} e^{ip^2 \tau} c(p) dp = \int t^{p^2} e^{ipx} c(p) dp. \quad (24)$$

В этом примере с двумя переменными очевидно, что (23) определяет $Z(x | \tau)$ неоднозначно, и решения параметризуются функцией $c(p)$, являющейся аналогом $f(\xi)$ в $Z_{W,f}$.

Частные решения уравнения теплопроводности включают:

- тепловое ядро на комплексной прямой (вещественной плоскости)

$$Z_1(x | \tau) = \sqrt{\frac{i\pi}{\tau}} e^{-ix^2/4\tau}, \quad c_1(p) = 1; \quad (25)$$

- квазипериодическую θ -функцию Якоби (на самом деле, $\theta = \theta_{00}$, но далее мы опускаем нижний индекс)

$$Z_2(x | \tau) = \theta\left(\frac{x}{2\pi} \middle| \frac{\tau}{\pi}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in^2 \tau} e^{inx}, \quad c_2(p) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(p - n); \quad (26)$$

- тепловое ядро на торе

$$Z_3(x | \tau) = \sqrt{\frac{i\pi}{\tau}} e^{-ix^2/4\tau} \theta\left(\frac{x}{2\tau} \middle| -\frac{\pi}{\tau}\right) = \sqrt{\frac{i\pi}{\tau}} e^{-ix^2/4\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\pi^2 n^2 / \tau} e^{i\pi n x / \tau}, \quad (27)$$

в этом случае функция $c_3(p)$, ассоциированная с Z_3 , совпадает с $c_2(p)$, что является следствием T -дуальности, которая означает, что

$$Z_2(x | \tau) = Z_3(x | \tau). \quad (28)$$

Обычно T -дуальность трактуют как *трансцендентное* соотношение, выведенное, к примеру, с помощью пуассоновского трюка с пересуммированием рядов. Однако можно представить *все* решения уравнения теплопроводности, включая Z_1 , Z_2 и Z_3 , как линейные комбинации перемасштабированных полиномов Эрмита $\text{He}_n(x | \tau) \equiv (-i\tau)^{n/2} H_n\left(\frac{ix}{2\sqrt{-i\tau}}\right)$ (где через H_n мы обозначили стандартные полиномы Эрмита),

$$\begin{aligned} \text{He}_0(x | \tau) &= 1, & \text{He}_1(x | \tau) &= ix, & \text{He}_2(x | \tau) &= 2i\tau - x^2, \\ \text{He}_3(x | \tau) &= -6x\tau - ix^3, & \text{He}_4(x | \tau) &= -12\tau^2 - 12ix^2\tau + x^4, & \dots, \end{aligned}$$

поскольку такие полиномы являются решениями уравнения теплопроводности. Тогда соотношения между различными статсуммами становятся запутанными, но *элементарными* алгебраическими соотношениями.

К примеру, в представлении (24)

$$e^{ip^2 \tau} e^{ipx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n}{n!} \text{He}_n(x | \tau), \quad (29)$$

в то время как для того чтобы получить разложение дуального представления по полиномам Эрмита, надо сдвинуть переменную $\tau \rightarrow \tau' = T + \tau$ и раскладывать по обратным степеням T . Вначале разложим таким способом Z_1 ⁶⁾:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{-ix^2/4\tau} &\longrightarrow \frac{1}{\sqrt{T}} \left(1 + \frac{\tau}{T}\right)^{-1/2} \exp\left\{-i\left(\frac{x^2}{4}\right) \frac{1}{T} \left(1 + \frac{\tau}{T}\right)^{-1}\right\} = \\ &= \sum_{m \geq 0} \frac{i^m}{4^m T^{m+1/2}} \frac{\text{He}_{2m}(x | \tau)}{m!}. \end{aligned} \quad (30)$$

Теперь для получения дуального представления нужно сдвинуть в этой формуле x на q и получить⁷⁾

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{-ix^2/4\tau} e^{iqx/\tau} e^{-iq^2/\tau} &\longrightarrow \sum_{m \geq 0} \frac{i^m}{4^m T^{m+1/2}} \frac{\text{He}_{2m}(x - 2q | \tau)}{m!} = \\ &= \sum_{k, m \geq 0} i^{m-k} \frac{(2q)^k}{T^{m+1/2}} \frac{\Gamma(m + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{\text{He}_{2m-k}(x | \tau)}{k!(2m-k)!}. \end{aligned} \quad (31)$$

На языке уравнения теплопроводности T -дуальность утверждает, что

$$\begin{aligned} \left(\frac{e^{-ix^2/4\tau}}{\sqrt{\tau}}\right)^{-1} \left(-i \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \frac{e^{-ix^2/4\tau}}{\sqrt{\tau}} &= -i \frac{\partial}{\partial \tau} \Big|_{x=\text{const}} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{ix}{\tau} \frac{\partial}{\partial x} = \\ &= \frac{1}{\tau^2} \left\{ -i \frac{\partial}{\partial(-1/\tau)} \Big|_{x/\tau=\text{const}} + \frac{\partial^2}{\partial(x/\tau)^2} \right\}. \end{aligned} \quad (32)$$

Соответственно для каждого решения $Z(x | \tau)$ уравнения теплопроводности T -дуальная функция

$$\tilde{Z}(x | \tau) = \frac{e^{-ix^2/4\tau}}{\sqrt{\tau}} Z\left(\frac{x}{\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}\right) \quad (33)$$

также является решением.

5. ПОДХОД, ИСПОЛЬЗУЮЩИЙ ПОНЯТИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В случае условий Вирасоро известна только нелинейная реализация алгебры симметрий; координаты, в которых она реализуется линейно, остаются загадкой. Это известно как проблема *истинных* переменных в теории струн, которая остается

⁶⁾Эта формула – частный случай знаменитой формулы Меллера (см. равенство (10.13.22) в книге [33])

$$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \exp\left(\frac{2xyz - (x^2 + y^2)z^2}{1-z^2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^n H_n(x) H_n(y).$$

⁷⁾Для вывода этой формулы достаточно заметить, что для полиномов Эрмита

$$\frac{\partial H_n(x | \tau)}{\partial x} = in H_{n-1}.$$

нерешенной на всех уровнях – от квантовой гравитации и полной теории струн до матричных моделей. Таким образом, дуальности, описанные уравнениями (1)–(9), при нашем современном уровне знаний остаются нетривиальными, как было бы нетривиальным соотношение (21), представленное в виде (19), без знания (16). Следовательно, эти дуальности должны быть каким-нибудь образом *выведены*. В [11] мы проделали это при помощи дополнительной структуры: рассматривая различные петлевые операторы $\hat{L}_-^I$ как различные асимптотики единого *глобального* петлевого оператора, определенного на вспомогательной *спектральной римановой поверхности*. Можно верить, что та же техника будет адекватной для всех М-теорий, нужно просто найти подходящие спектральные многообразия...

Определение глобального петлевого оператора в действительности включает несколько подструктур [11]. Три из них имеют универсальную важность, но мы формулируем их в терминах матричных моделей, где спектральный параметр z – просто одна комплексная переменная. Эти подструктуры следующие.

1. Выбор спектральной кривой Σ , на которой принимает значения петлевой параметр z (z лежит не просто на комплексной плоскости, $z \in \Sigma$, и Σ может быть нетривиальной комплексной кривой; эта кривая является разветвленным накрытием *затравочной* кривой Σ_0 , которая может быть либо римановой сферой (с проколами), либо комплексным тором).

2. Выбор алгебры типа Кричевера–Новикова [34], которой принадлежат петлевые операторы $\hat{L}(z)$. Он определяется выбором *структурной алгебры* (алгебры Виасоро в случае картановских матричных моделей) и допустимыми сингулярностями на затравочной спектральной кривой Σ_0 (в случае алгебры Виасоро допустимы полюсы и ветвления второго порядка, в случае W_n -алгебр допустимы ветвления с порядком, кратным n).

3. Выбор борелевской подалгебры $\hat{L}_-(z)$, которая имеет нетривиальные собственные векторы; в терминах спектральных многообразий эта *минус-проекция* может быть представлена интегральным оператором:

$$\hat{L}_-(z) = \oint_C K(z, z') \hat{L}(z'). \quad (34)$$

Конкретные операторы $\hat{L}_-^I(z)$ возникают из глобального оператора $\hat{L}_-(z)$ в окрестностях конкретных сингулярностей. Полюсы ассоциированы с $\hat{L}_-^G$, ветвления второго порядка – с $\hat{L}_-^K$ и $\hat{L}_-^C$ (если бы структурной алгеброй была W_n с ветвлениями старшего порядка, должны были бы возникать более общие τ -функции ОМК). Соотношения дуальности (1)–(3) возникают, когда контур C в (34) разлагается в комбинацию контуров, окружающих разные сингулярности. Большинство аналитических замен спектральной переменной $z \rightarrow \tilde{z}(z)$, $\partial\tilde{z}/\partial z = 0$ нарушают структуру минус-проекции, но некоторые ее сохраняют и приводят к тождествам типа (5)–(9).

В случае картановских матричных моделей имеется две дополнительные подструктуры [11], которые по меньшей мере упрощают теорию, но возможно, также имеют более общее значение. Они отражают существование формализма свободных полей на римановых поверхностях и, таким образом, важны для непертурбативных статсумм (τ -функций), ассоциированных с двумерными конформными моделями.

4. Алгебра Вирасоро может быть погружена в универсальную обертывающую алгебры Каца–Муди при помощи конструкции Сугавары [35], и это вложение $\hat{L}(z) = :\hat{J}(z)^2:$ может быть продолжено на алгебры Кричевера–Новикова (случаю матричных моделей отвечает простейшая алгебра Каца–Муди $\widehat{U}(1)$, но все остается справедливым для непертурбативных статсумм, ассоциированных со всеми другими алгебрами Каца–Муди; это наиболее прямое обобщение нашей конструкции).

5. Для того чтобы сконструировать ядро

$$K(z, z') = \frac{\Omega_{SW}(z)}{\Omega_{SW}(z')} \langle \partial \phi(z) \phi(z') \rangle = \Omega_{SW}(z) k(z, z') \quad (35)$$

в (34) из коррелятора свободных полей на спектральной кривой, можно использовать дополнительную структуру Зайберга–Виттена [36], 1-форму со специальными свойствами. На самом деле можно использовать это ядро, чтобы определить умножение токов Каца–Муди:

$$(\hat{J} \star \hat{J})(z) = \oint_C k(z, z') : \hat{J}(z')^2 : \quad (36)$$

которое играет большую роль в “струнной теории поля” [37] и/или в приведенном в работах [38] “не зависящем от внешних полей” описании M -теории в матричных моделях в духе подхода работ [39].

Благодарности. А. Александров благодарен Н. Амбург за полезные обсуждения и В. Побережному за теплое гостеприимство. Работа была частично поддержана Федеральной Программой Министерства промышленности, науки и технологий РФ (грант № 40.052.1.1.1112), РФФИ (грант № 03-02-17373 (А. Александров), № 04-02-16538а (А. Д. Миронов), № 04-02-16880 (А. Ю. Морозов)), Программой поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-8004.2006.2), проектом NWO 047.011.2004.026, ИНТАС (грант № 05-1000008-7865) и проектом ANR-05-BLAN-0029-01 “Геометрия и интегрируемость в математической физике”.

Список литературы

- [1] А. Ю. Морозов, *УФН*, **162**:1 (1992), 83.
- [2] J. Boháčik, P. Prešnajder, *Nonperturbative approach to (Wiener) functional integral with ϕ^4 interaction*, [hep-th/0507129](#); *Functional integral with ϕ^4 term in the action beyond standard perturbative methods*, [hep-th/0503235](#); V. Dolotin, A. Morozov, *Introduction to non-linear algebra*, [hep-th/0609022](#); *Algebraic geometry of discrete dynamics. The case of one variable*, [hep-th/0501235](#).
- [3] S. Coleman, “The uses of instantons”, *The whys of subnuclear physics*, Proc. Int. School Subnuclear Phys. (Erice, Sicily, 1977), ed. A. Zichichi, Plenum, N.Y., 1979, 805; А. И. Вайнштейн, В. И. Захаров, В. А. Новиков, М. А. Шифман, *УФН*, **136**:4 (1982), 553; P. Putrov, *Path integral in energy representation in quantum mechanics*, [hep-th/0605169](#).
- [4] N. A. Nekrasov, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **7** (2004), 831; [hep-th/0206161](#); R. Flume, R. Poghossian, H. Storch, *Mod. Phys. Lett. A*, **17** (2002), 327; R. Flume, R. Poghossian, *Int. J. Mod. Phys. A*, **18** (2003), 2541.
- [5] C. Callan, R. Dashen, D. Gross, *Phys. Rev. D*, **17** (1978), 2717.
- [6] A. D. Mironov, A. Morozov, T. N. Tomaras, *ЖЭТФ*, **128** (2005), 381.

- [7] M. Atiyah, V. Drinfeld, N. Hitchin, Yu. Manin, *Phys. Lett. A*, **65** (1978), 185.
- [8] А. Ю. Морозов, *УФН*, **164** (1994), 3; А. Morozov, *Matrix models as integrable systems*, [hep-th/9502091](#); *Challenges of matrix models*, [hep-th/0502010](#); А. Mironov, *Int. J. Mod. Phys. A*, **9** (1994), 4355; А. Д. Миронов, *ЭЧАЯ*, **33** (2002), 1051.
- [9] А. Gerasimov, S. Khoroshkin, D. Lebedev, А. Mironov, А. Morozov, *Int. J. Mod. Phys. A*, **10** (1995), 2589; А. Mironov, А. Morozov, L. Vinet, *ТМФ*, **100** (1994), 119; S. Kharchev, А. Mironov, А. Morozov, *ТМФ*, **104** (1995), 129; А. Mironov, *Quantum deformations of τ -functions, bilinear identities and representation theory*, [hep-th/9409190](#); А. Д. Миронов, *ТМФ*, **114** (1998), 163.
- [10] А. Morozov, *Identities between quantum field theories in different dimensions*, [hep-th/9810031](#); K. Saraikin, *Abelian varieties, RCFTs, attractors, and Hitchin functional in two dimensions*, [hep-th/0604176](#).
- [11] А. Alexandrov, А. Mironov, А. Morozov, *Instantons and merons in matrix models*, [hep-th/0608228](#).
- [12] М. Л. Концевич, *Функци. анализ и его прилож.*, **25:2** (1991), 50; S. Kharchev, А. Marshakov, А. Mironov, А. Morozov, А. Zabrodin, *Nucl. Phys. B*, **380** (1992), 181; *Phys. Lett. B*, **275** (1992), 311; S. Kharchev, А. Marshakov, А. Mironov, А. Morozov, *Nucl. Phys. B*, **397** (1993), 339; *Mod. Phys. Lett. A*, **8** (1993), 1047; *Int. J. Mod. Phys. A*, **10** (1995), 2015; P. Di Francesco, C. Itzykson, J.-B. Zuber, *Comm. Math. Phys.*, **151** (1993), 193.
- [13] Ю. М. Makeenko, *Письма в ЖЭТФ*, **52** (1990), 885; J. Ambjorn, J. Jurkiewicz, Yu. Makeenko, *Phys. Lett. B*, **251** (1990), 517; T. Morris, *Nucl. Phys. B*, **356** (1991), 703; А. Anderson, R. C. Meyers, V. Periwal, *Phys. Lett. B*, **254** (1991), 89.
- [14] Yu. Makeenko, А. Marshakov, А. Mironov, А. Morozov, *Nucl. Phys. B*, **356** (1991), 574.
- [15] F. J. Dyson, *J. Math. Phys.*, **3** (1962), 140; M. L. Mehta, *Random Matrices*, Academic Press, Boston, MA, 1991; E. Brézin, C. Itzykson, G. Parisi, J.-B. Zuber, *Comm. Math. Phys.*, **59** (1978), 35; D. Bessis, *Comm. Math. Phys.*, **69** (1979), 147; D. Bessis, C. Itzykson, J. B. Zuber, *Adv. Appl. Math.*, **1** (1980), 109; C. Itzykson, J.-B. Zuber, *J. Math. Phys.*, **21** (1980), 411.
- [16] А. Gerasimov, А. Marshakov, А. Mironov, А. Morozov, А. Orlov, *Nucl. Phys. B*, **357** (1991), 565.
- [17] А. Alexandrov, А. Mironov, А. Morozov, *Int. J. Mod. Phys. A*, **19** (2004), 4127; *Fortschr. Phys.*, **53** (2005), 512; А. С. Александров, А. Д. Миронов, А. Ю. Морозов, *ТМФ*, **142** (2005), 419.
- [18] R. Dijkgraaf, C. Vafa, *Nucl. Phys. B*, **644** (2002), 3; 21; *A perturbative window into non-perturbative physics*, [hep-th/0208048](#); L. Chekhov, А. Mironov, *Phys. Lett. B*, **552** (2003), 293; H. Itoyama, А. Morozov, *Nucl. Phys. B*, **657** (2003), 53; *Phys. Lett. B*, **555** (2003), 287; *Progr. Theor. Phys.*, **109** (2003), 433; *Int. J. Mod. Phys. A*, **18** (2003), 5889; L. Chekhov, А. Marshakov, А. Mironov, D. Vasiliev, *Phys. Lett. B*, **562** (2003), 323; Л. О. Чехов, А. В. Маршаков, А. Д. Миронов, Д. Васильев, *Тр. МИАН*, **251** (2005), 265; [hep-th/0506075](#).
- [19] А. Alexandrov, А. Mironov, А. Morozov, *Int. J. Mod. Phys. A*, **21** (2006), 2481; [hep-th/0412099](#).
- [20] L. Chekhov, *Matrix models and geometry of moduli spaces*, [hep-th/9509001](#).
- [21] I. K. Kostov, *Conformal field theory techniques in random matrix models*, [hep-th/9907060](#).
- [22] G. Bonnet, F. David, B. Eynard, *J. Phys. A*, **33** (2000), 6739; А. Klemm, M. Mariño, S. Theisen, *JHEP*, **03** (2003), 051; А. Givental, *Int. Math. Res. Notices*, **2001** (2001), 1265; [math.AG/0008067](#).
- [23] S. Kharchev, А. Marshakov, *Int. J. Mod. Phys. A*, **10** (1995), 1219; А. Mironov, *On GKM description of multi-criticality in 2d gravity*, FIAN/TD/16-92, FIAN, М., 1992.

- [24] V. Periwal, D. Shevitz, *Phys. Rev. Lett.*, **64** (1990), 1326; *Nucl. Phys. B*, **344** (1990), 731; M. Bowick, A. Morozov, D. Shewitz, *Nucl. Phys. B*, **354** (1991), 496; S. Kharchev, A. Mironov, *Int. J. Mod. Phys. A*, **7** (1992), 4803; A. Mironov, A. Morozov, G. Semenoff, *Int. J. Mod. Phys. A*, **10** (1995), 2015.
- [25] P. Horava, E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **460** (1996), 506.
- [26] M. R. Douglas, *JHEP*, **05** (2003), 046.
- [27] A. Gerasimov, D. Lebedev, A. Morozov, *Int. J. Mod. Phys. A*, **6** (1991), 977.
- [28] T. Banks, W. Fischler, S. H. Shenker, L. Susskind, *Phys. Rev. D*, **55** (1997), 5112.
- [29] H. Weyl, *Z. Phys.*, **46** (1927), 1; Г. Вейль, *Теория групп и квантовая механика*, Наука, М., 1986; J. E. Moyal, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **45** (1949), 99.
- [30] I. A. Batalin, G. A. Vilkovisky, *Phys. Lett. B*, **102** (1981), 27; *Phys. Rev. D*, **28** (1983), 2567; Erratum, **30** (1984), 508; I. A. Batalin, E. S. Fradkin, *Phys. Lett. B*, **122** (1983), 157; Б. Л. Воронов, И. В. Тюгин, *ТМФ*, **50** (1982), 333; A. Schwarz, *Comm. Math. Phys.*, **155** (1993), 249; **158**, 373; A. Losev, V. Lysov, A. Gorodentsev, “On BV and Berkovits theory”, *Dombay seminars on Berkovits theory* (Dombay, 2003, unpublished); D. Krotov, A. Losev, A. Gorodentsev, *Quantum field theory as effective BV theory from Chern–Simons*, [hep-th/0603201](#).
- [31] J. Ambjorn, L. Chekhov, Yu. Makeenko, *Phys. Lett. B*, **282** (1992), 341; J. Ambjorn, L. Chekhov, C. F. Kristjansen, Yu. Makeenko, *Nucl. Phys. B*, **404** (1993), 127; Erratum, **449** (1995), 681.
- [32] А. Д. Миронов, *ТМФ*, **146** (2006), 77.
- [33] H. Bateman, *Higher transcendental functions*, vol. II, McGraw-Hill, New York–Toronto–London, 1953.
- [34] И. М. Кричевер, С. П. Новиков, *Функц. анализ и его прилож.*, **21:2** (1987), 46; **21:4** (1987), 47; **23:1** (1989), 24; R. Dick, *Global expansion of holomorphic differentials on punctured Riemann surfaces*, Preprint DESY-89-160, DESY, Hamburg, 1989; *Lett. Math. Phys.*, **18** (1989), 255; M. Schlichenmaier, *Lett. Math. Phys.*, **19** (1990), 151; 327; A. Ruffing, T. Deck, M. Schlichenmaier, *Lett. Math. Phys.*, **26** (1992), 23; [hep-th/9207088](#); A. Beilinson, V. Schechtman, *Comm. Math. Phys.*, **118** (1988), 651; A. Morozov, *Phys. Lett. B*, **196** (1987), 325.
- [35] V. G. Knizhnik, A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys. B*, **247** (1984), 83.
- [36] N. Seiberg, E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **426** (1994), 19; A. Gorsky, I. Krichever, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, *Phys. Lett. B*, **355** (1995), 466; A. Marshakov, *Seiberg–Witten theory and integrable systems*, World Scientific, Singapore, 1999; *Integrability: The Seiberg–Witten and Whitham equations*, eds. H. W. Braden, I. Krichever, Gordon and Breach, Amsterdam, 2000; A. Gorsky, A. Mironov, *Integrable many-body systems and gauge theories*, [hep-th/0011197](#).
- [37] E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **268** (1986), 253; B. Zwiebach, *Phys. Lett. B*, **256** (1991), 22; *Mod. Phys. Lett. A*, **7** (1992), 1079; *Ann. Physics*, **267** (1998), 193; *Closed string field theory: an introduction*, [hep-th/9305026](#).
- [38] E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **276** (1986), 291; *Quantum background independence in string theory*, [hep-th/9306122](#); A. Sen, B. Zwiebach, *Nucl. Phys. B*, **414** (1994), 649; **423** (1994), 580; *Comm. Math. Phys.*, **177** (1996), 305; A. Gerasimov, S. Shatashvili, *JHEP*, **06** (2001), 066.
- [39] B. Eynard, *JHEP*, **11** (2004), 031; L. Chekhov, B. Eynard, *JHEP*, **03** (2006), 014; [hep-th/0504116](#).