Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Исаев, Функциональные уравнения для трансфер-
матричных операторов в моделях открытых цепочек
Гекке, *ТМФ*, 2007, том 150, номер 2, 219–236

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf5975>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 04:29:48

© 2007 г.

А. П. Исаев*

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ТРАНСФЕР-МАТРИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ В МОДЕЛЯХ ОТКРЫТЫХ ЦЕПОЧЕК ГЕККЕ

Рассмотрены интегрируемые модели открытых цепочек, сформулированные в терминах образующих аффинных алгебр Гекке. С помощью fusion-процедуры (процедуры слияния) построена иерархия коммутирующих элементов, которые являются аналогами коммутативных трансфер-матриц. Эти элементы удовлетворяют набору функциональных соотношений, которые обобщают функциональные соотношения для семейства трансфер-матриц в решаемых моделях спиновых цепочек $U_q(gl(n|m))$ -типа.

Ключевые слова: интегрируемые модели спиновых цепочек, аффинная алгебра Гекке, алгебра Темперли–Либа, трансфер-матрица.

1. ВВЕДЕНИЕ

В нашей недавней работе [1] были найдены неполиномиальные бакстеризованные решения уравнения отражения, ассоциированного с аффинными алгебрами Гекке и аффинными алгебрами Бирмана–Мураками–Венцеля. Из этих решений в случае алгебры Гекке можно получить (детали изложены в [1]) полиномиальные решения, предложенные в [2]. В [1] также обсуждались связи с интегрируемыми моделями на цепочках с нетривиальными граничными условиями.

В данной работе мы сконцентрируемся на исследовании моделей, сформулированных в терминах образующих аффинной алгебры Гекке. Пусть сплетающие элементы $\{\sigma_1, \dots, \sigma_M\}$ и аффинный элемент y_1 являются образующими аффинной алгебры Гекке $\hat{H}_{M+1}(q)$ (определение алгебры $\hat{H}_{M+1}(q)$ дано в следующем разделе). В работе [1] мы предложили рассматривать модели на открытой цепочке с гамильтонианом

$$\mathcal{H}_M = \sum_{k=1}^M \sigma_k + (q - q^{-1}) \frac{\xi}{y_1 - \xi}, \quad (1)$$

где q – параметр алгебры $\hat{H}_{M+1}(q)$, а ξ – параметр модели, который определяет граничное условие и возникает в данном гамильтониане в результате использования

*Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия.
E-mail: isaevap@theor.jinr.ru

неполиномиального решения [1]

$$y_1(x) = \frac{y_1 - \xi x}{y_1 - \xi x^{-1}}$$

(здесь x – спектральный параметр) уравнения отражения, ассоциированного с аффинной алгеброй Гекке. Модель с гамильтонианом (1) обобщает XXZ -модель на открытой спиновой цепочке. Действительно, как было показано в [1], эта модель описывает единым образом целый набор интегрируемых систем для любого представления алгебры $\hat{H}_{M+1}(q)$. Наиболее интересны (с точки зрения приложений) так называемые R -матричные представления $\hat{H}_{M+1}(q)$. Известно, что алгебра Гекке может быть реализована с помощью R -матриц в фундаментальном представлении (фундаментальных R -матриц) для случая $U_q(gl(n))$ [3], [4] и для случая $U_q(gl(n|m))$ [5]. В случае $U_q(gl(n|m))$ эта реализация имеет вид

$$\rho(\sigma_i) = I^{\otimes(i-1)} \otimes \hat{R} \otimes I^{\otimes(M-i)} =: \hat{R}_{ii+1},$$

где $I \in \text{Mat}(n+m)$ – единичная матрица и $\hat{R}$ – фундаментальная R -матрица для $U_q(gl(n|m))$, записанная в форме образующей группы кос. Для аффинной образующей мы имеем

$$\rho(y_1) = L \otimes I^{\otimes M} =: L_1,$$

где элементы матрицы $L \in \text{Mat}(n+m)$ являются генераторами алгебры уравнения отражения $U_q(gl(n|m))$ -типа $\hat{R}_{12}L_1\hat{R}_{12}L_1 = L_1\hat{R}_{12}L_1\hat{R}_{12}$. Все эти R -матричные представления ρ ведут к интегрируемым системам на цепочках с гамильтонианами $\rho(\mathcal{H}_M)$. Рассматривая для алгебры $\hat{H}_{M+1}$ специальное представление ρ , соответствующее R -матрице $U_q(gl(2))$ -типа, мы воспроизводим из (1) гамильтониан XXZ -модели открытой спиновой цепочки. В дальнейшем мы называем модель с гамильтонианом (1), построенную в терминах образующих алгебры Гекке $\hat{H}_{M+1}$, моделью *открытой цепочки Гекке*.

В данной статье для модели открытой цепочки Гекке с помощью алгебраического аналога fusion-процедуры [6], [7] построена иерархия коммутирующих элементов (аналогов трансфер-матриц). Оказывается, что эти элементы удовлетворяют функциональным соотношениям, которые обобщают функциональные соотношения для трансфер-матриц в решаемых моделях на открытых спиновых цепочках (см., например, [8] и ссылки, приведенные в этих работах).

Структура статьи следующая. В разделе 2 мы даем определение аффинной алгебры Гекке и напоминаем алгебраическую формулировку [1] системы открытой цепочки Гекке. В частности, мы исследуем коммутирующие элементы трансфер-матричного типа, которые являются производящими функциями гамильтонианов для рассматриваемой модели. В разделе 3 представлено алгебраическое описание fusion-процедуры для решений уравнения отражения и для соответствующих коммутирующих элементов, аналогичных трансфер-матрицам. В этом разделе мы выводим функциональные соотношения для таких коммутирующих элементов в модели открытой цепочки Гекке. В разделах 4 и 5 мы обсуждаем фактор Темперли–Либа

для алгебры Гекке и формулируем соответствующую модель цепочки Гекке, в которой удастся получить замкнутые функциональные уравнения для элементов типа трансфер-матриц. Заметим, что наш анализ связан с подходом, который предложен в [9] для исследования систем спиновых цепочек, построенных с использованием R -матриц, реализующих алгебру Темперли–Либа. В заключении мы кратко обсуждаем взаимосвязи между алгебраическим подходом этой статьи и стандартной техникой уравнений отражения, развитой в [10] для исследования систем открытых цепочек.

2. ОТКРЫТЫЕ ЦЕПОЧКИ ГЕККЕ

Группа кос $\mathcal{B}_{M+1}$ генерируется элементами σ_i , $i = 1, \dots, M$, которые удовлетворяют соотношениям

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{для} \quad |i - j| > 1. \quad (2)$$

Алгебра Гекке A -типа $H_{M+1}(q)$ является фактором групповой алгебры группы кос $\mathcal{B}_{M+1}$ по дополнительным соотношениям Гекке

$$\sigma_i^2 - 1 = \lambda \sigma_i \quad (i = 1, \dots, M), \quad (3)$$

где $\lambda := (q - q^{-1})$ и $q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ – параметр алгебры. Пусть $x \in \mathbb{C}$ – спектральный параметр. Определим бакстеризованные элементы [3] (см. также [5], [11])

$$\sigma_n(x) := \sigma_n - x \sigma_n^{-1} \in H_{M+1}(q), \quad (4)$$

которые являются решениями уравнения Янга–Бакстера

$$\sigma_n(x) \sigma_{n-1}(xy) \sigma_n(y) = \sigma_{n-1}(y) \sigma_n(xy) \sigma_{n-1}(x) \quad (5)$$

и удовлетворяют соотношению $\sigma_n(x) \sigma_n(y) = \lambda \sigma_n(xy) + (1 - x)(1 - y)$. Нормализованные элементы [1]

$$e_n^-(x) := \frac{\sigma_n - x \sigma_n^{-1}}{qx - q^{-1}}, \quad e_n^+(x) := \frac{\sigma_n - x \sigma_n^{-1}}{q - q^{-1}x} \quad (6)$$

подчиняются условиям унитарности $e_n^+(x) e_n^+(x^{-1}) = 1$, $e_n^-(x) e_n^-(x^{-1}) = 1$. Эти нормализованные элементы полезны для определения симметризаторов $A_{1 \rightarrow n}^+$ и антисимметризаторов $A_{1 \rightarrow n}^-$ ($n = 1, 2, \dots, M + 1$) для алгебры Гекке $H_{M+1} := H_{M+1}(q)$. Операторы $A_{1 \rightarrow n}^\pm$ определяются индуктивно с помощью рекуррентных соотношений [3] (см. также [11] и ссылки, приведенные там)

$$A_{1 \rightarrow n+1}^\pm = A_{1 \rightarrow n}^\pm e_n^\pm(q^{\mp 2n}) A_{1 \rightarrow n}^\pm, \quad A_{1 \rightarrow 1}^\pm := 1 \quad (7)$$

и удовлетворяют равенствам

$$\begin{aligned} \sigma_i A_{1 \rightarrow n}^\pm &= A_{1 \rightarrow n}^\pm \sigma_i = \pm q^{\pm 1} A_{1 \rightarrow n}^\pm \quad (i = 1, \dots, n - 1), \\ A_{1 \rightarrow n}^\pm A_{1 \rightarrow m}^\pm &= A_{1 \rightarrow n}^\pm = A_{1 \rightarrow m}^\pm A_{1 \rightarrow n}^\pm \quad (n \geq m); \quad A_{1 \rightarrow n}^\pm A_{1 \rightarrow m}^\mp = 0, \\ e_i^\pm(x) A_{1 \rightarrow n}^\pm &= A_{1 \rightarrow n}^\pm e_i^\pm(x) = A_{1 \rightarrow n}^\pm \quad (i = 1, \dots, n - 1). \end{aligned} \quad (8)$$

Аффинная алгебра Гекке $\hat{H}_{M+1}$ (см., например, главу 12.3 в книге [12]) есть расширение алгебры Гекке H_{M+1} . Алгебра $\hat{H}_{M+1}$ генерируется элементами σ_i ($i = 1, \dots, M$) алгебры H_{M+1} и аффинными образующими y_k ($k = 1, \dots, M+1$), которые удовлетворяют соотношениям

$$y_{k+1} = \sigma_k y_k \sigma_k, \quad y_k y_j = y_j y_k, \quad y_j \sigma_i = \sigma_i y_j \quad (j \neq i, i+1). \quad (9)$$

Элементы $\{y_k\}$ формируют коммутативную подалгебру в $\hat{H}_{M+1}$, в то время как симметрические функции от переменных y_k центральны в алгебре $\hat{H}_{M+1}$.

С помощью индукции можно доказать, что элемент

$$y_n(x) = \sigma_{n-1} \left(\frac{x}{\xi_{n-1}} \right) \dots \sigma_2 \left(\frac{x}{\xi_2} \right) \sigma_1 \left(\frac{x}{\xi_1} \right) y_1(x) \sigma_1(x\xi_1) \sigma_2(x\xi_2) \dots \sigma_{n-1}(x\xi_{n-1}) \quad (10)$$

является решением (для любого $\xi_1, \dots, \xi_{n-1} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$) уравнения отражения

$$\sigma_n(xz^{-1}) y_n(x) \sigma_n(xz) y_n(z) = y_n(z) \sigma_n(xz) y_n(x) \sigma_n(xz^{-1}), \quad (11)$$

где $y_1(x) \in \hat{H}_{M+1}$ – любое *локальное* (т.е. $[y_1(x), \sigma_k] = 0$ при $k > 1$) решение уравнения (11) для $n = 1$. В работе [1] мы нашли такое локальное решение, которое является рациональной функцией переменной y_1 :

$$y_1(x) = \frac{y_1 - \xi x}{y_1 - \xi x^{-1}}, \quad (12)$$

где y_1 – аффинная образующая алгебры $\hat{H}_{M+1}$ и $\xi \in \mathbb{C}$ – произвольный параметр. Оператор $y_1(x)$ (12) является регулярным: $y_1(1) = 1$, и подчиняется условию унитарности $y_1(x) y_1(x^{-1}) = 1$. Ниже мы рассматриваем специальную форму элемента (10) алгебры Гекке, когда все $\xi_k = 1$:

$$y_n(x) = \sigma_{n-1}(x) \dots \sigma_2(x) \sigma_1(x) y_1(x) \sigma_1(x) \sigma_2(x) \dots \sigma_{n-1}(x). \quad (13)$$

Этот элемент является алгебраическим аналогом матрицы монодромии Складина [10]. Он был использован в [1] для построения интегрируемых систем на цепочках.

Рассмотрим следующее естественное включение подалгебр $\hat{H}_1 \subset \hat{H}_2 \subset \dots \subset \hat{H}_{M+1}$:

$$\{y_1; \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}\} = \hat{H}_n \subset \hat{H}_{n+1} = \{y_1; \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, \sigma_n\}.$$

Далее, следуя работе [1], мы оснащаем алгебру $\hat{H}_{M+1}$ линейными отображениями

$$\text{Tr}_{D(n+1)}: \hat{H}_{n+1} \rightarrow \hat{H}_n$$

из алгебр $\hat{H}_{n+1}$ в их подалгебры $\hat{H}_n$, причем эти отображения таковы, что для всех $X, X' \in \hat{H}_n$ и $Y \in \hat{H}_{n+1}$

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{D(n+1)}(X) &= D^{(0)}X, & \text{Tr}_{D(n+1)}(XYX') &= X \text{Tr}_{D(n+1)}(Y)X', \\ \text{Tr}_{D(n+1)}(\sigma_n^{\pm 1} X \sigma_n^{\mp 1}) &= \text{Tr}_{D(n)}(X), & \text{Tr}_{D(n+1)}(X \sigma_n X') &= X X', \\ \text{Tr}_{D(1)}(y_1^k) &= D^{(k)}, & \text{Tr}_{D(n)} \text{Tr}_{D(n+1)}(\sigma_n Y) &= \text{Tr}_{D(n)} \text{Tr}_{D(n+1)}(Y \sigma_n), \end{aligned} \quad (14)$$

где $D^{(k)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ($k \in \mathbb{Z}$) являются константами. Подчеркнем, что объекты $D^{(k)}$ могли бы рассматриваться как добавочные образующие абелевой подалгебры $\hat{H}_0$, которая расширяет $\hat{H}_{M+1}$ и является центральной в $\hat{H}_{M+1}$. Однако для дальнейших рассуждений нам достаточно считать $D^{(k)}$ константами.

Используя отображения $\text{Tr}_{D(n+1)}$, мы можем показать, что бакстеризованные элементы $\sigma_n(x)$ (4) подчиняются следующему тождеству (для всех $X \in \hat{H}_n$ и любых x, z):

$$\text{Tr}_{D(n+1)}(\sigma_n(x)X\sigma_n(z)) = (1-x)(1-z)\text{Tr}_{D(n)}(X) + \lambda\left(1 - \frac{xz}{b}\right)X, \quad (15)$$

где

$$b := \frac{1}{1 - \lambda D^{(0)}}.$$

Применяя это тождество к уравнению отражения (11), мы получаем

$$[\tau_{n-1}(x), y_n(z)] = \frac{\lambda(xb^{-1} - x^{-1})}{((x + x^{-1}) - (z + z^{-1}))} [y_n(x), y_n(z)],$$

где операторы

$$\tau_n(x) = \text{Tr}_{D(n+1)}(y_{n+1}(x)) \quad (16)$$

образуют коммутативное семейство, $[\tau_n(x), \tau_n(z)] = 0$ (для любых x, z) [1].

Теперь мы сформулируем модели открытых цепочек Гекке, используя алгебраические аналоги трансфер-матриц Складина [10]. В нашем случае такие аналоги (трансфер-матричные операторы $\tau_n(x)$) являются элементами алгебры $\hat{H}_n$ и представляются в виде (16), где решение $y_{n+1}(x)$ уравнения отражения выбрано в специальном виде (13):

$$\tau_n(x) = \text{Tr}_{D(n+1)}(y_{n+1}(x)) = \text{Tr}_{D(n+1)}(\sigma_n(x) \dots \sigma_1(x)y_1(x)\sigma_1(x) \dots \sigma_n(x)), \quad (17)$$

а $y_1(x)$ является любым локальным и регулярным решением уравнения (11) для $n = 1$ (например, можно взять решение (12)). Локальный гамильтониан для открытой цепочки Гекке имеет вид

$$\mathcal{H}_n = \sum_{m=1}^{n-1} \sigma_m - \frac{\lambda}{2} y_1'(1). \quad (18)$$

Этот гамильтониан (с точностью до нормировочной и аддитивной констант) может быть получен дифференцированием $\tau_n(x)$ по x в точке $x = 1$. Гамильтониан (18) описывает модель открытой цепочки с нетривиальным граничным условием на первом узле цепочки (которое задается вторым членом в (18)) и свободным граничным условием на последнем узле. Гамильтониан (1) получается подстановкой решения (12) в (18).

Из (15) следует, что трансфер-матричный оператор $\tau_n(x)$ (17) удовлетворяет рекуррентному уравнению

$$\tau_n(x) = \lambda\left(1 - \frac{x^2}{b}\right)y_n(x) + (1-x)^2\tau_{n-1}(x), \quad (19)$$

которое имеет решение вида

$$\tau_n(x) = \lambda \left(1 - \frac{x^2}{b}\right) \left(\sum_{k=0}^{n-1} (1-x)^{2k} y_{n-k}(x)\right) + (1-x)^{2n} \text{Tr}_{D(1)}(y_1(x)), \quad (20)$$

где элементы монодромии $y_k(x)$ (13) являются решениями уравнения отражения (11) для $n = k$.

Рассмотрим модель открытой цепочки Гекке со свободными граничными условиями на обоих концах цепочки, т.е. при условии $y_1(x) = 1$. В этом случае из (20) мы выводим, что

$$\begin{aligned} \tau_n(x)|_{y_1(x)=1} &= \text{Tr}_{D(n+1)}(\sigma_n(x) \dots \sigma_2(x) \sigma_1^2(x) \sigma_2(x) \dots \sigma_n(x)) = \\ &= \lambda \left(1 - \frac{x^2}{b}\right) J_n(x) + (1-x)^{2n} D^{(0)} =: T_n^{(1)}(x), \end{aligned} \quad (21)$$

где $J_n(x)$ – специальный полином от спектрального параметра x порядка $2n - 2$,

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \left(\sum_{k=0}^{n-2} (1-x)^{2k} \sigma_{n-k-1}(x) \dots \sigma_1^2(x) \dots \sigma_{n-k-1}(x)\right) + (1-x)^{2(n-1)} = \\ &= \lambda(1+x) \left(\sum_{a=1}^{2n-3} (1-x)^a (\lambda x)^{2n-3-a} j_a\right) + f_n(x), \end{aligned} \quad (22)$$

и $f_n(x)$ – скалярные полиномиальные функции от x ,

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-2} (1-x)^{2k} ((1-x)^2 + \lambda^2 x^2)^{n-k-1} + (1-x)^{2(n-1)}.$$

Представление (22) следует из уравнений

$$\sigma_k(x) = (1-x)\sigma_k + \lambda x, \quad \sigma_k^2(x) = \lambda(1+x)(1-x)\sigma_k + [(1-x)^2 + \lambda^2 x^2].$$

Так как элементы трансфер-матричного типа $\tau_n(x)$ образуют коммутативное семейство, $[\tau_n(x), \tau_n(z)] = 0$, то мы получаем из (21), (22) набор $\{j_1, j_2, \dots, j_{2n-3}\}$ из $2n - 3$ коммутативных элементов для алгебры Гекке H_n . Ясно, что

$$\begin{aligned} J_n(0) &= \sigma_{n-1} \dots \sigma_1^2 \dots \sigma_{n-1} + \sigma_{n-2} \dots \sigma_1^2 \dots \sigma_{n-2} + \dots + \sigma_1^2 + 1 = \\ &= \lambda \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{k=1}^m (\sigma_k \dots \sigma_{m-1} \sigma_m \sigma_{m-1} \dots \sigma_k) + n = \lambda j_{2n-3} + f_n(0), \end{aligned}$$

и, соответственно, старший оператор j_{2n-3} – центральный элемент в H_n . С другой стороны, мы имеем

$$J'_n(1) = -2\lambda^{2n-3} \left(\sum_{m=1}^{n-1} \sigma_m\right) + 2\lambda^{2n-2}(n-1) = -2\lambda^{2n-3} j_1 + f'_n(1)$$

и в соответствии с (18) получаем, что первый коэффициент в разложении (22),

$$j_1 = \mathcal{H}_n^{(\text{free})} = \sum_{m=1}^{n-1} \sigma_m, \quad (23)$$

равен гамильтониану для открытой цепочки Гекке со свободными концами.

Для первого нетривиального случая $n = 3$ мы имеем набор коммутирующих элементов

$$j_1 = \sigma_1 + \sigma_2, \quad j_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_1, \quad j_3 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1 + \sigma_2. \quad (24)$$

Элемент j_1 совпадает с гамильтонианом $\mathcal{H}_3^{(\text{free})}$ для открытой цепочки Гекке, а j_3 – центральный элемент в H_3 . Характеристическое тождество для гамильтониана $j_1 = \mathcal{H}_3^{(\text{free})}$ находится непосредственно:

$$(j_1 + 2q^{-1})(j_1 - 2q)(j_1 - \lambda - 1)(j_1 - \lambda + 1) = 0;$$

оно означает, что $\text{Spec}(\mathcal{H}_3^{(\text{free})}) = \{2q, -2q^{-1}, \lambda \pm 1\}$. Два первых собственных значения $\pm 2q^{\pm 1}$ соответствуют одномерным представлениям $\sigma_i = \pm q^{\pm 1}$ ($i = 1, 2$) алгебры H_3 . Дублет $\lambda \pm 1$ соответствует двумерному неприводимому представлению H_3 (по поводу теории представлений алгебр Гекке см. [11], [13] и ссылки, приведенные в этих работах).

Для случая $n = 4$ мы получаем следующий набор коммутирующих элементов:

$$\begin{aligned} j_1 &= \sum_{i=1}^3 \sigma_i, & j_2 &= \{\sigma_1, \sigma_2\}_+ + \{\sigma_2, \sigma_3\}_+ + 2\sigma_3\sigma_1, \\ j_3 &= \{\sigma_1\sigma_3, \sigma_2\}_+ + (\sigma_1 + \sigma_3)\sigma_2(\sigma_1 + \sigma_3) + \lambda\sigma_3\sigma_1 + 2\sum_{i=1}^3 \sigma_i, \\ j_4 &= \{\sigma_2\sigma_3\sigma_2, \sigma_1\}_+ + \{\sigma_2\sigma_1\sigma_2, \sigma_3\}_+ + \{\sigma_2, \sigma_3\}_+ + \{\sigma_2, \sigma_1\}_+, \\ j_5 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_2\sigma_1 + \sigma_2\sigma_3\sigma_2 + \sigma_1\sigma_2\sigma_1 + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \end{aligned}$$

Коэффициент j_5 является центральным элементом в H_4 . Заметим, что наиболее длинный элемент в H_4 вида $j = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = (j_5 - j_1)(j_1 - \lambda) - j_4$ коммутирует с гамильтонианом $j_1 = \mathcal{H}_4^{(\text{free})}$. Спектр $\mathcal{H}_4^{(\text{free})}$ состоит из следующих собственных значений: $\pm 3q^{\pm 1}$ для двух одномерных представлений, $2q - q^{-1}$, $2q - q^{-1} \pm \sqrt{2}$ и $-2q^{-1} + q$, $-2q^{-1} + q \pm \sqrt{2}$ для двух дуальных друг к другу трехмерных неприводимых представлений и из собственных значений $(3\lambda \pm \sqrt{q^{-2} + 10 + q^2})/2$ для двумерного неприводимого представления H_4 .

ЗАМЕЧАНИЕ. Рассмотрим элемент j в группе $\text{kos } B_{M+1}$:

$$j := (\sigma_1 \dots \sigma_M)(\sigma_1 \dots \sigma_{M-1}) \dots (\sigma_1 \sigma_2) \cdot \sigma_1.$$

Этот элемент коммутирует с элементом $\sum_{i=1}^M \sigma_i$ групповой алгебры группы $\text{kos } B_{M+1}$, так как $\sigma_i j = j \sigma_{M+1-i}$. Таким образом, для фактора Гекке H_{M+1} групповой алгебры группы B_{M+1} элемент $j \in H_{M+1}$ является сохраняющимся зарядом модели

на цепочке с гамильтонианом $\mathcal{H}_{M+1}^{(\text{free})}$ (23). Используя наиболее длинный элемент $j \in H_n$, мы можем показать, что операторы (21), (22) являются инвариантными по отношению к зеркальному преобразованию $\sigma_k \leftrightarrow \sigma_{n-k}$. Это демонстрирует зеркальную симметрию открытой цепочки Гекке с гамильтонианом (23) по отношению к взаимной замене первого и последнего узлов цепочки.

3. FUSION-ПРОЦЕДУРА ДЛЯ БАКСТЕРИЗОВАННЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ОТРАЖЕНИЯ

Fusion-процедура для решений уравнения Янга–Бакстера была предложена в [6]. Fusion-процедура для решений уравнения отражения рассматривалась в [7], где она применялась для исследования XXZ -модели открытой спиновой цепочки. В этом разделе мы формулируем fusion-процедуру для решений уравнения отражения, записанных в терминах образующих аффинной алгебры Гекке. Ниже мы используем компактные обозначения

$$e_n^x := e_n^+(x), \qquad y_1^x := y_1(x) \tag{25}$$

для бакстеризованных элементов $e_n^+(x)$, заданных в (6), и решений $y_1(x)$ уравнения отражения (11).

Уравнение отражения (11) можно графически представить в виде

Рассмотрим последовательность изображений

Используя эту последовательность, мы легко можем построить fusion-процедуру для решений уравнения отражения. Действительно, алгебраические выражения для

этих диаграмм записываются как

$$\begin{aligned} Y_{1 \rightarrow 2}(x) &= e_1^{q^{-2}} \cdot [y_1^x e_1^{x^2 q^2} y_1^{x q^2}] = e_1^{q^{-2}} \cdot y_{1 \rightarrow 2}(x), \\ Y_{1 \rightarrow 3}(x) &= [e_1^{q^{-2}} e_2^{q^{-4}} e_1^{q^{-2}}] \cdot [y_1^x e_1^{x^2 q^2} y_1^{x q^2} e_2^{x^2 q^4} e_1^{x^2 q^6} y_1^{x q^4}] = \\ &= [e_1^{q^{-2}} e_2^{q^{-4}} e_1^{q^{-2}}] \cdot y_{1 \rightarrow 3}(x), \end{aligned} \quad (27)$$

где мы использовали обозначения (25). Формула, которая обобщает (27), имеет вид

$$Y_{1 \rightarrow k}(x) = A_{1 \rightarrow k}^+ \cdot y_{1 \rightarrow k}(x) = \bar{y}_{1 \rightarrow k}(x) \cdot A_{1 \rightarrow k}^+, \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} y_{1 \rightarrow k}(x) &:= y_1^x [e_1^{x^2 q^2} y_1^{x q^2}] [e_2^{x^2 q^4} e_1^{x^2 q^6} y_1^{x q^4}] [e_3^{x^2 q^6} e_2^{x^2 q^8} e_1^{x^2 q^{10}} y_1^{x q^6}] \times \dots \\ &\dots \times [e_{k-1}^{x^2 q^{2(k-1)}} e_{k-2}^{x^2 q^{2k}} e_{k-3}^{x^2 q^{2(k+1)}} \dots e_2^{x^2 q^{2(2k-4)}} e_1^{x^2 q^{2(2k-3)}} y_1^{x q^{2(k-1)}}], \end{aligned}$$

а $\bar{y}_{1 \rightarrow k}(x)$ получается из выражения $y_{1 \rightarrow k}(x)$, если его переписать в обратном порядке, справа налево; второе равенство в (28) получается с помощью уравнения Янга–Бакстера (5) и уравнения отражения (11) и может быть мгновенно воспроизведено, если рассмотреть графические представления (аналогичные тем, которые изображены в (26)) для обеих его частей. Соответствующее слияние (fusion) для бакстеризованных элементов дается выражением

$$\begin{aligned} \sigma_{1 \rightarrow k, k+1 \rightarrow 2k}(x) &= A_{1 \rightarrow k}^+ \cdot A_{k+1 \rightarrow 2k}^+ \cdot \sigma_{k+1 \leftarrow 1}^x \sigma_{k+2 \leftarrow 2}^{x q^2} \dots \sigma_{2k \leftarrow k}^{x q^{2(k-1)}} \equiv \\ &\equiv A_{1 \rightarrow k}^+ \cdot A_{k+1 \rightarrow 2k}^+ \cdot \sigma_{k \rightarrow 2k}^{x q^{-2(k-1)}} \dots \sigma_{2 \rightarrow k+2}^{x q^{-2}} \sigma_{1 \rightarrow k+1}^x, \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$\sigma_{k+1 \leftarrow 1}^x = e_k^{x q^{-2(k-1)}} \dots e_2^{x q^{-2}} e_1^x, \quad \sigma_{1 \rightarrow k+1}^x = e_1^x e_2^{x q^2} \dots e_k^{x q^{2(k-1)}}.$$

Элементы (29) являются решениями высших уравнений Янга–Бакстера. Мы можем непосредственно проверить (например, используя графическое представление типа (26)), что (28) и (29) удовлетворяют уравнению

$$\begin{aligned} \sigma_{1 \rightarrow k, k+1 \rightarrow 2k}(x z^{-1}) Y_{1 \rightarrow k}(x) \sigma_{1 \rightarrow k, k+1 \rightarrow 2k}(x z) Y_{1 \rightarrow k}(z) &= \\ = Y_{1 \rightarrow k}(z) \sigma_{1 \rightarrow k, k+1 \rightarrow 2k}(x z) Y_{1 \rightarrow k}(x) \sigma_{1 \rightarrow k, k+1 \rightarrow 2k}(x z^{-1}), \end{aligned} \quad (30)$$

которое есть fusion-версия уравнения отражения (11).

Высшие элементы трансфер-матричного типа $\tau^{(k)}(x)$, которые соответствуют fusion-решению (28) уравнения отражения (30), имеют вид

$$\tau^{(k)}(x) = \text{Tr}_{D(1 \rightarrow k)}(Y_{1 \rightarrow k}(x)) = \text{Tr}_{D(1 \rightarrow k)}(A_{1 \rightarrow k}^+ \cdot y_{1 \rightarrow k}(x)). \quad (31)$$

В частности, для $k = 1, 2$ мы имеем

$$\tau^{(1)}(x) = \text{Tr}_{D(1)}(y_1^x), \quad \tau^{(2)}(x) = \text{Tr}_{D(1 \rightarrow 2)}(e_1^{q^{-2}} y_1^x [e_1^{x^2 q^2} y_1^{x q^2}]). \quad (32)$$

Ниже нам понадобится следующая лемма.

ЛЕММА. В алгебре Гекке справедливо следующее тождество:

$$A_{1 \rightarrow k}^+ [\sigma_k^x \sigma_{k-1}^{xq^2} \dots \sigma_1^{xq^{2(k-1)}}] = [\sigma_k^{xq^{2(k-1)}} \sigma_{k-1}^{xq^{2(k-2)}} \dots \sigma_2^{xq^2} \sigma_1^x] A_{2 \rightarrow k+1}^+, \quad (33)$$

где x – любой спектральный параметр, $A_{1 \rightarrow k}^+$ – симметризаторы, заданные в (7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем уравнение (33) с помощью индукции. Пусть уравнение (33) справедливо для некоторого фиксированного k . Рассмотрим левую часть равенства (33) для случая $k+1$:

$$\begin{aligned} A_{1 \rightarrow k+1}^+ [\sigma_{k+1}^x \sigma_k^{xq^2} \dots \sigma_1^{xq^{2k}}] &= [e_1^{q^{-2}} \dots e_k^{q^{-2k}}] A_{1 \rightarrow k}^+ \sigma_{k+1}^x [\sigma_k^{xq^2} \dots \sigma_1^{xq^{2k}}] = \\ &= [e_1^{q^{-2}} \dots e_{k-1}^{q^{-2(k-1)}} e_k^{q^{-2k}}] \sigma_{k+1}^x [\sigma_k^{xq^{2k}} \sigma_{k-1}^{xq^{2(k-1)}} \dots \sigma_1^{xq^2}] A_{2 \rightarrow k+1}^+ = \\ &= [\sigma_{k+1}^{xq^{2k}} \sigma_k^{xq^{2(k-1)}} \dots \sigma_2^{xq^2}] \sigma_1^x [e_2^{q^{-2}} \dots e_k^{q^{-2(k-1)}} e_{k+1}^{q^{-2k}}] A_{2 \rightarrow k+1}^+ = \\ &= [\sigma_{k+1}^{xq^{2k}} \dots \sigma_2^{xq^2} \sigma_1^x] A_{2 \rightarrow k+2}^+, \end{aligned}$$

где второе равенство в цепочке справедливо в силу предположения индукции (33), а третье – в силу уравнения Янга–Бакстера (5). Это соотношение эквивалентно (33), если в (33) сделать замену $k \rightarrow k+1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Элементы трансфер-матричного типа $\tau^{(k)}(x)$ (28) удовлетворяют следующему тождеству:

$$\tau^{(k)}(x) \tau^{(1)}(xq^{2k}) = \phi'_k(x) \tau^{(k+1)}(x) + \phi''_k(x) \tau^{(k,1)}(x), \quad (34)$$

где коэффициентные функции имеют вид

$$\begin{aligned} \phi'_k(x) &= \frac{(1 - x^2 q^{4k} b^{-1})(1 - x^2 q^{2(k-1)})}{(1 - x^2 q^{2k} b^{-1})(1 - x^2 q^{4k-2})}, \\ \phi''_k(x) &= \frac{q^k (1 - q^{-2k})}{(1 - q^{-2(k+1)})(1 - q^2)^k} \frac{(1 - x^2 q^{2(k-1)} b^{-1})(1 - x^2 q^{2(k-1)})}{(1 - x^2 q^{2k} b^{-1})(1 - x^2 q^{4k-2})}, \end{aligned}$$

а

$$\tau^{(k,1)}(x) = \text{Tr}_{D(1 \rightarrow k+1)}([\sigma_1^{q^2} \sigma_2^{q^2} \dots \sigma_k^{q^2} A_{1 \rightarrow k}^+] \cdot y_{1 \rightarrow k+1}(x))$$

есть новый элемент трансфер-матричного типа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя тождество (15) для $z = b/x$, мы выводим соотношение

$$\begin{aligned} \eta_k(x) \tau^{(1)}(xq^{2k}) &= \eta_k(x) \text{Tr}_{D(1)}(y_1^{xq^{2k}}) = \\ &= \text{Tr}_{D(k+1)}([e_k^{x^2 q^{2k}} e_{k-1}^{x^2 q^{2(k+1)}} \dots e_1^{x^2 q^{2(2k-1)}}] y_1^{xq^{2k}} [e_1^{\frac{b}{x^2 q^{2(2k-1)}}} \dots e_k^{\frac{b}{x^2 q^{2k}}}]), \end{aligned}$$

где

$$\eta_k(x) = \frac{(1 - x^2 q^{2(2k-1)})(1 - x^2 q^{2k} b^{-1})}{(1 - x^2 q^{2(k-1)})(1 - x^2 q^{4k} b^{-1})}.$$

Таким образом, мы имеем

$$\eta_k(x) \tau^{(k)}(x) \tau^{(1)}(xq^{2k}) = \text{Tr}_{D(1 \rightarrow k+1)}(A_{1 \rightarrow k}^+ \cdot y_{1 \rightarrow k+1}(x) [e_1^{\frac{b}{x^2 q^{4k-2}}} \dots e_k^{\frac{b}{x^2 q^{2k}}}]). \quad (35)$$

Единичный элемент можно представить в виде линейной комбинации двух бакс-теризованных элементов:

$$1 = e_k(q^{-2k}) + \frac{(1 - q^{-2k})}{(q^2 - q^{-2k})\lambda} \sigma_k(q^2), \quad e_k(q^{-2k}) := \frac{\sigma_k(q^{-2k})}{q - q^{-2k-1}}. \quad (36)$$

Принимая во внимание равенства (36), (33), мы записываем уравнение (35) в виде

$$\begin{aligned} \eta_k(x) \tau^{(k)}(x) \tau^{(1)}(x q^{2k}) &= \text{Tr}_{D(1 \rightarrow k+1)} \left(\left(A_{1 \rightarrow k+1}^+ + \frac{(1 - q^{-2k})}{(q^2 - q^{-2k})\lambda} \sigma_k^{q^2} A_{1 \rightarrow k}^+ \right) y_{1 \rightarrow k}(x) \times \right. \\ &\quad \times [e_k^{x^2 q^{2k}} e_{k-1}^{x^2 q^{2(k+1)}} \dots e_1^{x^2 q^{4k-2}} y_1^{x q^{2k}}] e_1^{\frac{b}{x^2 q^{4k-2}}} \dots e_k^{\frac{b}{x^2 q^{2k}}} \Big) = \\ &= \text{Tr}_{D(1 \rightarrow k+1)} (A_{1 \rightarrow k+1}^+ y_{1 \rightarrow k+1}(x) e_1^{\frac{b}{x^2 q^{4k-2}}} \dots e_k^{\frac{b}{x^2 q^{2k}}}) + \\ &\quad + \frac{(1 - q^{-2k})}{(q^2 - q^{-2k})\lambda} \text{Tr}_{D(1 \rightarrow k+1)} \left(\bar{y}_{1 \rightarrow k}(x) \cdot [e_k^{x^2 q^{4k-2}} \dots e_1^{x^2 q^{2k}} y_1^{x q^{2k}}] \times \right. \\ &\quad \times A_{2 \rightarrow k+1}^+ e_1^{\frac{b}{x^2 q^{4k-2}}} \dots e_k^{\frac{b}{x^2 q^{2k}}} \sigma_k^{q^2} \Big). \end{aligned} \quad (37)$$

Поскольку $\sigma_{k+1}^{q^{-2}} \sigma_{k+1}^{q^2} = 0$, то можно вывести уравнение

$$\sigma_{k+1}(q^{-2}) e_k(x) \sigma_{k+1}(q^2) = \frac{(1 - x)}{(1 - q^2)(q - q^{-1}x)} \sigma_{k+1}(q^{-2}) \sigma_k(q^2) \sigma_{k+1}(q^2), \quad (38)$$

которое приводит к уравнению

$$A_{2 \rightarrow k+1}^+ [e_1^{\frac{b}{x^2 q^{4k-2}}} \dots e_{k-1}^{\frac{b}{x^2 q^{2k+2}}} e_k^{\frac{b}{x^2 q^{2k}}} \sigma_k^{q^2}] = \frac{(-q^{-k-1})(1 - \frac{b}{x^2 q^{2(k-1)}})}{(1 - q^2)^{k-1} (1 - \frac{b}{x^2 q^{4k}})} A_{2 \rightarrow k+1}^+ [\sigma_1^{q^2} \dots \sigma_k^{q^2}]. \quad (39)$$

Мы также имеем тождество (см. последнее равенство в (8))

$$A_{1 \rightarrow k+1}^+ [e_1^{\frac{b}{x^2 q^{4k-2}}} \dots e_k^{\frac{b}{x^2 q^{2k}}}] = A_{1 \rightarrow k+1}^+. \quad (40)$$

Окончательно, используя (39) и (40), мы преобразуем (37) к виду

$$\begin{aligned} \eta_k(x) \tau^{(k)}(x) \tau^{(1)}(x q^{2k}) &= \tau^{(k+1)}(x) + \frac{q^{-k-2}(1 - q^{-2k})}{(1 - q^{-2(k+1)})(1 - q^2)^k} \frac{(1 - \frac{b}{x^2 q^{2(k-1)}})}{(1 - \frac{b}{x^2 q^{4k}})} \times \\ &\quad \times \text{Tr}_{D(1 \rightarrow k+1)} (A_{1 \rightarrow k}^+ \cdot y_{1 \rightarrow k+1}(x) [\sigma_1^{q^2} \dots \sigma_{k-1}^{q^2} \sigma_k^{q^2}]), \end{aligned}$$

что эквивалентно уравнению (34).

4. ФАКТОР ТЕМПЕРЛИ–ЛИБА ДЛЯ МОДЕЛИ ЦЕПОЧКИ ГЕККЕ

Уравнения (34) не замкнуты относительно набора коммутирующих элементов трансфер-матричного типа $\tau^{(k)}(x)$ (31). Для того чтобы получить замкнутый набор соотношений, нам необходимо рассмотреть специальные факторы алгебры Гекке. В

этом разделе мы рассматриваем фактор Темперли–Либа $H_{M+1}^{(\text{TL})}$, который определяется наложением дополнительных связей

$$\sigma_i(q^2)\sigma_{i\pm 1}(q^4)\sigma_i(q^2) = 0 \quad (41)$$

на образующие $\sigma_i \in H_{M+1}$ ($i = 1, \dots, M$). Эти связи эквивалентны условию равенства нулю всех антисимметризаторов (7) третьего ранга: $A_{i \rightarrow i+2}^- = 0$. Более того, оказывается, что эти связи фиксируют параметр $D^{(0)}$ (и, соответственно, параметр b):

$$\begin{aligned} 0 &= \text{Tr}_{D(i+1)}(\sigma_{i-1}(q^2)\sigma_i(q^4)\sigma_{i-1}(q^2)) = \sigma_{i-1}(q^2)(\text{Tr}_{D(i+1)}\sigma_i(q^4))\sigma_{i-1}(q^2) = \\ &= \sigma_{i-1}^2(q^2)(1 - q^4(1 - \lambda D^{(0)})) = \sigma_{i-1}^2(q^2)\left(1 - \frac{q^4}{b}\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow b = q^4, \quad D^{(0)} = \frac{1 - q^{-4}}{\lambda}. \end{aligned} \quad (42)$$

Фактор Темперли–Либа $\hat{H}_{M+1}^{(\text{TL})}$ (ТЛ-фактор) аффинной алгебры Гекке определяется, кроме связей (41), еще и условием дополнительной связи на аффинную образующую y_1 алгебры $\hat{H}_{M+1}$:

$$y_1\sigma_1y_1\sigma_1^{q^2} = \sigma_1^{q^2}y_1\sigma_1y_1 = \Delta\sigma_1^{q^2}, \quad (43)$$

где $\Delta = \frac{\lambda q}{(1-q^{-4})}(D^{(2)} - q(D^{(1)})^2) \in \hat{H}_0$ есть центральный элемент в $\hat{H}_{M+1}$. Уравнение (43) при наличии отображения (14) требует, чтобы аффинная образующая y_1 подчинялась квадратичному характеристическому тождеству

$$y_1^2 - qD^{(1)}y_1 = q^{-1}\Delta,$$

после чего (43) переписывается в виде $\sigma_1^{q^2}y_1\sigma_1^{q^2} = q^2(q^2 - 1)D^{(1)}\sigma_1^{q^2}$. Таким образом, рассматриваемый фактор $\hat{H}_{M+1}^{(\text{TL})}$ аффинной алгебры Гекке совпадает с однограничной алгеброй Темперли–Либа, или blob-алгеброй [14]. Связь (43) также ведет к связям

$$y_1^{zq^{-2}}e_1^{z^2q^{-2}}y_1^z\sigma_1^{q^2} = \sigma_1^{q^2}y_1^ze_1^{z^2q^{-2}}y_1^{zq^{-2}} =: \Delta^{(0)}(z)\sigma_1^{q^2}, \quad (44)$$

где $y_1^z \in \hat{H}_{M+1}$ – любое локальное решение уравнения отражения (11) для $n = 1$, а $\Delta^{(0)}(z)$ – центральный элемент в $\hat{H}_{M+1}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. В случае ТЛ-фактора для открытой цепочки Гекке (т.е. когда $\{\sigma_i, y_1\} \in \hat{H}_{M+1}^{(\text{TL})}$) функциональные соотношения (34) замыкаются относительно семейства элементов трансфер-матричного типа $\tau^{(k)}(x)$:

$$\tau^{(k)}(x)\tau^{(1)}(xq^{2k}) = \phi'_k(x)\tau^{(k+1)}(x) + \phi'''_k(x)\Delta^{(0)}(xq^{2k})\tau^{(k-1)}(x), \quad (45)$$

где $\tau^{(0)}(x) := 1$ и

$$\begin{aligned} \phi'_k(x) &:= \frac{(1 - x^2q^{2(k-1)})(1 - x^2q^{4k-4})}{(1 - x^2q^{2k-4})(1 - x^2q^{4k-2})}, \\ \phi'''_k(x) &:= \frac{1}{(-q^2)} \frac{(1 - x^2q^{2k-6})(1 - x^2q^{4k-4})}{(1 - x^2q^{2k-4})(1 - x^2q^{4k-2})}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем (34) в виде

$$\begin{aligned} \tau^{(k)}(x)\tau^{(1)}(xq^{2k}) &= \phi'_k(x)\tau^{(k+1)}(x) + \phi''_k(x)\Delta^{(0)}(xq^{2k}) \times \\ &\times \text{Tr}_{D(1 \rightarrow k+1)} \left(A_{1 \rightarrow k}^+ \cdot y_{1 \rightarrow k-1}(x) \cdot [e_{k-1}^{x^2 q^{2(k-1)}} \dots e_1^{x^2 q^{4k-6}}] \times \right. \\ &\times \left. [e_k^{x^2 q^{2k}} \dots e_2^{x^2 q^{4(k-1)}}] [\sigma_1^{q^2} \dots \sigma_k^{q^2}] \right). \end{aligned} \quad (46)$$

Связи (41), которые определяют ТЛ-фактор алгебры Гекке, ведут к следующим тождествам: для любого x

$$\begin{aligned} \sigma_i(q^2)\sigma_{i\pm 1}(x)\sigma_i(q^2) &= \lambda q^3(1 - q^{-4}x)\sigma_i(q^2), \\ e_i(x)e_{i\pm 1}(xq^2)\sigma_i(q^2) &= -\xi(x)\sigma_{i\pm 1}(q^2)\sigma_i(q^2), \end{aligned}$$

где $\xi(x) = \frac{(1-xq^2)}{q^2\lambda(1-x)}$. Мы используем эти тождества для того, чтобы упростить (46) с помощью следующего соотношения:

$$\begin{aligned} &[e_{k-1}^{x^2 q^{2(k-1)}} \dots e_1^{x^2 q^{4k-6}}][e_k^{x^2 q^{2k}} \dots e_2^{x^2 q^{4(k-1)}}][\sigma_1^{q^2} \dots \sigma_{k-1}^{q^2}\sigma_k^{q^2}] = \\ &= [e_{k-1}^{x^2 q^{2(k-1)}} \dots e_2^{x^2 q^{4k-8}}][e_k^{x^2 q^{2k}} \dots e_3^{x^2 q^{4k-6}}]e_1^{x^2 q^{4k-6}}e_2^{x^2 q^{4k-4}}\sigma_1^{q^2}[\sigma_2^{q^2} \dots \sigma_{k-1}^{q^2}\sigma_k^{q^2}] = \\ &= (-\xi(x^2 q^{4k-6}))[e_{k-1}^{x^2 q^{2(k-1)}} \dots e_2^{x^2 q^{4k-8}}][e_k^{x^2 q^{2k}} \dots e_3^{x^2 q^{4k-6}}]\sigma_2^{q^2}\sigma_1^{q^2}[\sigma_2^{q^2} \dots \sigma_{k-1}^{q^2}\sigma_k^{q^2}] = \dots \\ &\dots = \prod_{n=1}^{k-1} (-\xi(x^2 q^{4k-4-2n}))[\sigma_k^{q^2}\sigma_{k-1}^{q^2} \dots \sigma_2^{q^2}\sigma_1^{q^2}\sigma_2^{q^2} \dots \sigma_{k-1}^{q^2}\sigma_k^{q^2}] = \\ &= (\lambda q)^{2(k-1)} \prod_{n=1}^{k-1} (-\xi(x^2 q^{4k-4-2n}))\sigma_k^{q^2} = (-\lambda)^{k-1} \frac{1 - x^2 q^{4(k-1)}}{1 - x^2 q^{2(k-1)}} \sigma_k^{q^2}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание это соотношение и тождества

$$\text{Tr}_{D(k+1)}(\sigma_k^{q^2}) = 1 - \frac{q^2}{b}, \quad \text{Tr}_{D(k)} A_{1 \rightarrow k}^+ = \frac{1 - q^{-2(k-1)}/b}{q - q^{-2k+1}} A_{1 \rightarrow k-1}^+,$$

которые следуют из определений (7), (14), мы записываем (46) для $b = q^4$ в виде (45).

Уравнения (45) замкнуты относительно набора коммутирующих элементов $\tau^{(k)}(x)$. Заметим, что уравнения (45) могут быть использованы для определения элементов $\tau^{(k)}(x)$ в случае отрицательных целых k .

5. T-Q УРАВНЕНИЕ БАКСТЕРА ДЛЯ ОТКРЫТЫХ ЦЕПОЧЕК ТЛ-ТИПА

Сделаем теперь замену переменных $z = xq^{2k}$ в (45) и положим

$$Q^{(k)}(z) := (1 - z^2 q^{-2(k+2)})\tau^{(k)}(zq^{-2k}).$$

В результате уравнения (45) записываются в виде

$$\frac{(1 - z^2 q^{-2})}{(1 - z^2 q^{-4})} Q^{(k)}(z)\tau^{(1)}(z) = Q^{(k+1)}(zq^2) - \frac{\Delta^{(0)}(z)}{q^2} Q^{(k-1)}(zq^{-2}), \quad (47)$$

где $\tau^{(1)}(z)$ и $\Delta^{(0)}(z)$ определяются в (32) и (44), соответственно. Введем производящую функцию $Q(z, w)$ элементов $Q^{(k)}(z)$:

$$Q(z, w) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} w^k Q^{(k)}(z).$$

Тогда уравнение (47) представляется в виде T - Q уравнения Бакстера

$$\frac{(1 - z^2 q^{-2})}{(1 - z^2 q^{-4})} Q(z, w) \tau^{(1)}(z) = \frac{1}{w} Q(z q^2, w) - \frac{\Delta^{(0)}(z) w}{q^2} Q(z q^{-2}, w). \quad (48)$$

Напомним, что нашей целью является поиск спектра оператора трансфер-матричного типа $\tau^{(1)}(z)$ для некоторой фиксированной детерминантной функции $\Delta^{(0)}(z)$. Мы фиксируем явный вид детерминанта $\Delta^{(0)}(z)$ (44), рассматривая специальную модель открытой цепочки с N узлами. В этом случае $\Delta^{(0)}(z) =: \Delta_N^{(0)}(z)$ определяется соотношением

$$\Delta_N^{(0)}(z) \sigma_{N+1}^{q^2} = y_{N+1}^{z q^{-2}} e_{N+1}^{z^2 q^{-2}} y_{N+1}^z \sigma_{N+1}^{q^2}, \quad (49)$$

где элемент монодромии y_{N+1}^z представляет собой перенормированную версию элемента (13) и задается формулой

$$y_{N+1}^z = e_N^+(z) y_N^z e_N^+(z) = \dots = e_N^+(z) \dots e_1^+(z) y_1^z e_1^+(z) \dots e_N^+(z). \quad (50)$$

Пусть y_1^z с точностью до умножения на некоторую несущественную скалярную функцию от z представляется в виде полинома по z . Такие решения y_1^z уравнения отражения были предложены в [2]. Мы заметим, что для случая, когда y_1^z есть полином по z порядка K , элемент трансфер-матричного типа записывается в виде

$$\tau_N^{(1)}(z) = \text{Tr}_{D(N+1)}(y_{N+1}^z) = \frac{1}{(q - z q^{-1})^{2N}} \tau_N(z), \quad (51)$$

где элемент $\tau_N(z)$ (20) есть полином по z порядка $2N + K$. Тогда из (49) мы получаем

$$\begin{aligned} \Delta_N^{(0)}(z) \sigma_{N+1}^{q^2} &= (e_N^{z q^{-2}} y_N^{z q^{-2}} e_N^{z q^{-2}}) e_{N+1}^{z^2 q^{-2}} (e_N^z y_N^z e_N^z) \sigma_{N+1}^{q^2} = \\ &= e_N^{z q^{-2}} e_{N+1}^z y_N^{z q^{-2}} e_N^{z^2 q^{-2}} y_N^z (e_{N+1}^{z q^{-2}} e_N^z \sigma_{N+1}^{q^2}) = \\ &= -\xi(z q^{-2}) e_N^{z q^{-2}} e_{N+1}^z (y_N^{z q^{-2}} e_N^{z^2 q^{-2}} y_N^z \sigma_N^{q^2}) \sigma_{N+1}^{q^2} = \\ &= (\xi(z q^{-2}))^2 \sigma_{N+1}^{q^2} [\Delta_{N-1}^{(0)}(z) \sigma_N^{q^2}] \sigma_{N+1}^{q^2} = \\ &= \dots = (\xi(z q^{-2}))^{2N} \sigma_{N+1}^{q^2} \dots \sigma_2^{q^2} [y_1^z e_1^{z^2 q^{-2}} y_1^{z q^{-2}} \sigma_1^{q^2}] \sigma_2^{q^2} \dots \sigma_{N+1}^{q^2} = \\ &= \Delta_0^{(0)}(z) (\xi(z q^{-2}) \lambda q)^{2N} \sigma_{N+1}^{q^2}, \end{aligned}$$

откуда

$$\Delta_N^{(0)}(z) = \Delta_0^{(0)}(z) (\xi(z q^{-2}) \lambda q)^{2N} = \Delta_0^{(0)}(z) \left(\frac{1 - z}{q - z q^{-1}} \right)^{2N}. \quad (52)$$

Мы выбираем тривиальное граничное условие $y_1^z(z) = 1$, соответствующее модели открытой цепочки со свободными концами, которая описывается гамильтонианом $\mathcal{H}_N^{(\text{free})}$ (23). В этом случае начальный детерминант $\Delta_0^{(0)}(z)$ фиксируется соотношением

$$\Delta_0^{(0)}(z)\sigma_1^{q^2} = e_1^{z^2q^{-2}}\sigma_1^{q^2} = -q^{-2}\frac{(1-z^2)}{(1-z^2q^{-4})}\sigma_1^{q^2}.$$

Таким образом, функциональные уравнения (47) представляются как

$$\begin{aligned} \frac{1-z^2q^{-2}}{1-z^2q^{-4}}Q^{(k)}(z)\frac{T_N^{(1)}(z)}{(q-zq^{-1})^{2N}} &= Q^{(k+1)}(zq^2) + \\ &+ q^{-4}\frac{1-z^2}{1-z^2q^{-4}}\left(\frac{1-z}{q-zq^{-1}}\right)^{2N}Q^{(k-1)}(zq^{-2}), \end{aligned} \quad (53)$$

где мы подставили $\tau_N^{(1)}(z) = T_N^{(1)}(z)/(q-zq^{-1})^{2N}$, а $T_N^{(1)}(z) = \tau_N(z)|_{y_1^z=1}$ есть полином по z порядка $2N$, который рассматривался в разделе 2, см. формулу (21).

Уравнения (48) и (53) могут быть использованы стандартным образом для вывода уравнений аналитического анзаца Бете, которые содержат информацию о спектре операторов трансфер-матричного типа $\tau^{(1)}(z)$ и, в частности, о спектре гамильтонианов (18).

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обсудим кратко взаимосвязи между алгебраическим подходом, изложенным выше, и стандартной техникой, развитой в [10] для исследования спиновых систем на открытых цепочках и основанной на матричном уравнении отражения.

Рассмотрим R -матричное представление ρ_R аффинной алгебры Гекке $\hat{H}_{M+1}$:

$$\begin{aligned} \rho_R(\sigma_i) &= \hat{R}_{ii+1} := I^{\otimes(i-1)} \otimes \hat{R} \otimes I^{\otimes(M-i)}, \\ \rho_R(y_1) &= S(L_1^-)L_1^+ := (1/L^-)L^+ \otimes I^{\otimes M}. \end{aligned} \quad (54)$$

Здесь I есть единичная $((n+m) \times (n+m))$ -матрица; $\hat{R} \in \text{End}(V_{n+m}^{\otimes 2})$ – фундаментальная R -матрица для $U_q(\mathfrak{gl}(n|m))$, записанная в форме элемента группы кос [5], [11] (стандартная форма приведена в [15]):

$$\begin{aligned} \hat{R} &= \sum_i (-1)^{[i]} q^{1-2[i]} e_{ii} \otimes e_{ii} + \sum_{i \neq j} (-1)^{[i][j]} e_{ij} \otimes e_{ji} + \lambda \sum_{j>i} e_{ii} \otimes e_{jj}, \\ \hat{R}^2 &= \lambda \hat{R} + 1, \quad (-1)^{(1)(2)} \hat{R}_{12} = \hat{R}_{12} (-1)^{(1)(2)}, \quad \lim_{q \rightarrow 1} (\hat{R}_{12}) = \mathcal{P}_{12}, \end{aligned}$$

где $\lambda = q - q^{-1}$, e_{ij} – матричные единицы, $[i] = 0, 1 \pmod{2}$ обозначает грассманову четность соответствующих компонент супервекторов в пространстве V_{n+m} , $\mathcal{P}_{12} := (-1)^{(1)(2)} P_{12}$ – матрица суперперестановки (P_{12} – матрица перестановки). Мы использовали компактные матричные обозначения, например, $((-1)^{(1)(2)})_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} = (-1)^{[i_1][i_2]} \delta_{j_1}^{i_1} \delta_{j_2}^{i_2}$. Операторнозначные матрицы $L^+(L^-) \in \text{Mat}(n+m)$ обратимы, верхнетреугольны (нижнетреугольны) и удовлетворяют равенствам

$$\begin{aligned} \hat{R}_{12} L_2^\pm (-1)^{(1)(2)} L_1^\pm &= L_2^\pm (-1)^{(1)(2)} L_1^\pm \hat{R}_{12}, \\ \hat{R}_{12} L_2^+ (-1)^{(1)(2)} L_1^- &= L_2^- (-1)^{(1)(2)} L_1^+ \hat{R}_{12}. \end{aligned} \quad (55)$$

Мы приписываем элементам $(L^\pm)_j^i$ градуировку $([i] + [j])$. В соответствии с подходом работы [4] $L^\pm$ являются матрицами генераторов картановского типа для $U_q(\mathfrak{gl}(n|m))$. Заметим, что в представлении ρ_R (54) решение (12) принимает вид

$$\rho_R(y_1(x)) = \frac{1}{L_1^+ - \xi x^{-1} L_1^-} (L_1^+ - \xi x L_1^-) =: K_1(x), \quad (56)$$

и можно сразу проверить, что (56) есть решение уравнения отражения (11), записанного в R -матричной форме:

$$\hat{R}_{12}(x/z) K_1(x) \hat{R}_{12}(xz) K_1(z) = K_1(z) \hat{R}_{12}(xz) K_1(x) \hat{R}_{12}(x/z), \quad (57)$$

где

$$\hat{R}_{nn+1}(x) := \hat{R}_{nn+1} - x \hat{R}_{nn+1}^{-1} = \rho_R(\sigma_n)$$

является R -матричным образом бакстеризованного элемента (4). Для того чтобы проверить (57), необходимо учесть представление $K(x)$ (56) в факторизованном виде $L^{-1}(\xi/x)L(\xi x)$, где операторнозначная матрица

$$L(x) = L^+ - x L^- \quad (58)$$

определяет evaluation-представление [12] для аффинной квантовой супералгебры $U_q(\hat{\mathfrak{gl}}(n|m))$ и удовлетворяет сплетающим соотношениям

$$\hat{R}_{12}(x) L_2(xy) (-1)^{(1)(2)} L_1(y) = L_2(y) (-1)^{(1)(2)} L_1(xy) \hat{R}_{12}(x). \quad (59)$$

Отметим, что все факторы типа $(-1)^{(1)(2)}$ пропали в уравнении отражения (57). Коумножения для квантовых супералгебр с определяющими соотношениями (55) и (59) имеют обычный вид $\Delta L^\pm = L^\pm \otimes L^\pm$ и $\hat{\Delta} L(x) = L(x) \otimes L(x)$, где $\otimes$ – градуированное тензорное произведение, т.е. $(a \otimes b)(c \otimes d) = (-1)^{[b][c]}(ac \otimes bd)$.

Отметим, что решения уравнения отражения типа (56) были названы в [16] решениями, которые допускают “регулярную факторизацию”. Задавая матрицу $L(x)$, которая удовлетворяет (59), мы с помощью стандартного метода квантовой обратной задачи можем построить операторнозначную матрицу монодромии для цепочки с $(N + 1)$ узлами:

$$\mathcal{T}_a(\xi, \xi_1, \dots, \xi_N | x) = L_a(\xi x) \otimes L_a(\xi_1 x) \otimes \dots \otimes L_a(\xi_N x), \quad (60)$$

где индекс a обозначает номер вспомогательного матричного пространства, $\otimes$ – градуированное тензорное произведение операторных пространств. Матрица монодромии (60) удовлетворяет сплетающим соотношениям (59)

$$\begin{aligned} \hat{R}_{12}(x) \mathcal{T}_2(\xi, \xi_1, \dots, \xi_N | xy) (-1)^{(1)(2)} \mathcal{T}_1(\xi, \xi_1, \dots, \xi_N | y) = \\ = \mathcal{T}_2(\xi, \xi_1, \dots, \xi_N | y) (-1)^{(1)(2)} \mathcal{T}_1(\xi, \xi_1, \dots, \xi_N | xy) \hat{R}_{12}(x). \end{aligned}$$

Далее мы строим двухрядную матрицу монодромии Складина

$$\mathcal{K}_a(\xi, \xi_1, \dots, \xi_N | x) = \mathcal{T}_a^{-1}(\xi, \xi_1, \dots, \xi_N | x^{-1}) \cdot \mathcal{T}_a(\xi, \xi_1, \dots, \xi_N | x), \quad (61)$$

которая очевидно удовлетворяет уравнению отражения (57). Соответствующая трансфер-матрица Складина задается квантовым суперследом

$$\tau_N(\xi, \xi_1, \dots, \xi_N | x) = \text{Tr}_a(D_a \mathcal{K}_a(\xi, \xi_1, \dots, \xi_N | x)), \quad (62)$$

где $D_j^i = (-1)^{[i]} q^{2m+(-1)^{[i]}(2i-2m-1)} \delta_j^i$ – матрица квантового суперследа (для случая квантовой супералгебры $U_q(gl(n|m))$) [11]. Можно проверить, что эта матрица является константным решением сопряженного уравнения отражения. Примем во внимание тот факт, что матрица монодромии (60) удовлетворяет сплетающим соотношениям (59); тогда можно использовать матричное представление, в котором образ (60) есть

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_a(\xi, \xi_1, \dots, \xi_N | x) &\rightarrow (-1)^{((1)+\dots+(N))(a)} L_a(\xi x) P_{1a} \hat{R}_{1a}(\xi_1 x) \dots P_{Na} \hat{R}_{Na}(\xi_N x) = \\ &= P_{Na} P_{N-1N} \dots P_{23} P_{12} L_1(\xi x) \hat{R}_{12}(\xi_1 x) \dots \hat{R}_{N-1N}(\xi_{N-1} x) \hat{R}_{Na}(\xi_N x), \end{aligned}$$

где мы применили матричный гомоморфизм ко всем факторам в правой части (60) за исключением первого фактора, а $1, 2, \dots, N$ обозначают номера матричных пространств, которые заменяют операторные пространства. Затем для матрицы монодромии Складина (61) мы получаем представление

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_a(\xi, \xi_1, \dots, \xi_N | x) &\rightarrow \hat{R}_{Na}^{-1}\left(\frac{\xi_N}{x}\right) \hat{R}_{N-1N}^{-1}\left(\frac{\xi_{N-1}}{x}\right) \dots \hat{R}_{12}^{-1}\left(\frac{\xi_1}{x}\right) \times \\ &\times \frac{1}{L_1(\xi/x)} L_1(\xi x) \hat{R}_{12}(\xi_1 x) \dots \hat{R}_{N-1N}(\xi_{N-1} x) \hat{R}_{Na}(\xi_N x) = \\ &= \rho_R \left(e_N^+ \left(\frac{x}{\xi_N} \right) e_{N-1}^+ \left(\frac{x}{\xi_{N-1}} \right) \dots e_1^+ \left(\frac{x}{\xi_1} \right) \times \right. \\ &\times \left. \frac{y_1 - \xi x}{y_1 - \xi/x} e_1^+(\xi_1 x) \dots e_{N-1}^+(\xi_{N-1} x) e_N^+(\xi_N x) \right), \quad (63) \end{aligned}$$

где мы учли тождество $\hat{R}(x^{-1})\hat{R}(x) = (q - xq^{-1})(q - x^{-1}q^{-1})$, положили $a = N + 1$ и использовали обозначения (6), (54). Ясно, что (63) есть R -матричный образ элемента (50) для $x = z$, $\xi_i = 1$ и $y_1^x = (y_1 - \xi x)/(y_1 - \xi/x)$. Квантовый след (62) от (63) совпадает с R -матричным образом ρ_R элемента трансфер-матричного типа (51).

Итак, мы продемонстрировали, что интегрируемые модели, основанные на рассмотрении матриц монодромии (61), и модели, основанные на рассмотрении элементов монодромии (50), в общем случае различны и совпадают друг с другом только в случае их R -матричных проекций. Такое отождествление проявляется формулой (63).

Благодарности. Автор благодарен П. П. Кулишу за полезные обсуждения и комментарии, а также А. Ф. Оськину, С. З. Пакуляку и П. Н. Пятову за обсуждение результатов, изложенных в разделе 2. Данная работа поддержана INTAS (грант № 03-51-3350) и РФФИ (грант № 05-01-01086-а).

Список литературы

- [1] A. P. Isaev, O. V. Ogievetsky, *Nucl. Phys. B*, **760** (2007), 167; [math-ph/0510078](#).
- [2] D. Levi, P. Martin, *J. Phys. A*, **27** (1994), L521; P. P. Kulish, A. I. Mudrov, *Lett. Math. Phys.*, **75**:2 (2006), 151; [math.QA/0508289](#).
- [3] M. Jimbo, *Lett. Math. Phys.*, **11** (1986), 247.
- [4] Н. Ю. Решетихин, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Алгебра и анализ*, **1**:1 (1989), 178.
- [5] A. P. Isaev, *ЭЧАЯ*, **26** (1995), 1204.
- [6] P. P. Kulish, N. Yu. Reshetikhin, E. K. Sklyanin, *Lett. Math. Phys.*, **5**:5 (1981), 393; P. P. Kulish, E. K. Sklyanin, “Quantum spectral transform method. Recent developments”, *Integrable Quantum Field Theories*, Proc. Symp. (Tvärminne, Finland, 1981), Lecture Notes in Phys., **151**, eds. J. Hietarinta, C. Montonen, Springer, Berlin, 1982, 61.
- [7] L. Mezincescu, R. Nepomechie, *J. Phys. A*, **25** (1992), 2533.
- [8] Y. K. Zhou, *Nucl. Phys. B*, **458** (1996), 504; [hep-th/9510095](#); W. L. Yang, R. I. Nepomechie, Y. Z. Zhang, *Phys. Lett. B*, **633** (2006), 664; [hep-th/0511134](#).
- [9] P. P. Kulish, *J. Phys. A*, **36** (2003), L489.
- [10] E. K. Sklyanin, *J. Phys. A*, **21** (1988), 2375.
- [11] A. P. Isaev, *Quantum groups and Yang-Baxter equations*, Preprint MPIM (Bonn), MPIM2004-132, 2004; <http://www.mpim-bonn.mpg.de/Research/MPIM+Preprint+Series>.
- [12] V. Chari, A. Pressley, *A Guide to Quantum Groups*, Cambridge Univ. Press, 1994.
- [13] A. P. Isaev, O. V. Ogievetsky, *Czech. J. Physics*, **55**:11 (2005), 1433; O. V. Ogievetsky, P. N. Pyatov, “Lecture on Hecke algebras”, *Symmetries and Integrable Systems*, Proc. Int. School (Dubna, Russia, 1999), ed. A. N. Sissakian, JINR, Dubna, 2000, 39; Preprint MPIM (Bonn), MPIM2001-40; <http://www.mpim-bonn.mpg.de/Research/MPIM+Preprint+Series>.
- [14] D. Levy, *Phys. Rev. Lett.*, **67** (1991), 1971; *Int. J. Mod. Phys. A*, **6** (1991), 5127; P. P. Martin, H. Saleur, *Lett. Math. Phys.*, **30**:3 (1994), 189; [hep-th/9302094](#); P. P. Martin, D. Woodcock, *J. Algebra*, **225**:2 (2000), 957.
- [15] Е. В. Дамаскинский, П. П. Кулиш, М. А. Соколов, *Записки науч. сем. ПОМИ*, **224** (1995), 155; [q-alg/9505001](#).
- [16] H. Frahm, N. Slavnov, *J. Phys. A*, **32** (1999), 1547.