Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. М. Боголюбов, Перечисление плоских разбиений и алгебраический анзац Бете, *ТМФ*, 2007, том 150, номер 2, 193–203

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf5973>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 15:13:24

© 2007 г.

Н. М. Боголюбов*

ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ПЛОСКИХ РАЗБИЕНИЙ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ АНЗАЦ БЕТЕ

Установлена связь точно решаемой бозонной модели с плоскими разбиениями – трехмерными диаграммами Юнга, заключенными в ящик конечного размера, что позволяет представить производящие функции разбиений как корреляционные функции интегрируемой модели и вывести формулы МакМагона для перечисления разбиений с помощью квантового метода обратной задачи.

Ключевые слова: интегрируемые модели, анзац Бете, плоские разбиения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование переходов из заданного начального состояния в заданное конечное является одной из основных задач статистической физики. Для интегрируемых моделей эта проблема эффективно решается с помощью алгебраического анзаца Бете квантового метода обратной задачи [1], [2]. Связь между определенными матричными элементами матрицы перехода точно решаемой бозонной модели и плоскими разбиениями – трехмерными диаграммами Юнга, заключенными в ящик конечного размера, – была установлена в работе [3].

Плоские разбиения естественно возникают как в теории кристаллов [4] и прямого протекания [5], так и в теории случайных блужданий по решеткам [6]. Сравнительно недавно обсуждалась возможная связь топологических струн на многообразиях Калаби–Яо с таянием кристаллов [7].

Перечисление плоских укладок является классической проблемой комбинаторики [8], [9] и теории симметрических функций [10]. Статистика плоских разбиений по отношению к естественным вероятностным мерам изучалась в работах [11]; корреляционные функции случайных плоских разбиений вычислялись в работе [12].

Фазовая модель, имеющая отношение к плоским разбиениям, определяется как предел при $q \rightarrow \infty$ введенной в работах [13] интегрируемой q -бозонной модели, корреляционные функции которой вычислялись в статье [14]. Интерпретация векторов

---

*Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: bogoliub@pdmi.ras.ru

состояния модели с произвольным параметром q в терминах алгебры симметрических функций была проведена в работе [15], а для фазовой модели – в статьях [3] и [16].

В настоящей работе мы покажем, что производящая функция плоских разбиений, заключенных в прямоугольный ящик со сторонами L , N , M , выражается через формфакторы фазовой модели.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 мы даем основные определения плоских разбиений, в разделе 3 описывается интегрируемая бозонная модель. В четвертом разделе исследуются скалярные произведения векторов состояния и формфакторы операторов уничтожения и устанавливается их связь с проблемой перечисления плоских разбиений. Выражение векторов состояния через симметрические функции Шура и вывод производящей функции симметричных плоских разбиений дается в разделе 5.

2. ПЛОСКИЕ РАЗБИЕНИЯ

Разбиением $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$ называется последовательность $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$ неотрицательных целых чисел λ_j , которые называются частями разбиения λ .

Плоское разбиение является двумерным обобщением обычного разбиения. Плоское разбиение π – набор неотрицательных целых чисел π_{ij} , удовлетворяющих условию $\pi_{ij} \geq \pi_{i+1j}$ и $\pi_{ij} \geq \pi_{ij+1}$ для всех $i, j \geq 1$. Каждый столбец или каждая строка плоского разбиения являются обычными разбиениями. Симметричные плоские разбиения – такие плоские разбиения, для которых $\pi_{ij} = \pi_{ji}$. Целые числа π_{ij} называются частями плоского разбиения.

Диаграмму плоского разбиения можно представить себе как множество единичных кубов, установленных один над другим, т.е. как трехмерную диаграмму Юнга. Высота столбца с координатами ij равна π_{ij} . Объем разбиения $|\pi|$ равен сумме всех кубов диаграммы $|\pi| = \sum \pi_{ij}$. Считается, что плоское разбиение заключено в прямоугольный ящик с длинами сторон L , N , M , если $\pi_{ij} \leq M$ для всех i, j , причем $\pi_{ij} = 0$ всегда, когда $i > L$ или $j > N$; такое плоское разбиение называется плоским разбиением в ящике. Допустив, что некоторые из разбиений могут быть пустыми, можно представить плоское разбиение внутри ящика $L \times N \times M$ как $(N \times N)$ -матрицу (без ограничения общности можно положить $N > L$) с матричными элементами последних $K = N - L$ строк, равными нулю: $\pi_{jm} \equiv 0$ для $j \geq L$.

Диаграмма плоского разбиения, соответствующая матрице

$$\pi = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

представлена на рис. 1.

Рис. 1. Плоское разбиение с градиентными линиями.

Плоское разбиение, помещенное в ящик $L \times N \times M$, может быть представлено в виде набора путей по квадратной решетке размера $2N \times (1 + M)$. Рассмотрим сперва разбиение внутри ящика $N \times N \times M$. Плоское разбиение соответствует набору из N путей по квадратной решетке размера $2N \times (1 + M)$. Первые N столбцов (считая слева) имеют номера $(-N, \dots, -1)$, а последние $N - (1, \dots, N)$. Путь с номером m идет из левой нижней $(-N + m - 1; 0)$ вершины к правой верхней $(m; M)$ и всегда направлен либо на север, либо на восток. Число квадратов в последующих колонках j решетки (начиная с правой) под соответствующим m -м путем можно рассматривать как матричные элементы π_{jm} плоского разбиения π . Только один путь допустим на вертикальных ребрах решетки (это правило соответствует условию $\pi_{jm} \geq \pi_{j+1,m}$), но любое число путей может следовать по горизонтальным. То, что пути всегда направлены на север и восток, эквивалентно условию $\pi_{jm} \geq \pi_{j+1,m}$.

Плоское разбиение, помещенное в ящик $L \times N \times M$ ($N > L$), может быть представлено как набор описанных выше путей по квадратной решетке того же размера $2N \times (1 + M)$ с дополнительным условием, что первый путь ($m = 1$) направлен только вдоль нулевой строки решетки вплоть до вершины $(-N + K; 0)$.

Набор путей, представленный на рис. 2, соответствует изображенному на рис. 1 плоскому разбиению и, следовательно, матрице (1).

В соответствии с классической формулой МакМагона число плоских укладок, помещенных в ящик $L \times N \times M$, равно

$$A(L, N, M) = \prod_{j=1}^L \prod_{k=1}^N \prod_{i=1}^M \frac{i + j + k - 1}{i + j + k - 2} = \prod_{j=1}^L \prod_{k=1}^N \frac{M + j + k - 1}{j + k - 1}. \quad (2)$$

Производящую функцию плоских разбиений

$$Z_q(L, N, M) = \sum_{\text{p.p.}} q^{|\pi|}, \quad (3)$$

где суммирование ведется по всем плоским разбиениям, заключенным в ящик $L \times N \times M$, можно рассматривать как статистическую сумму трехмерных диаграмм

Рис. 2. Типичный набор допустимых путей по решетке.

Юнга с бoльцмановским весом, равным объему разбиения $|\pi|$, и $q = e^{-1/T}$. Доказательство того, что

$$Z_q(L, N, M) = \prod_{j=1}^L \prod_{k=1}^N \prod_{i=1}^M \frac{1 - q^{i+j+k-1}}{1 - q^{i+j+k-2}} = \prod_{j=1}^L \prod_{k=1}^N \frac{1 - q^{M+j+k-1}}{1 - q^{j+k-1}}, \quad (4)$$

можно найти в монографиях [9], [10]. Число плоских укладок $A(L, N, M)$ является пределом производящей функции $Z_q(L, N, M)$ при $q \rightarrow 1$.

Производящая функция симметричных плоских разбиений ($\pi_{ij} = \pi_{ji}$) равна

$$Z_q^{\text{sym}}(N, N, M) = \sum_{\text{sym}} q^{|\pi|} = \prod_{j=1}^N \frac{1 - q^{M+2j-1}}{1 - q^{2j-1}} \prod_{1 \leq i < j \leq N} \frac{1 - q^{2(M+i+j-1)}}{1 - q^{2(i+j-1)}}, \quad (5)$$

где суммирование идет по всем симметричным плоским разбиениям в ящике $L \times N \times M$. Эта формула была предложена МакМагоном, а доказана Макдональдом [10].

Мы продемонстрируем теперь, что производящие функции плоских разбиений естественно возникают при вычислении специального вида корреляционных функций фазовой модели, и докажем, в частности, равенства (4) и (5) с помощью алгебраического анзаца Бете квантового метода обратной задачи.

3. ИНТЕГРИРУЕМАЯ МОДЕЛЬ

Фазовая модель является пределом при $q \rightarrow \infty$ q -бозонной модели [13]. Она определяется L -оператором [14], [17]

$$L(n | u) \equiv \begin{pmatrix} l_{11}(n | u) & l_{12}(n | u) \\ l_{21}(n | u) & l_{22}(n | u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^{-1} & \phi_n^\dagger \\ \phi_n & u \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Параметр $u \in \mathcal{C}$, а операторы $\phi_n, \phi_n^\dagger$ удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[N_i, \phi_j] = -\phi_i \delta_{ij}, \quad [N_i, \phi_j^\dagger] = \phi_i^\dagger \delta_{ij}, \quad [\phi_i, \phi_j^\dagger] = \pi_i \delta_{ij}, \quad (7)$$

где π_j – локальный вакуумный проектор $\pi_j = (|0\rangle\langle 0|)_j$, а N_j – оператор числа частиц. На локальных ортонормированных фоковских состояниях $|n_j\rangle_j$ (${}_k\langle n_m | n_i \rangle_j = \delta_{im} \delta_{kj}$)

$$\begin{aligned} \phi_j |0\rangle_j &= 0, \\ \phi_j |n_j\rangle_j &= |n_j - 1\rangle_j, \quad \phi_j^\dagger |n_j\rangle_j = |n_j + 1\rangle_j, \\ N_j |n_j\rangle_j &= n_j |n_j\rangle_j. \end{aligned} \quad (8)$$

Операторнозначная матрица (6) удовлетворяет сплетающему соотношению

$$R(u, v) (L(n | u) \otimes L(n | v)) = (L(n | v) \otimes L(n | u)) R(u, v), \quad (9)$$

в котором $R(u, v)$ – R -матрица, равная

$$R(u, v) = \begin{pmatrix} f(v, u) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g(v, u) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & g(v, u) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f(v, u) \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где

$$f(v, u) = \frac{u^2}{u^2 - v^2}, \quad g(v, u) = \frac{uv}{u^2 - v^2}. \quad (11)$$

Символ $\otimes$ означает тензорное произведение матриц: $(A \otimes B)_{ij,kl} = A_{ik} B_{jl}$.

Матрица монодромии определяется как произведение L -операторов:

$$T(u) = L(M|u) \dots L(1|u) L(0|u) \equiv \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Перестановочные соотношения матричных элементов матрицы монодромии (12) задаются той же R -матрицей (10):

$$R(u, v) (T(u) \otimes T(v)) = (T(v) \otimes T(u)) R(u, v). \quad (13)$$

Матрицу монодромии можно представить, в частности, в виде

$$\begin{aligned} T(u) &= \begin{pmatrix} A_1(u) & B_1(u) \\ C_1(u) & D_1(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{-1} & \phi_0^\dagger \\ \phi_0 & u \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} A_1(u) & B_1(u) \\ C_1(u) & D_1(u) \end{pmatrix} &\equiv L(M | u) \dots L(1 | u). \end{aligned}$$

Из этого представления следует, что

$$A(u) = A_1(u) u^{-1} + B_1(u) \phi_0, \quad B(u) = A_1(u) \phi_0^\dagger + B_1(u) u, \quad (14)$$

$$C(u) = C_1(u) u^{-1} + D_1(u) \phi_0, \quad D(u) = C_1(u) \phi_0^\dagger + D_1(u) u \quad (15)$$

и матричные элементы матрицы монодромии взаимосвязаны [15]:

$$\begin{aligned}\phi_0 B(u) &= uA(u), & A(u)\phi_0^\dagger &= u^{-1}B(u), \\ C(u)\phi_0^\dagger &= u^{-1}D(u), & \phi_0 D(u) &= uC(u).\end{aligned}\quad (16)$$

Матричные элементы матрицы монодромии (12) действуют в пространстве Фока, натянутом на локальные векторы состояния $|n_j\rangle_j$:

$$|n\rangle = \prod_{j=0}^M |n_j\rangle_j = \prod_{j=0}^M (\phi_j^\dagger)^{n_j} |0\rangle, \quad \sum n_j = n, \quad (17)$$

где

$$|0\rangle = \prod_{j=0}^M |0\rangle_j \quad (18)$$

является вакуумным вектором (генерирующим состоянием).

Вакуумный вектор $|0\rangle$ уничтожается оператором $C(u)$ и является собственным вектором операторов $A(u)$ и $D(u)$:

$$\begin{aligned}C(u)|0\rangle &= 0, \\ A(u)|0\rangle &= u^{-(M+1)}|0\rangle, & D(u)|0\rangle &= u^{M+1}|0\rangle.\end{aligned}\quad (19)$$

Вектор состояния выбирается в виде

$$|\Psi_N(u_1, u_2, \dots, u_N)\rangle = \prod_{j=1}^N B(u_j)|0\rangle, \quad (20)$$

а вектор сопряженного состояния (20) равен

$$\langle \Psi_N(u_1, u_2, \dots, u_N) | = \langle 0 | \prod_{j=1}^N C(u_j), \quad (21)$$

где дуальный вакуум $\langle 0 | = |0\rangle^\dagger$, $\langle 0|0\rangle = 1$. Векторы состояния (20) и (21) являются симметричными функциями переменных u_j , так как операторы $B(u)$ согласно формуле (13) коммутируют между собой.

Рассмотрим скалярное произведение векторов состояния (20) и (21). Удобнее, однако, использовать “нормированные” операторы $\tilde{B}(u) = u^M B(u)$ и $\tilde{C}(u) = u^{-M} C(u)$. Тогда

$$\begin{aligned}S(N, M | \{v\}, \{u\}) &= \langle 0 | \prod_{j=1}^N C(v_j) \prod_{j=1}^N B(u_j) | 0 \rangle = \\ &= \prod_{j=1}^N \left(\frac{v_j}{u_j} \right)^M \langle 0 | \prod_{j=1}^N \tilde{C}(v_j) \prod_{j=1}^N \tilde{B}(u_j) | 0 \rangle.\end{aligned}\quad (22)$$

Это скалярное произведение можно вычислить, воспользовавшись перестановочными соотношениями (13) [2]. Для произвольных N и M нормированное скалярное произведение представимо в виде определителя [3]:

$$\begin{aligned} \tilde{S}(N, M \mid \{v\}, \{u\}) &= \langle 0 | \tilde{C}(v_N) \dots \tilde{C}(v_1) \tilde{B}(u_1) \dots \tilde{B}(u_N) | 0 \rangle = \\ &= \left\{ \prod_{N \geq j > k \geq 1} \frac{v_j^2 v_k^2}{v_k^2 - v_j^2} \prod_{N \geq l > m \geq 1} \frac{u_l^{-2} u_m^{-2}}{u_m^{-2} - u_l^{-2}} \right\} \det \left[\frac{1 - (u_k/v_j)^{2(M+N)}}{1 - (u_k/v_j)^2} \right]_{j,k=1}^N. \end{aligned} \quad (23)$$

Зная ответ для скалярного произведения векторов состояния, можно вычислять различные корреляционные функции. Одной из них является формфактор K -й степени оператора уничтожения ϕ_0 , который можно представить в виде

$$\tilde{S}(K, N, M \mid \{v\}, \{u\}) = \langle 0 | \phi_0^K \tilde{C}(v_{N-K}) \dots \tilde{C}(v_1) \tilde{B}(u_1) \dots \tilde{B}(u_N) | 0 \rangle, \quad (24)$$

так как из представления (15) следует, что $[\phi_0, \tilde{C}(v)] = 0$. Оператор $\tilde{C}(v)$ обладает свойством $\lim_{v \rightarrow \infty} \tilde{C}(v) = \phi_0$. Отсюда следует, что

$$\tilde{S}(K, N, M \mid \{v\}, \{u\}) = \lim_{v_N, \dots, v_{N-K+1} \rightarrow \infty} \tilde{S}(N, M \mid \{v\}, \{u\}).$$

Переходя к этому пределу в выражении (23), получим следующее представление для формфактора (24):

$$\begin{aligned} \tilde{S}(K, N, M \mid \{v\}, \{u\}) &= \\ &= \left\{ (v_1^2 v_2^2 \dots v_{N-K}^2)^K \prod_{N-K \geq j > k \geq 1} \frac{v_j^2 v_k^2}{v_k^2 - v_j^2} \prod_{N \geq l > m \geq 1} \frac{u_l^{-2} u_m^{-2}}{u_m^{-2} - u_l^{-2}} \right\} \det Q, \end{aligned} \quad (25)$$

где матричные элементы $(N \times N)$ -матрицы Q равны

$$\begin{aligned} Q_{jk} &= \frac{1 - (u_k/v_j)^{2(M+N)}}{1 - (u_k/v_j)^2}, & 1 \leq j \leq N-K; \\ Q_{jk} &= u_k^{2(N-j)}, & N-K+1 \leq j \leq N. \end{aligned}$$

Воспользовавшись равенством $\phi_0 \tilde{B}(u) = \tilde{A}(u)$ (14), в котором мы положили $\tilde{A}(u) = u^{M+1} A(u)$, и свойством $[\phi_0, \tilde{C}(u)] = [\phi_0, \tilde{A}(u)] = 0$, можно переписать формфактор (24) в виде

$$\begin{aligned} \tilde{S}(K, N, M \mid \{v\}, \{u\}) &= \\ &= \langle 0 | \tilde{C}(v_{N-K}) \dots \tilde{C}(v_1) \tilde{A}(u_N) \dots \tilde{A}(u_{N-K+1}) \tilde{B}(u_1) \dots \tilde{B}(u_{N-K}) | 0 \rangle. \end{aligned}$$

Это равенство выражает формфактор через среднее от операторов $\tilde{A}(u)$.

4. ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ПЛОСКИХ РАЗБИЕНИЙ

Для того чтобы связать скалярное произведение (22) и формфактор (24) с проблемой перечисления плоских разбиений, мы воспользуемся графическим представлением этих объектов.

Матричные элементы L -оператора можно представить графически как вершины, в которые входят две линии со стрелками (см. рис. 3). Матричный элемент $l_{12}(n | u) = \phi_n^\dagger$ соответствует вершине (b), $l_{21}(n | u) = \phi_n$ – вершине (c), $l_{11}(n | u) = u^{-1}$ – вершине (a), а $l_{22}(n | u) = u$ – вершине (d).

Матричные элементы матрицы монодромии (12) выражаются тогда как суммы по всем возможным конфигурациям стрелок на одномерной решетке с $M + 1$ узлами с различными граничными условиями. Например, из определения оператора $B(u) = \sum_{k_M, \dots, k_1=1}^2 l_{1k_M}(M | u) l_{k_M k_{M-1}}(M-1 | u) \dots l_{k_1 2}(0 | u)$ следует, что этот оператор соответствует граничным условиям, когда верхняя и нижняя стрелки направлены наружу (конфигурация (B)). Соответственно оператор $C(u)$ определяется граничными условиями, когда верхняя и нижняя стрелки направлены внутрь (конфигурация (C)). Операторы $A(u)$ и $D(u)$ определяются граничными условиями, когда верхняя и нижняя стрелки направлены в одну сторону, вверх и вниз, соответственно (конфигурации (A) и (D)).

Рис. 3. Графическое представление матричных элементов L -оператора (a) и матрицы монодромии (б).

Рассмотрим двумерную квадратную решетку с $2N \times (M + 1)$ узлами. Первые ее N колонок с номерами $(-N, \dots, -1)$ ассоциируются с операторами $C(v_j)$, а последние N (с номерами $(1, \dots, N)$) – с операторами $B(u_j)$ (см. рис. 2). Локальные пространства Фока изображаются как строки решетки, i -я строка с i -м пространством, соответственно. Каждое горизонтальное ребро решетки помечено числом заполнения n_j соответствующего вектора Фока $|n_j\rangle_i$. Скалярное произведение (22) равно сумме по всем допустимым конфигурациям вершин (a), (b), (c) и (d) на квадратной решетке со следующими граничными условиями: наружные стрелки ее первых N колонок направлены внутрь, а на последних N – наружу; на правой и левой границах все числа заполнения равны нулю. Допустимые конфигурации для формфактора (24) удовлетворяют дополнительному условию, при котором все внутренние стрелки первых левых K колонок направлены вниз.

Допустимые конфигурации могут быть представлены как пути по решетке. Эти конфигурации представляют собой наборы, состоящие из N непересекающихся путей по решетке, стартующих из нижних левых вершин $(-N; 0), (-N+1; 0), \dots, (-1; 0)$ и заканчивающихся в верхних правых $(1; M), (2; M), \dots, (N; M)$. В вертикальном направлении пути следуют вдоль стрелок, направленных вверх, и только один путь

допустим на вертикальном ребре решетки, между тем как любое их число может делить горизонтальное. Число путей, делящих горизонтальное ребро, равно соответствующему числу заполнения. Допустимые конфигурации для формфактора (24) удовлетворяют дополнительному условию, при котором первый путь обязательно направлен вдоль нулевой строки решетки вплоть до вершины $(-N + K; 0)$. Отсюда следует, что пути по решетке, соответствующие плоским разбиениям, определяют допустимые конфигурации вершин в скалярном произведении (22) и соответственно в формфакторе (24).

Формфактор (24) можно представить в следующем виде:

$$\tilde{S}(K, N, M \mid \{v\}, \{u\}) = \sum_{\text{p.p.}} \prod_{k=-1}^{-N} v_{-k}^{t_k^d - t_k^a - M} \prod_{j=1}^N u_j^{t_j^d - t_j^a + M}, \quad (26)$$

где суммирование ведется по всем наборам путей по решетке, представляющим плоские разбиения в ящике $N \times N \times M$ с соответствующими дополнительными условиями, t_j^a и t_j^d есть число вершин типа (a) и (d) , соответственно, в j -й колонке решетки. Объем $|\pi|$ плоского разбиения π в ящике $N \times N \times M$ равен [3]

$$2|\pi| = \sum_{k=-1}^{-N} k(l_k^d - l_k^a - M) + \sum_{j=1}^N (j-1)(l_j^d - l_j^a + M). \quad (27)$$

Подстановка параметризации $v_j = q^{-j/2}$, $u_j = q^{(j-1)/2}$ в выражение (26) приводит к следующему результату:

$$\tilde{S}(K, N, M \mid q) = \sum_{\text{p.p.}} q^{|\pi|};$$

следовательно, формфактор является производящей функцией плоских разбиений (3) в ящике $L \times N \times M$, где $L = N - K$.

Определитель $(N \times N)$ -матрицы H с матричными элементами

$$\begin{aligned} H_{jk} &= \frac{1 - s^{j+k-1}}{1 - q^{j+k-1}}, & 1 \leq j \leq N - K, \\ H_{jk} &= q^{(k-1)(N-j)}, & N - K + 1 \leq j \leq N, \end{aligned}$$

может быть вычислен методом, приведенным в работе [18], и равен

$$\begin{aligned} \det H &= (-1)^{[N(N-1) + (N-K)(N-K-1)]/2} q^{[N(N-1)(N-2) + (N-K)(N-K+1)(N+2K-1)]/6} \times \\ &\times \prod_{N-K \geq j > k \geq 1} (1 - q^{j-k}) \prod_{N \geq l > m \geq 1} (1 - q^{l-m}) \prod_{k=1}^N \prod_{j=1}^{N-K} \frac{1 - sq^{j-k}}{1 - q^{j+k-1}}. \end{aligned} \quad (28)$$

Для $K = 0$ этот определитель был вычислен в работе [18] в связи с проблемой перечисления альтернированных знаковых матриц.

Подстановка $v_j = q^{-j/2}$, $u_j = q^{(j-1)/2}$ и $s = q^{N+M}$ в представление (25) приводит к равенству (4) с $L = N - K$ для производящей функции (3).

5. ВЕКТОРЫ СОСТОЯНИЯ И СИММЕТРИЧНЫЕ ПЛОСКИЕ РАЗБИЕНИЯ

Векторы состояния (20) могут быть представлены в виде [3]

$$\begin{aligned} |\Psi_N(u_1, u_2, \dots, u_N)\rangle &= \prod_{k=1}^N B(u_k)|0\rangle = \\ &= \sum_{\substack{0 \leq n_0, n_1, \dots, n_M \leq N \\ n_0 + n_1 + \dots + n_M = N}} f_{\{n\}}(u_1, u_2, \dots, u_N) \prod_{j=0}^M |n_j\rangle_j. \end{aligned} \quad (29)$$

Функция f выражается через симметрическую функцию Шура $S_{(\lambda_1, \dots, \lambda_N)}(u_1, u_2, \dots, u_N)$:

$$f_{\{n\}}(u_1, u_2, \dots, u_N) = (u_1 u_2 \cdot \dots \cdot u_N)^{-M} S_{\lambda}(u_1^2, u_2^2, \dots, u_N^2), \quad (30)$$

а функция Шура, соответствующая разбиению $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$, равна

$$S_{(\lambda_1, \dots, \lambda_N)}(u_1, u_2, \dots, u_N) = \frac{\det(u_j^{N-i+\lambda_i})}{\prod_{1 \leq i < j \leq N} (u_i - u_j)}. \quad (31)$$

Конфигурация чисел заполнений $\{n\} = (n_0, n_1, \dots, n_M)$ и разбиение $\lambda = (M^{n_M}, (M-1)^{n_{M-1}}, \dots, 1^{n_1}, 0^{n_0})$ находятся во взаимно однозначном соответствии, число n_K указывает, сколько раз число K входит в данное разбиение.

Как следует из представления (29), проекция вектора состояния на вектор

$$|P\rangle = \sum_{\substack{0 \leq n_0, n_1, \dots, n_M \leq N \\ n_0 + n_1 + \dots + n_M = N}} \prod_{j=0}^M |n_j\rangle_j \quad (32)$$

равна

$$\langle P | \prod_{j=1}^N \tilde{B}(u_j) | 0 \rangle = \sum_{\lambda \subseteq \{M^N\}} S_{\{\lambda\}}(u_1^2, u_2^2, \dots, u_N^2), \quad (33)$$

где суммирование ведется по всем разбиениям λ , имеющим не более N частей, каждая из которых не более M .

В работе [3] было доказано, что

$$\langle P | \prod_{j=1}^N \tilde{B}(q^{(2j-1)/2}) | 0 \rangle = \sum_{\text{sym}} q^{|\pi|},$$

где суммирование ведется по всем симметричным плоским разбиениям, и, следовательно, производящая функция равна

$$Z_q^{\text{sym}}(N, N, M) = \sum_{\lambda \subseteq \{M^N\}} S_{\{\lambda\}}(q, q^3, \dots, q^{2N-1}).$$

Данную сумму функций Шура можно выразить в виде произведения (см. монографию [10], пример I.5.17) и получить представление (5).

Благодарности. Частично работа была выполнена на физическом факультете Университета Ювяскюлы (Финляндия), которому я признателен за гостеприимство, а также поддержана CRDF (грант № RUMI-2622-ST-04) и РФФИ (грант № 04-01-00825).

Список литературы

- [1] L. D. Faddeev, *Sov. Sci. Rev. Math. C*, **1** (1980), 107.
- [2] Н. М. Боголюбов, А. Г. Изергин, В. Е. Корепин, *Корреляционные функции интегрируемых систем и квантовый метод обратной задачи*, Наука, М., 1992; V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov, A. G. Izergin, *Quantum inverse scattering method and correlation functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
- [3] N. M. Bogoliubov, *J. Phys. A*, **38** (2005), 9415.
- [4] P. L. Ferrari, H. Spohn, *J. Stat. Phys.*, **113** (2003), 1.
- [5] R. Rajesh, D. Dhar, *Phys. Rev. Lett.*, **81** (1998), 1646.
- [6] J. W. Essam, A. J. Guttmann, *Phys. Rev. E*, **52** (1995), 5849; A. J. Guttmann, A. L. Owczarek, X. G. Viennot, *J. Phys. A*, **31** (1998), 8123; C. Krattenthaler, A. J. Guttmann, X. G. Viennot, *J. Phys. A*, **33** (2000), 8835.
- [7] A. Okounkov, N. Reshetikhin, C. Vafa, “Quantum Calabi–Yau and classical crystals”, *The Unity of Mathematics* (Cambridge, MA, USA, 2003), Progr. Math., **244**, eds. P. Etingof, V. Retakh, I. M. Singer, Birkhäuser, Boston, MA, 2006, 597; [hep-th/0309208](#).
- [8] G. E. Andrews, *The Theory of Partitions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.
- [9] D. M. Bressoud, *Proofs and Confirmations. The Story of the Alternating Sign Matrix Conjecture*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.
- [10] И. Макдональд, *Симметрические функции и многочлены Холла*, Мир, М., 1985.
- [11] А. М. Вершик, *Функц. анализ и его прилож.*, **30**:2 (1996), 19; А. М. Вершик, С. Керов, *ДАН СССР*, **233** (1977), 1024.
- [12] A. Okounkov, N. Reshetikhin, *J. Amer. Math. Soc.*, **16** (2003), 581.
- [13] N. M. Bogoliubov, R. K. Bullough, G. Pang, *Phys. Rev. B*, **47** (1993), 11495; N. M. Bogoliubov, R. K. Bullough, J. Timonen, *Phys. Rev. Lett.*, **25** (1994), 3933.
- [14] N. M. Bogoliubov, A. G. Izergin, N. A. Kitanine, *Nucl. Phys. B*, **516** (1998), 501.
- [15] Н. В. Цилевич, *Функц. анализ и его прилож.*, **40**:3 (2006), 53.
- [16] K. Shigechi, M. Uchiyama, *J. Phys. A*, **38** (2005), 10287.
- [17] N. M. Bogoliubov, T. Nassar, *Phys. Lett. A*, **234** (1997), 345.
- [18] G. Kuperberg, *Int. Math. Res. Not.*, **1996** (1996), 139.