Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Горский, Судаковский скейлинг и дуальность между калибровочными полями и струнами, *ТМФ*, 2007, том 150, номер 2, 204–218

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf5974>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 06:44:33

© 2007 г.

А. С. Горский*

СУДАКОВСКИЙ СКЕЙЛИНГ И ДУАЛЬНОСТЬ МЕЖДУ КАЛИБРОВОЧНЫМИ ПОЛЯМИ И СТРУНАМИ

Исследуются аномальные размерности (супер)конформных операторов Вильсона в режимах слабой и сильной связи с использованием симметрий интегрируемых систем с обеих сторон соответствия калибровочные поля/струны. Изучается происхождение однологарифмического асимптотического поведения длинных операторов/струн в пределе большого лоренцевского спина.

Ключевые слова: спинные цепочки, калибровочные теории.

1. ВВЕДЕНИЕ

Аномальные размерности операторов теории Янга–Миллса с большим лоренцевым спином играют важную роль в разнообразных явлениях в калибровочных теориях, использующих судаковский формфактор. Последние исследования дуальности между калибровочными полями и струнами [1] подают надежду на возможное точное вычисление всего ряда теории возмущений. В настоящей статье, основанной на работе [2], исследуются свойства аномальных размерностей операторов типа

$$\mathcal{O}_{N,L}(0) = \sum_{n_1+\dots+n_L=N} c_{n_1\dots n_L} \operatorname{tr}\{D_+^{n_1} X(0) D_+^{n_2} X(0) \dots D_+^{n_L} X(0)\} \quad (1.1)$$

с обеих сторон соответствия калибровочные поля/струны в пределе большого твиста L и лоренцева спина N . В этом выражении через $X(0)$ обозначена так называемая “регулярная” компонента квантовых полей определенной спиральности в соответствующей калибровочной теории, $D_+ = D_\mu n^\mu$ представляет собой проекцию ковариантной производной на световой конус, $n_\mu^2 = 0$. Коэффициенты разложения $c_{n_1\dots n_L}$ фиксируются с помощью условия, утверждающего, что $\mathcal{O}_{N,L}(0)$ обладает собственным масштабным поведением, т.е. выражение (1.1) должно быть собственным состоянием однопетлевого оператора дилатации. Со стороны теории струн соответствующие односледовые операторы Вильсона дуальны сложенной струне, вращающейся с большим угловым моментом N в подпространстве AdS_3 пространства анти-де Ситтера (AdS) и бустированной вдоль некоторого большого круга на

---

*Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.
E-mail: gorsky@itep.ru

сфере большого углового момента L [3]. Энергия E такой классической струнной конфигурации определяет ведущий асимптотический член разложения аномальной размерности $\gamma(\lambda) = E - L - N$ дуального оператора Вильсона в $\mathcal{N} = 4$ теории супер-Янга–Миллса (СЯМ) в режиме сильной связи в планарном приближении. Из струнной теории следуют четкие предсказания о виде $\gamma(\lambda)$ как функции от L и N . Можно получить, что $\gamma(\lambda)$ ведет себя по-разному в следующих трех режимах [4], [3]:

– при $N \ll L$ в пределе “коротких” струн

$$\gamma(\lambda) = \lambda \frac{m^2}{2} \frac{N}{L^2} + \dots; \quad (1.2)$$

– при $N \gg L$ в пределе “длинных” струн

$$\gamma(\lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi^2} \frac{m^2}{L} \ln^2 \frac{N}{L} + \dots & \text{для } \xi_{\text{str}} < 1, \\ \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} m \ln \frac{N}{\sqrt{\lambda}} + \dots & \text{для } \xi_{\text{str}} \gg 1, \end{cases} \quad (1.3)$$

где параметр $\xi_{\text{str}} = \lambda \ln^2(N/L)/L^2$. Целое число m здесь задает число раз, которое струна оказывается сложенной сама на себя. Минимальная аномальная размерность отвечает однократно сложенной струне, $m = 1$. В этом случае при $\xi_{\text{str}} \gg 1$ ведущий асимптотический член для $\gamma(\lambda)$ не зависит от твиста L и оказывается одним и тем же для всех операторов с $L = 2$. При $\xi_{\text{str}} < 1$ роль твиста L состоит в создании “окна БМН”, т.е. области в пространстве параметров, в которой аномальная размерность допускает разложение в ряд по степеням константы связи Беренштейна–Малдачены–Настасе (БМН) $\lambda' \equiv \lambda/(\pi L)^2$ [5]. Считается, что несколько первых членов в разложении $\gamma(\lambda)$ по степеням λ' должны совпадать с соответствующими выражениями для аномальных размерностей операторов Вильсона с твистом L и спином N , полученных в $\mathcal{N} = 4$ теории СЯМ в режиме слабой связи [6].

С точки зрения калибровочной теории вычисление аномальных размерностей для операторов старших твистов с большим лоренцевским спином представляет собой исключительно сложную задачу в общей теории Янга–Миллса даже на уровне однопетлевых вычислений ввиду большого размера матрицы смешивания. Эту проблему удастся, однако, преодолеть, учитывая скрытую симметрию интегрируемости оператора дилатаций [7], которая отображает матрицу однопетлевого смешивания для операторов Вильсона с твистом L , принадлежащих так называемому голоморфному $SL(2)$ -сектору, в гамильтониан магнетика Гейзенберга длины L и спина s , задаваемого конформным спином квантовых полей (см. обзор [8]). Это наблюдение позволяет вычислить точный спектр собственных значений аномальных размерностей операторов Вильсона произвольного твиста и лоренцевского спина в интегрируемых секторах теории Янга–Миллса. В $\mathcal{N} = 4$ теории СЯМ можно отождествить на уровне однопетлевой точности минимальную аномальную размерность операторов Вильсона, построенных из L скалярных полей и несущих лоренцевский спин N , с минимальной энергией спектра собственных значений $SL(2)$ -магнетика Гейзенберга длины L с полным спином $N + Ls$, $s = 1/2$ [9]. Соответствие калибровочные поля/струны предполагает, что минимальная аномальная размерность, определенная таким образом, должна удовлетворять соотношениям (1.2), (1.3) в термодинамическом пределе $L \rightarrow \infty$.

Из формул (1.2), (1.3) следует, что аномальные размерности операторов старших твистов зависят от “скрытого” параметра $\xi_{\text{str}} = \lambda \ln^2(N/L)/L^2$, а их поведение в режиме сильной связи оказывается различным при $\xi_{\text{str}} < 1$ и при $\xi_{\text{str}} \gg 1$. При $\xi_{\text{str}} \gg 1$ аномальная размерность не допускает пертурбативного разложения по константе БМН λ' и имеет масштабное поведение $\sim \ln N$. В результате исследований анзаца Бете для спиновой цепочки $SL(2)$ в термодинамическом пределе $L \gg 1$ с точки зрения калибровочных теорий в работе [9] было получено выражение для $\gamma(\lambda)$, которое совпадало с (1.2) в пределе коротких струн и с первым соотношением в формуле (1.3) в пределе длинных струн. Авторы, тем не менее, не обнаружили ни какого-либо проявления второго (логарифмического) режима поведения, ни появления нового параметра, сходного с ξ_{str} . Это наблюдение противоречит нашим предположениям о том, что минимальная аномальная размерность операторов старших твистов должна иметь масштабное логарифмическое поведение во всех петлевых поправках при $N \rightarrow \infty$. Цель настоящего исследования состоит в получении логарифмического масштабного поведения аномальных размерностей как в калибровочной, так и в струнной теории и в осознании физического смысла параметра ξ_{str} и его калибровочного аналога ξ .

Мы перепроверим вычисления энергии $SL(2)$ -магнетика Гейзенберга со спином $s = 1/2, 1, 3/2$, используя в качестве основного приема метод Q -оператора Бакстера [10], и покажем, что однопетлевая аномальная размерность в интегрируемых секторах теории Янга–Миллса обладает следующим масштабным поведением в термодинамическом пределе $L \rightarrow \infty$:

– при $N \ll L$

$$\gamma(\lambda) = \lambda \frac{m^2}{4s} \frac{N}{L^2} + \dots, \quad (1.4)$$

– при $N \gg L$

$$\gamma(\lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi^2} \frac{m^2}{L} \ln^2 \frac{N}{L} + \dots & \text{для } \xi < 1, \\ \frac{\lambda}{2\pi^2} m \ln N + \dots & \text{для } \xi \gg 1, \end{cases} \quad (1.5)$$

в зависимости от параметра $\xi = \ln(N/L)/L$. Здесь s совпадает с конформным спином поля, входящего в оператор Вильсона, т.е. $s = 1/2, 1, 3/2$ соответственно для скалярного поля, поля фермионного партнера и поля глюона. Для скалярных операторов уравнение (1.4) и первое из соотношений (1.5) совпадают с соответствующими выражениями в (1.2), (1.3). Заметим, что аномальная размерность в (1.5) не зависит от спина s при $N \gg L$, что предполагает универсальность двух режимов в формуле (1.5) для всех калибровочных теорий. Это действительно так при $\xi \gg 1$ ввиду того, что коэффициент при $2 \ln N$ совпадает с аномальной размерностью излома в режиме слабой связи.

При $N \gg L$ и $\xi < 1$ однопетлевая аномальная размерность проявляет новое, дважды логарифмическое поведение (1.5). Впервые этот результат был получен из соображений теории струн [3], а в дальнейшем был воспроизведен вычислениями с точки зрения калибровочных теорий [9]. Возникает естественный вопрос: можно ли получить похожие выражения, если обратиться к старшим петлям, и можно ли их просуммировать во всех петлях? Соответствие между калибровочными полями

и струнами предполагает, что в $\mathcal{N} = 4$ теории СЯМ аномальная размерность в области значений $N \gg L \gg 1$ допускает разложение типа БМН (с $\lambda' = \lambda/(\pi L)^2$ и $\xi = \ln(N/L)/L$)

$$\gamma(\lambda) = L \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda' \ln^2 \frac{N}{L} \right)^n c_n(\xi) + \dots, \quad (1.6)$$

в котором коэффициентные функции $c_n(\xi)$ не зависят от константы связи и при $\xi \rightarrow 0$ и $\xi \rightarrow \infty$ имеют асимптотики

$$c_n(\xi) = c_{0,n} + c_{1,n}\xi + O(\xi^2), \quad c_n(\xi) = O\left(\frac{1}{\xi^{2n-1}}\right), \quad (1.7)$$

$c_{0,n} = (-1)^n (-1/2)_n / n!$. На уровне одной петли из уравнения (1.6) следуют (при $m = 1$) оба соотношения (1.5). Кроме того, для $\xi \rightarrow \infty$ коэффициент при λ^n в правой части разложения (1.6) имеет масштабное поведение вида $\sim \ln N$ и задает n -петлевую поправку к аномальной размерности конфигурации типа излома в режиме слабой связи. В режиме сильной связи после подстановки $\xi = \xi_{\text{str}}^{1/2} / \sqrt{\lambda}$ оказывается возможным просуммировать пертурбативное разложение из (1.6) по всем петлевым поправкам, что приводит (при $\lambda \rightarrow \infty$ и фиксированном значении $\xi_{\text{str}} = \lambda \ln^2(N/L)/L^2$) к выражению

$$\gamma(\lambda) = L \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda' \ln^2 \frac{N}{L} \right)^n c_n(0) + \dots = L \left[\sqrt{1 + \lambda' \ln^2 \frac{N}{L}} - 1 \right] + \dots, \quad (1.8)$$

где многоточие обозначает поправки следующих порядков. При $N \rightarrow \infty$ из этого выражения можно также получить ведущее асимптотическое поведение аномальной размерности в последнем из режимов, указанных в (1.3), и, следовательно, выражение для аномальной размерности в режиме сильной связи.

2. СПЕКТР ЭНЕРГИИ ДЛЯ СПИНОВОЙ ЦЕПОЧКИ

Наиболее эффективный способ квантования системы состоит в использовании решения уравнения Бакстера, которое в данном случае имеет вид

$$(u + is)^L Q(u + i) + (u - is)^L Q(u - i) = t_L(u) Q(u) \quad (2.1)$$

и задает энергию и импульс посредством соотношений

$$\varepsilon = i(\ln Q(is))' - i(\ln Q(-is))', \quad e^{i\theta} = \frac{Q(is)}{Q(-is)}. \quad (2.2)$$

Удобно ввести эйкональную фазу:

$$Q\left(\frac{x}{\eta}\right) = \eta^{-N} e^{S(x)/\eta}, \quad S(x) = \eta \sum_{k=1}^N \ln(x - \eta \lambda_k), \quad (2.3)$$

где

$$\eta = \frac{1}{N + Ls}, \quad \beta = sL\eta = \frac{sL}{N + Ls}. \quad (2.4)$$

В квазиклассическом приближении с помощью разложения

$$S(x) = S_0(x) + \eta S_1(x) + \dots, \quad \hat{q}_k = \hat{q}_k^{(0)} + \eta \hat{q}_k^{(1)} + \dots, \quad (2.5)$$

где η играет роль постоянной Планка, энергия спинового магнетика или, эквивалентно, однопетлевая аномальная размерность оператора Вильсона параметризуется комплексной кривой Γ_L . Род кривой $g = L - 2$ задается длиной спиновой цепочки, в то время как ее модули определяются квантованными значениями сохраняющихся зарядов $\hat{q}_k$, которые, в свою очередь, зависят от набора целых чисел $\ell_1, \dots, \ell_{L-1}$. Выбирая различные значения этих чисел, можно рассматривать различные участки спектра.

В данной работе исследуются собственные состояния, на которых достигается минимально возможная энергия при фиксированном полном спине N . Для собственных состояний, отвечающих минимальной энергии, все отрезки, кроме двух, сжимаются в двойные точки, а корни Бете конденсируются на двух симметрично расположенных разрезах на вещественной оси, которые обозначаются $[-a, -b]$ и $[b, a]$. Тогда спектральная кривая принимает вид

$$y^2 = \tilde{y}^2 \left[\frac{2}{x^3} \prod_j \left(1 - \frac{x_{2j}^2}{x^2} \right) \right]^2, \quad \tilde{y}^2 = (x^2 - a^2)(x^2 - b^2), \quad (2.6)$$

где было принято в расчет то, что точки ветвления возникают парами с противоположными знаками для состояний с минимальной энергией. Параметры a , b и x_{2j} определяются из требования аналитичности функции $S'_0(x)$ на комплексной x -плоскости с двумя симметрично расположенными разрезами на вещественной оси и с предписанным асимптотическим поведением функции при $x = 0$ и $x \rightarrow \infty$ [11]. Это выражение находится в явном противоречии с тем хорошо известным обстоятельством, что аномальная размерность имеет логарифмическое масштабное поведение $\varepsilon \sim \ln N$ при $N \gg L$ с коэффициентом, не зависящим от L .

Рассмотрим в качестве примера собственные состояния с фиксированным значением L , $N \rightarrow \infty$, и старшими зарядами. В этом случае трансфер-матрица $\tau_0(x)$ представляет собой четный многочлен степени L , имеющий при $x \rightarrow 0$ поведение

$$\tau_0(x) \sim \frac{\hat{q}_L^{(0)}}{x^L}, \quad (2.7)$$

если только $\hat{q}_L^{(0)} \neq 0$. При нулевом $\hat{q}_L^{(0)}$ асимптотическое поведение $\tau_0(x)$ задается первым неисчезающим зарядом $\hat{q}_{2k}^{(0)} \neq 0$ с $2k < L$. Можно найти главную асимптотику импульса при $x \rightarrow 0$ на верхнем листе:

$$dp \sim iL \frac{dx}{x}, \quad (2.8)$$

что дает квазиимпульс $p(x) \sim iL \ln x$ и энергию

$$\varepsilon \sim 2L \ln \frac{L}{\beta} \sim 2L \ln N. \quad (2.9)$$

Заметим, что коэффициент при $\ln N$ в правой части (2.9) задается главной асимптотикой трансфер-матрицы (2.7) при $x \rightarrow 0$. Для $\hat{q}_L^{(0)} \neq 0$ этот коэффициент принимает свое максимально возможное значение. При $\hat{q}_L^{(0)} = \dots = \hat{q}_{2m+2}^{(0)} = 0$ трансфер-матрица масштабируется как $\tau_0(x) \sim \hat{q}_{2m}^{(0)}/x^{2m}$ (напомним, что заряды с нечетными индексами обращаются в нуль), что дает

$$\varepsilon \sim 4m \ln N, \quad \hat{q}_{2m+2}^{(0)} = \dots = \hat{q}_L^{(0)} = 0. \quad (2.10)$$

Значения остающихся зарядов $\hat{q}_4^{(0)}, \dots, \hat{q}_{2m}^{(0)}$ будут найдены ниже (см. уравнение (2.16)). На протяжении всей статьи нас будут интересовать только собственные состояния с минимальной энергией при заданном N . Они, очевидно, отвечают $m = 1$, т.е.

$$\varepsilon^{(m=1)} \sim 4 \ln N, \quad \hat{q}_4^{(0)} = \dots = \hat{q}_L^{(0)} = 0. \quad (2.11)$$

Здесь верхний индекс (0) относится к ведущему порядку квазиклассического разложения, и из $\hat{q}_{2k}^{(0)} = 0$ не обязательно следует, что $\hat{q}_{2k} = 0$, а только лишь то, что $\hat{q}_{2k} = O(\eta)$ или, эквивалентно, $q_{2k} \ll (-q_2)^k$.

Трансфер-матрица $\tau_0(x)$, отвечающая состоянию с минимальной энергией (2.11), задается соотношением

$$\tau_0^{(m=1)}(x) = 2 - \frac{1}{x^2}, \quad (2.12)$$

а спектральная кривая принимает вид

$$\Gamma_L^{(m=1)}: \quad y^2 = \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) \frac{4}{x^4}. \quad (2.13)$$

Легко видеть, что $\Gamma_L^{(m=1)}$ совпадает с комплексной кривой спиновой цепочки длины 2, т.е. $\Gamma_{L=2}$. В самом деле, выбирая $\hat{q}_{2m+1}^{(0)} = \dots = \hat{q}_L^{(0)} = 0$, можно эффективно редуцировать случай бесконечно длинной спиновой цепочки (при $L \rightarrow \infty$) к цепочке конечной длины $2m$. Из выражения (2.13) можно заключить, что при $m = 1$ все точки ветвления, кроме двух, концентрируются в начале отсчета, $b = x_{2j} = 0$, а две оставшиеся (разрешенные) точки ветвления совпадают с $\pm 1/2$. При $m \geq 2$ можно показать [12], что комплексная кривая, отвечающая соотношению (2.10), имеет вид

$$\Gamma_L^{(m \geq 2)}: \quad y^2 = \left(x^2 - \frac{1}{4m^2}\right) \frac{4}{x^4} \prod_{j=1}^{m-1} \left(1 - \frac{x_{2j}^2}{x^2}\right)^2, \quad (2.14)$$

$1/x_{2j} = 2m \cos(\pi j/(2m))$. Сравнивая этот результат с кривой (2.6), получим, что $a = 1/(2m)$ и $b = 0$, т.е. два разреза $[-a, -b]$ и $[b, a]$ сливаются в начале координат. Заметим, что $\Gamma_L^{(m \geq 2)}$ имеет ровно $2m$ двойных точек, удовлетворяющих условиям $x_{2j}^2 > 1/(2m)^2$, в то время как оставшиеся двойные точки, лежащие на отрезке $[-b, b]$ в выражении (2.6), конденсируются в точке $x = 0$ при $b \rightarrow 0$.

Комплексные кривые (2.13), (2.14) имеют нулевой род, и вследствие этого импульс $p'(x)$ выражается в элементарных функциях. В самом деле, при подстановке

(2.13), (2.14) можно получить следующее выражение для импульса при произвольном m :

$$dp = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1/(2m)^2}}, \quad p(x) = \int_{\infty}^x dp = 2m \arcsin \frac{1}{2mx}. \quad (2.15)$$

Отсюда для интегралов движения получаем

$$\hat{q}_{2n}^{(0)} = \frac{2(-1)^n m^{1-2n} \Gamma(m+n)}{\Gamma(2n+1) \Gamma(m-n+1)}. \quad (2.16)$$

Из выражения (2.15) можно заключить, что для $m = 1$ и собственных состояний с минимальной энергией в пределе $N \rightarrow \infty$ и при фиксированном значении L импульс $p'(x)$ представляет собой аналитическую функцию в комплексной плоскости с корневым разрезом $[-1/2, 1/2]$ и *простым* полюсом в начале отсчета. Это условие следует сравнить с аналитическими свойствами импульса в области фиксированных значений N/L , а в этом случае $p'(x)$ имеет *двойной* полюс при $x = 0$.

3. КЛАССИЧЕСКИЕ СТРУНЫ В $AdS_3 \times S^1$

Обратимся теперь к анализу аномальных размерностей составных операторов с точки зрения теории струн. В соответствии с дуальностью между калибровочными полями и струнами операторы Вильсона отображаются в определенные струнные состояния, энергии которых отождествляются с масштабными размерностями операторов. Известно, что в $\mathcal{N} = 4$ теории СЯМ операторы Вильсона с минимальными аномальными размерностями, обсуждаемые в предыдущих разделах, дуальны однократно сложенным струнам, вращающимся в секторе $AdS_3 \times S^1$ струнной теории типа IIB [4], [3].

3.1. Сложенная вращающаяся струна. Для сложенной замкнутой струны, вращающейся в подпространствах AdS_3 и S^1 , бозонная часть суперструнного действия имеет вид

$$S = -\frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \int d^2\xi \sqrt{-\det \|G_{MN}(X) \partial_a X^M \partial_b X^N\|}, \quad (3.1)$$

где константа взаимодействия 'т Хоофта $\lambda = g^2 N_c$ связана с произведением радиуса R пространства AdS и натяжения струны $1/\alpha'$: $\sqrt{\lambda} = R^2/\alpha'$, а метрика имеет вид

$$ds^2 \equiv G_{MN} dX^M dX^N = -ch^2 \rho dt^2 + sh^2 \rho d\theta^2 + d\rho^2 + d\varphi^2. \quad (3.2)$$

Здесь t , ρ и θ — соответственно глобальное время, радиальная координата и угловая переменная в пространстве AdS_3 , а φ — угол в большом круге на сфере S^5 . Координаты мирового листа струны $\xi^a = (\xi^0, \xi^1)$ выбраны таким образом, что

$$t = \xi^0, \quad \theta = \omega \xi^0 + \xi^1, \quad \varphi = \nu \xi^0. \quad (3.3)$$

Здесь ω — угловая скорость пространства AdS , а ν — параметр буста центра масс сложенной струны на сфере S^5 . Для жесткой сложенной струны радиальная переменная ρ не зависит от ξ^0 и периодична по ξ^1 , т.е. $\rho(\xi^1 + 2\pi) = \rho(\xi^1)$. Зависимость

$\rho = \rho(\xi^1)$ задается классическими струнными уравнениями движения [3], [4], [13]. Их решение описывает конфигурацию сложенной струны, составленной из четырех сегментов, протяженных в радиальном направлении от центра пространства AdS, $\rho = 0$, в сторону его границы на расстояние ρ_0 , которое зависит от угловых скоростей (3.3):

$$\coth^2 \rho_0 = \frac{\omega^2 - \nu^2}{1 - \nu^2} \geq 1. \quad (3.4)$$

У струны имеются два излома в точке $\rho = \rho_0$; эти изломы отвечают за логарифмическое масштабирование аномальных размерностей операторов Вильсона в режиме сильной связи [13], [14].

В рамках соответствия калибровочные теории/струны аномальная размерность операторов (1.1) связана с энергией E классической вращающейся струны:

$$E = N + L + \gamma(\lambda), \quad (3.5)$$

где лоренцев спин N и твист L заменяются соответствующими угловыми моментами пространств AdS_3 и S^1 . Из действия Намбу–Гото (3.1) следует, что эти заряды равны

$$E = \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi} \frac{\sqrt{-\chi}}{\sqrt{1-\nu^2}} \mathbb{E}(\chi), \quad N = \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi} \frac{\omega\sqrt{-\chi}}{\sqrt{1-\nu^2}} [\mathbb{E}(\chi) - \mathbb{K}(\chi)], \quad L = \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi} \frac{\nu\sqrt{-\chi}}{\sqrt{1-\nu^2}} \mathbb{K}(\chi), \quad (3.6)$$

где $\mathbb{K}(\chi)$ и $\mathbb{E}(\chi)$ – эллиптические функции соответственно первого и второго рода, а вспомогательный (имеющий отрицательное значение) параметр χ связан с расстоянием ρ_0 от центра пространства AdS до конечной точки струны, протяженной по радиальной координате:

$$\chi = -\operatorname{sh}^2 \rho_0. \quad (3.7)$$

Исключая ω и ν и оставляя χ , можно представить уравнения (3.6) в параметрическом виде [9]:

$$\left(\frac{E}{\mathbb{E}(\chi)} \right)^2 - \left(\frac{L}{\mathbb{K}(\chi)} \right)^2 = -\frac{4\lambda}{\pi^2} \chi, \quad \left(\frac{N}{\mathbb{E}(\chi) - \mathbb{K}(\chi)} \right)^2 - \left(\frac{L}{\mathbb{K}(\chi)} \right)^2 = \frac{4\lambda}{\pi^2} (1 - \chi). \quad (3.8)$$

С помощью этих соотношений можно анализировать поведение аномальной размерности $\gamma = E - N - L$ в режиме сильной связи в квазиклассическом пределе большого углового момента $L \rightarrow \infty$, $N \rightarrow \infty$, с фиксированными $N/\sqrt{\lambda}$ и $L/\sqrt{\lambda}$. Таким способом из уравнения (3.8) можно найти, что два предельных случая $N \ll L$ и $N \gg L$ отвечают соответственно случаям коротких и длинных струн, $\rho_0 \ll 1$ и $\rho_0 \gg 1$.

Хорошо известно [3], [4], что в пределе коротких струн $\rho_0 \ll 1$ или, эквивалентно, $(-\chi) \ll 1$ аномальная размерность допускает БМН-разложение

$$\gamma(\lambda) = L[\lambda' \gamma^{(0)} + (\lambda')^2 \gamma^{(1)} + \dots], \quad (3.9)$$

где $\gamma^{(0)}, \gamma^{(1)}, \dots$ – функции отношения N/L и $\lambda' = \lambda/(\pi L)^2$ задают константу связи БМН. Подставляя $\chi = \chi_0 + \lambda' \chi_1 + \dots$ в уравнение (3.8) и приравнивая коэффициенты разложения в обеих частях этого уравнения по степеням λ' , можно найти

для $N/L \ll 1$ [3], [5], [9], что

$$\gamma^{(0)} = \frac{\pi^2}{2} \frac{N}{L} + \dots, \quad \gamma^{(1)} = -\frac{\pi^4}{8} \frac{N}{L} + \dots. \quad (3.10)$$

Член низшего порядка в разложении (3.9) совпадает с однопетлевым результатом с точки зрения калибровочной теории для $s = 1/2$ и $m = 1$:

$$\gamma^{(0)} = \frac{L}{8} \varepsilon. \quad (3.11)$$

Похожим образом в пределе длинных струн $\rho_0 \rightarrow \infty$ или, эквивалентно, $(-\chi) \rightarrow \infty$, предполагая регулярность разложения χ по степеням λ' , можно найти из уравнения (3.8), что параметр χ_0 в ведущем порядке при $N/L \gg 1$ имеет поведение

$$\chi_0 = -\frac{N}{2L} \ln \frac{N}{L}. \quad (3.12)$$

Отсюда для коэффициентов разложения БМН в случае аномальной размерности (3.9) при $N/L \gg 1$ можно получить

$$\begin{aligned} \gamma^{(0)} &= \frac{1}{2} \ln^2(-\chi_0) + \dots = \frac{1}{2} \ln^2 \frac{N}{L} + \dots, \\ \gamma^{(1)} &= -\frac{1}{8} \ln^4(-\chi_0) + \dots = -\frac{1}{8} \ln^4 \frac{N}{L} + \dots, \end{aligned} \quad (3.13)$$

где многоточием обозначены члены следующих порядков при $(-\chi_0) \rightarrow \infty$. В соответствии с формулой (3.11) первое из соотношений (3.13) совпадает с однопетлевым выражением для аномальной размерности, полученным с помощью калибровочной теории. Более того, можно показать [9], что соотношение (3.11) (после преобразования Ландена, определенного ниже формулой (3.33)) выполняется при произвольных значениях N/L с $\gamma^{(0)}$, заданным выражениями (3.8) и (3.9).

Вплоть до этого момента мы не наблюдаем ожидаемого поведения аномальной размерности $\gamma(\lambda) \sim \ln N$ при $N \gg L$. Напомним, что квазиклассическое разложение однопетлевой энергии ε со стороны струнной теории было расходящимся при $N \gg L$, так что логарифмическое масштабирование $\varepsilon \sim \ln N$ может быть достигнуто путем пересуммирования полного ряда теории возмущений в квазиклассическом приближении по степеням параметра $\xi = \ln(N/L)/L$. Оказывается, что подобное явление имеет место в случае ряда (3.9) в струнной теории, хотя в этом случае параметр квазиклассического приближения оказывается другим – он равен

$$\xi_{\text{str}} = \frac{\lambda}{L^2} \ln^2 \frac{N}{L} = \lambda \xi^2. \quad (3.14)$$

Это соответствие легко получить, сравнивая вклады в разложение (3.9) от $\gamma^{(0)}$ и от $\gamma^{(1)}$ (см. (3.13)).

Чтобы просуммировать бесконечный ряд в выражении (3.9) для $\xi_{\text{str}} \gg 1$, обратимся снова к (3.8) и перепишем его в виде

$$\gamma(\lambda) = L [\sqrt{1 - 4\lambda' \chi \mathbb{K}^2(\chi)} - 1 + \Delta\gamma], \quad (3.15)$$

где $\lambda' = \lambda/(\pi L)^2$ и

$$\Delta\gamma = -\frac{4\lambda'\mathbb{K}(\chi)[\mathbb{E}(\chi) - \mathbb{K}(\chi)]}{\sqrt{1 - 4\lambda'\chi\mathbb{K}^2(\chi)} + \sqrt{1 - 4\lambda'(\chi - 1)\mathbb{K}^2(\chi)}}. \quad (3.16)$$

В пределе длинных струн при $(-\chi) \rightarrow \infty$ выражение для $\gamma(\lambda)$ разлагается в ряд по степеням $4\lambda'(-\chi)\mathbb{K}^2(\chi) \sim \lambda'\ln^2(-\chi)$. Исследуя выражение для $\Delta\gamma$, найдем, что его вклад в $\gamma(\lambda)$ подавляется множителем $[\mathbb{E}(\chi) - \mathbb{K}(\chi)]/(-\chi\mathbb{K}(\chi)) \sim 1/\ln(-\chi)$ по сравнению с первым членом в квадратных скобках в выражении (3.15). Отсюда следует, что в пределе $(-\chi) \rightarrow \infty$ при фиксированном $\lambda'\ln^2(-\chi)$ ведущее асимптотическое поведение (3.15) имеет вид

$$\gamma(\lambda) = L\left[\sqrt{1 + \lambda'\ln^2(-\chi)} - 1\right] + \dots. \quad (3.17)$$

Это выражение позволяет пересуммировать все дважды логарифмические поправки $\sim L[\lambda'\ln^2(-\chi)]^n$ к аномальной размерности $\gamma(\lambda)$ во всех порядках разложения по n в режиме сильной связи. В частности, при $n = 1, 2$ получим (3.13). При $\lambda'\ln^2(-\chi) \ll 1$ можно разложить квадратный корень в выражении (3.17) и получить разложение типа БМН (3.9). В то же время при $\lambda'\ln^2(-\chi) \gg 1$ из соотношения (3.17) следует выражение

$$\gamma(\lambda) = L\sqrt{\lambda'}\ln(-\chi) + \dots = \frac{\sqrt{\lambda'}}{\pi}\ln(-\chi) + \dots. \quad (3.18)$$

При $(-\chi) \rightarrow \infty$ зависимость χ от частного N/L и константы связи БМН λ' задается вторым из соотношений (3.8):

$$\frac{1}{4\chi^2} = \frac{L^2}{N^2} \left[\frac{1}{\ln^2(-\chi)} + \lambda' \right]. \quad (3.19)$$

При $\xi_{\text{srt}} < 1$ и $N \gg L$ из выражений (3.19) и (3.14) найдем, что

$$\chi \sim \chi_0 = -\frac{N}{2L} \ln \frac{N}{L}$$

и, таким образом,

$$\gamma(\lambda) = L \left[\sqrt{1 + \frac{\lambda}{(\pi L)^2} \ln^2\left(\frac{N}{L}\right)} - 1 \right] + \dots. \quad (3.20)$$

При $\xi_{\text{srt}} \gg 1$ из соотношений (3.14) и (3.19) получаем $(-\chi) \sim N/(2L\sqrt{\lambda'}) \sim N/\sqrt{\lambda'}$ и

$$\gamma(\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda'}}{\pi} \ln \frac{N}{\sqrt{\lambda'}} + \dots. \quad (3.21)$$

Это выражение воспроизводит правильное асимптотическое поведение для аномальной размерности в режиме (1.3) и находится в согласии с результатами работ [3], [4], [13].

Коэффициент при $\ln N$ в выражении (3.21) задает ведущее асимптотическое поведение аномальной размерности конфигурации типа излома в режиме сильной связи

в $\mathcal{N} = 4$ теории СЯМ. Из соотношений (3.20), (3.21) следует замечательный результат: аномалия типа излома в режиме сильной связи может быть получена путем пересуммирования двойных логарифмических членов $\sim L[\lambda \ln^2(N/L)/L^2]^k$ в разложении для аномальных размерностей операторов старших твистов L и с большим лоренцевым спином $N \gg L$.

3.2. Двухразрезное решение в струнной сигма-модели. В предыдущем разделе было показано, что при $N \gg L$ зависимость аномальной размерности $\gamma(\lambda)$ от константы связи отличается в режимах $\xi_{\text{str}} < 1$ и $\xi_{\text{str}} \gg 1$. В первом случае $\gamma(\lambda)$ допускает разложение типа БМН по степеням λ/L^2 , в то время как во втором случае $\gamma(\lambda)$ зависит от λ не аналитически и имеет логарифмическое поведение $\sim \sqrt{\lambda} \ln N$. Причина такой неаналитичности состоит в том, что при $\xi_{\text{str}} \gg 1$ концевые точки вращающейся струны приближаются к границе пространства AdS , и ведущий вклад в энергию струны или, эквивалентно, в аномальную размерность (3.5) задается областью вблизи двух изломов, $\gamma(\lambda) \sim (\sqrt{\lambda}/\pi)2\rho_0$. Здесь радиальная координата излома имеет поведение $\rho_0 \sim \ln(-\chi)/2 \sim \ln(N/\sqrt{\lambda})/2$ при $\xi_{\text{str}} \gg 1$ (см. уравнения (3.7), (3.19)). Это явление весьма общее [13], [14] и имеет место для классических струнных конфигураций с произвольным числом изломов n . В этом случае каждый излом задает логарифмический вклад в энергию, и аномальная размерность имеет поведение $\gamma(\lambda) = n\sqrt{\lambda}/(2\pi) \ln(N/\sqrt{\lambda})$ при $\xi_{\text{str}} \gg 1$. На первый взгляд, этот механизм представляется весьма отличным от сходного механизма в калибровочной теории. Напомним, что в калибровочной теории логарифмическое поведение аномальных размерностей в однопетлевом приближении при $N \gg L$ возникает при слиянии разрезов спектральной кривой для спиновой цепочки. Известно, что классические уравнения движения для струны в фоновом поле $\text{AdS}_5 \times S^5$ точно интегрируемы, и их решения параметризуются спектральными кривыми. Более того, для струн, лежащих в части подпространства $\text{AdS}_3 \times S^1$, спектральную кривую можно отождествить с комплексной гиперэллиптической кривой [15]. Для сложенной вращающейся замкнутой струны, обсуждаемой в предыдущем разделе, эта кривая задается эллиптической кривой с симметрично расположенными точками ветвления на оси вещественных чисел [16]:

$$\Gamma_{\text{str}}: \quad y^2 = (x^2 - a_{\text{str}}^2)(x^2 - b_{\text{str}}^2), \quad (3.22)$$

где a_{str} и b_{str} принимают положительные значения $b_{\text{str}} < a_{\text{str}}$. В этом разделе мы преобразуем различные асимптотические режимы поведения аномальных размерностей при $N \gg L$, задаваемые выражениями (3.20) и (3.21), в свойства кривой (3.22) и вскроем механизм, ответственный за логарифмическое поведение (3.21).

Подобно классической спиновой цепочке $SL(2)$, классические струнные уравнения движения допускают представление Лакса, и их можно решить точно с помощью конструкции функции Бейкера–Ахиезера [15]. Как и прежде, множитель Блоха–Флоке для этой функции задает (квази)импульс $p(x)$, представляющий собой производящую функцию для сохраняющихся зарядов, включая энергию. Для

сложенной вращающейся струнной конфигурации $p'(x)$ представляет собой функцию, аналитическую в комплексной плоскости с двумя симметрично расположенными разрезами $[-a_{\text{str}}, -b_{\text{str}}] \cup [b_{\text{str}}, a_{\text{str}}]$. Она однозначно задается требованием, утверждающим, что $dp = p'(x) dx$ представляет собой мероморфный дифференциал на комплексной кривой (3.22), удовлетворяющий следующим условиям на верхнем листе римановой поверхности Γ_{str} [16]:

– предписанному асимптотическому поведению на бесконечности и в начале отсчета:

$$dp \stackrel{x \rightarrow \infty}{\sim} -2 \frac{dx}{x^2} \frac{E+N}{L}, \quad dp \stackrel{x \rightarrow 0}{\sim} -dx \frac{2}{\lambda'} \frac{E-N}{L} l; \quad (3.23)$$

– условию однозначности:

$$\int_{b_{\text{str}}}^{a_{\text{str}}} dp = 0, \quad \int_{a_{\text{str}}}^{\infty} dp = -\pi m; \quad (3.24)$$

– наличию двойных полюсов в точках $x = \pm \sqrt{\lambda}/(\pi L) \equiv \sqrt{\lambda'}$:

$$dp \sim dx \left[-\frac{1}{(x \pm \sqrt{\lambda'})^2} + O((x \pm \sqrt{\lambda'})^0) \right]. \quad (3.25)$$

Окончательное выражение для дифференциала dp имеет вид

$$dp = \frac{dx}{y} \left[\frac{y_+}{(x - \sqrt{\lambda'})^2} + \frac{y'_+}{x - \sqrt{\lambda'}} + \frac{y_+}{(x + \sqrt{\lambda'})^2} - \frac{y'_+}{x + \sqrt{\lambda'}} + C \right], \quad (3.26)$$

где $y = y(x)$ задано соотношением (3.22), $y_+ = y(\sqrt{\lambda'})$ и $y'_+ = y'(\sqrt{\lambda'})$.

Уравнение (3.26) зависит от трех параметров: a_{str} , b_{str} и C . Они фиксируются условиями нормировки (3.23) и (3.24):

$$b_{\text{str}} = \frac{1}{m\mathbb{K}(\tau)} \left[\left(1 - \frac{\lambda'}{a_{\text{str}}^2} \right) \left(1 - \frac{\lambda'}{b_{\text{str}}^2} \right) \right]^{-1/2}, \quad (3.27)$$

$$C = -\frac{ma_{\text{str}}}{2} \left[\mathbb{E}(\tau) - \frac{\lambda'}{a_{\text{str}}^2} \mathbb{K}(\tau) \right],$$

где модулярный параметр $\tau = 1 - b_{\text{str}}^2/a_{\text{str}}^2$. Дополнительно из (3.23) можно найти следующие соотношения для N/L и аномальной размерности $\gamma(\lambda) = E - N - L$:

$$\frac{N}{L} = \frac{m}{2} \left[\mathbb{E}(\tau) \left(a_{\text{str}} + \frac{\lambda'}{b_{\text{str}}} \right) - \mathbb{K}(\tau) \left(b_{\text{str}} + \frac{\lambda'}{a_{\text{str}}} \right) \right], \quad (3.28)$$

$$\frac{\gamma(\lambda)}{L} = m \left[\mathbb{K}(\tau) b_{\text{str}} - \mathbb{E}(\tau) \frac{\lambda'}{b_{\text{str}}} \right] - 1,$$

где b_{str} определено первым из выражений (3.27) и $a_{\text{str}} = b_{\text{str}}/\sqrt{1-\tau}$.

Исследуем зависимость аномальной размерности от константы связи $\lambda' = \lambda/(\pi L)^2$. Предполагая, что обе величины b_{str} и τ допускают регулярное разложение по степеням λ' , можно подставить эти разложения в (3.27), (3.28):

$$b_{\text{str}} = b_{\text{str}}^{(0)} + \lambda' b_{\text{str}}^{(1)} + \dots, \quad \tau = \tau^{(0)} + \lambda' \tau^{(1)} + \dots, \quad (3.29)$$

и сравнить коэффициенты при различных степенях λ' . Таким образом, в ведущем порядке получим

$$b_{\text{str}}^{(0)} = \frac{1}{m\mathbb{K}(\tau^{(0)})}, \quad \frac{N}{L} = \frac{1}{2} \left[\frac{\mathbb{E}(\tau^{(0)})}{\sqrt{1-\tau^{(0)}}\mathbb{K}(\tau^{(0)})} - 1 \right], \quad (3.30)$$

а все поправки к выражению (3.29) могут быть выражены через лидирующие члены. Тогда первые коэффициенты ряда БМН для аномальной размерности (3.9) задаются выражениями

$$\gamma^{(0)} = \frac{m^2}{2} \mathbb{K}(\tau^{(0)}) \left[(2 - \tau^{(0)}) \mathbb{K}(\tau^{(0)}) - 2\mathbb{E}(\tau^{(0)}) \right], \quad (3.31)$$

$$\gamma^{(1)} = \frac{m^4}{8} \mathbb{K}^3(\tau^{(0)}) \left[\left(4(2 - \tau^{(0)})\sqrt{1 - \tau^{(0)}} - (\tau^{(0)})^2 \right) \mathbb{K}(\tau^{(0)}) - 8\sqrt{1 - \tau^{(0)}}\mathbb{E}(\tau^{(0)}) \right]. \quad (3.32)$$

Вместе со вторым из соотношений (3.30) они задают параметрическую зависимость аномальной размерности (3.9) от N/L .

Функциональное выражение для аномальных размерностей (3.28) отличается от найденных в предыдущем пункте выражений (3.8). Соответствия можно достичь, если применить преобразование Ландена для модулярных параметров [9]

$$\chi^{(0)} = -\frac{(1 - \sqrt{1 - \tau^{(0)}})^2}{4\sqrt{1 - \tau^{(0)}}}, \quad (3.33)$$

после которого соотношения (3.8) и (3.28) совпадут в случае $m = 1$. Напомним, что $(-\chi)$ зависит от радиальной координаты излома ρ_0 , так что $\sqrt{1 - \tau} = e^{-2\rho_0}$, а предел длинных струн $\rho_0 \rightarrow \infty$ отвечает пределу $\tau \rightarrow 1$. Предельный переход $\tau \rightarrow 1$ отвечает $a \rightarrow 1/(2m)$ и $b \rightarrow 0$ с точки зрения калибровочной теории. Вследствие этого два разреза $[-a, -b]$ и $[b, a]$ сливаются в начале отсчета, обеспечивая тем самым логарифмическое масштабное поведение для однопетлевой аномальной размерности (2.10). Изучим теперь предельный переход $\tau \rightarrow 1$ для полученных струнных выражений (3.27), (3.28).

Так как $\mathbb{K}(\tau) \sim -\ln(1 - \tau)/2$ при $\tau \rightarrow 1$, на основании первого равенства в (3.27) следует ожидать, что b_{str} в этом пределе обратится в нуль. Это действительно так при $\lambda' = 0$, в то время как при $\lambda' \neq 0$ из (3.27) можно получить следующее: условие вещественности для b_{str} предполагает, что его минимальное значение должно удовлетворять условию $b_{\text{str}} \geq \sqrt{\lambda'}$. Внимательно исследуя первое из соотношений (3.27) при $\tau \rightarrow 1$, получим

$$b_{\text{str}} = \sqrt{\lambda' + \frac{1}{m^2 \ln^2 \sqrt{1 - \tau}}}. \quad (3.34)$$

При $\lambda' = 0$ это соотношение совпадает с однопетлевым выражением $b_{\text{str}}^{(0)} = 2b/\beta$. Сравнивая (3.29) и (3.34), можно заключить, что поправки старших порядков в b_{str} отодвигают его минимальное значение от начала отсчета, предотвращая тем самым

слияние двух разрезов $[-a_{\text{str}}, -b_{\text{str}}]$ и $[b_{\text{str}}, a_{\text{str}}]$. Из (3.28) следует, что в пределе $\tau \rightarrow 1$

$$\beta \approx \frac{L}{2N} = \frac{\sqrt{1-\tau}}{m b_{\text{str}}} + \dots, \quad \gamma(\lambda) = L [-m b_{\text{str}} \ln \sqrt{1-\tau} - 1] + \dots. \quad (3.35)$$

Асимптотическое поведение этих выражений зависит от величины параметра $\xi_{\text{str}} = \lambda' \ln^2(N/L)$ (см. уравнение (3.14)).

При $\xi_{\text{str}} < 1$ выражение для b_{str} (см. уравнение (3.34)) допускает разложение в ряд по степеням λ' и приводит с учетом условий (3.35) к выражениям

$$b_{\text{str}} = \frac{1}{m \ln(N/L)} + \dots, \quad a_{\text{str}} = \frac{N}{2mL} + \dots, \quad \sqrt{1-\tau} = \frac{L/N}{2 \ln(N/L)} + \dots. \quad (3.36)$$

Посредством подстановки (3.34) в (3.35) можно получить выражение для аномальной размерности $\gamma(\lambda)$, которое совпадает с (3.20) при $m = 1$. Полезно сравнить положения разрезов a и b в калибровочной теории и $\hat{a} = \beta a_{\text{str}}/2$ и $\hat{b} = \beta b_{\text{str}}/2$ в струнной теории. Дополнительный множитель $\beta/2$ возникает здесь ввиду различного определения локального параметра x на спектральных кривых (2.6) и (3.22). Таким образом, можно найти, что $\hat{a} = 1/(2m) + \dots$ и $\hat{b} = (L/N)/(4m \ln(N/L)) + \dots$, и эти формулы совпадают с аналогичными выражениями в калибровочной теории с точностью до однопетлевых поправок.

При $\xi_{\text{str}} \gg 1$ выражение для b_{str} (см. (3.34)) оказывается неаналитическим по константе связи БМН $\lambda' = \lambda/(\pi L)^2$:

$$b_{\text{str}} = \sqrt{\lambda'} + \dots, \quad a_{\text{str}} = \frac{N}{2mL} + \dots, \quad \sqrt{1-\tau} = \frac{Lm}{2N} \sqrt{\lambda'} + \dots, \quad (3.37)$$

в то время как выражение для a_{str} такое же, как и в формуле (3.36). Отсюда можно предположить, что поправки старших порядков при $\xi_{\text{str}} \gg 1$ изменяют только низшую точку разреза. Из (3.35) можно найти, что аномальная размерность имеет масштабное поведение $\gamma(\lambda) \sim m\sqrt{\lambda} \ln(N/(m\sqrt{\lambda}))$ и находится в согласии с выражением (3.21) при $m = 1$. Мы можем заключить, что логарифмическое масштабное поведение аномальной размерности при $N \gg L$ с точки зрения струнной теории реализуется, когда нижняя граница b_{str} разреза приближается к своему минимальному возможному значению $\sqrt{\lambda'}$, которое совпадает с положением двойного полюса дифференциала (3.25).

Благодарности. Работа была частично поддержана CRDF (грант CRDF-RUP2-261-МО-04) и РФФИ (грант № 04-01-00646).

Список литературы

- [1] J. M. Maldacena, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **2** (1998), 231; S. S. Gubser, I. R. Klebanov, A. M. Polyakov, *Phys. Lett. B*, **428** (1998), 105; E. Witten, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **2** (1998), 253.
- [2] A. V. Belitsky, A. S. Gorsky, G. P. Korchemsky, *Nucl. Phys. B*, **748** (2006), 24; [hep-th/0601112](#).
- [3] S. Frolov, A. A. Tseytlin, *JHEP*, **06** (2002), 007; [hep-th/0204226](#).

- [4] S. S. Gubser, I. R. Klebanov, A. M. Polyakov, *Nucl. Phys. B*, **636** (2002), 99; [hep-th/0204051](#).
- [5] D. Berenstein, J. M. Maldacena, H. Nastase, *JHEP*, **04** (2002), 013; [hep-th/0202021](#).
- [6] A. A. Tseytlin, “Spinning strings and AdS/CFT duality”, *From Fields to Strings: Circumnavigating Theoretical Physics*, Ian Kogan memorial collection, vol. 2, eds. M. Shifman, A. Vainshtein, J. Wheeler, World Scientific, River Edge, NJ, 2005, 1648; [hep-th/0311139](#).
- [7] V. M. Braun, S. E. Derkachov, A. N. Manashov, *Phys. Rev. Lett.*, **81** (1998), 2020; [hep-ph/9805225](#); V. M. Braun, S. E. Derkachov, G. P. Korchemsky, A. N. Manashov, *Nucl. Phys. B*, **553** (1999), 355; [hep-ph/9902375](#); A. V. Belitsky, *Phys. Lett. B*, **453** (1999), 59; [hep-ph/9902361](#); *Nucl. Phys. B*, **558** (1999), 259; [hep-ph/9903512](#); **574** (2000), 407; [hep-ph/9907420](#); S. E. Derkachov, G. P. Korchemsky, A. N. Manashov, *Nucl. Phys. B*, **566** (2000), 203; [hep-ph/9909539](#).
- [8] A. V. Belitsky, V. M. Braun, A. S. Gorsky, G. P. Korchemsky, *Int. J. Mod. Phys. A*, **19** (2004), 4715; [hep-th/0407232](#).
- [9] N. Beisert, M. Staudacher, S. Frolov, A. A. Tseytlin, *JHEP*, **10** (2003), 037; [hep-th/0308117](#).
- [10] R. J. Baxter, *Ann. Physics*, **70** (1972), 193; Р. Бэкстер, *Точно решаемые модели в статистической механике*, Мир, М., 1985.
- [11] Н. Ю. Решетихин, Ф. А. Смирнов, *Записки науч. сем. ЛОМИ*, **131** (1983), 128.
- [12] G. P. Korchemsky, I. M. Krichever, *Nucl. Phys. B*, **505** (1997), 387; [hep-th/9704079](#).
- [13] M. Kruczenski, *JHEP*, **08** (2005), 014; [hep-th/0410226](#).
- [14] A. V. Belitsky, A. S. Gorsky, G. P. Korchemsky, *Nucl. Phys. B*, **667** (2003), 3; [hep-th/0304028](#).
- [15] И. М. Кричевер, *Функц. анализ и его прилож.*, **28**:1 (1994), 26.
- [16] V. A. Kazakov, K. Zarembo, *JHEP*, **10** (2004), 060; [hep-th/0410105](#).