Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Котиков, Л. Н. Липатов, А. И. Онищенко, В. Н. Велижанин, Аномальные размерности вильсоновских операторов в $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной теории Янга–Миллса, *ТМФ*, 2007, том 150, номер 2, 249–262

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf5977>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 15:55:45

© 2007 г.

А. В. Котиков*, Л. Н. Липатов†,
А. И. Онищенко†, В. Н. Велижанин†

АНОМАЛЬНЫЕ РАЗМЕРНОСТИ ВИЛЬСОНОВСКИХ ОПЕРАТОРОВ В $\mathcal{N} = 4$ СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ ЯНГА–МИЛЛСА

Результаты для универсальной аномальной размерности $\gamma_{\text{ун}}(j)$ вильсоновских операторов твиста 2 в $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной теории Янга–Миллса представлены в первых трех порядках теории возмущений. Эти выражения удастся получить, выделяя наиболее сложные слагаемые из соответствующих аномальных размерностей в КХД. Полученный результат находится в согласии с гипотезой об интегрируемости $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной теории Янга–Миллса в контексте АдС/КТП-соответствия.

Ключевые слова: эволюционные уравнения, $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричная калибровочная теория.

1. ВВЕДЕНИЕ

Аномальные размерности вильсоновских операторов твиста 2 определяют бьеркевское нарушение масштабной инвариантности распределения партонов в рамках квантовой хромодинамики (КХД). Они задаются преобразованием Меллина

$$\begin{aligned}\gamma_{ab}(j) &= \int_0^1 dx x^{j-1} W_{b \rightarrow a}(x) = \gamma_{ab}^{(0)}(j) a_s + \gamma_{ab}^{(1)}(j) a_s^2 + \gamma_{ab}^{(2)}(j) a_s^3 + O(a_s^4), \\ \tilde{\gamma}_{ab}(j) &= \int_0^1 dx x^{j-1} \widetilde{W}_{b \rightarrow a}(x) = \tilde{\gamma}_{ab}^{(0)}(j) a_s + \tilde{\gamma}_{ab}^{(1)}(j) a_s^2 + \tilde{\gamma}_{ab}^{(2)}(j) a_s^3 + O(a_s^4),\end{aligned}\tag{1}$$

где $a_s = \alpha_s/(4\pi)$, $a = \lambda, g, \varphi$ для спинорных, векторных и скалярных частиц соответственно¹⁾ а $\tilde{\gamma}_{ab}$ соответствует спиновым партонным распределениям, для интегральных ядер $W_{b \rightarrow a}(x)$ и $\widetilde{W}_{b \rightarrow a}(x)$ в уравнении Докшицера–Грибова–Липатова–Альтарелли–Паризи (ДГЛАП) [1], которое описывает Q^2 -зависимость партонных

¹⁾В случае спиновой зависимости $a = \lambda, g$.

*Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова, Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия. E-mail: kotikov@theor.jinr.ru

†Санкт-Петербургский институт ядерной физики, Гатчина, Ленинградская обл., Россия; Institute for Theoretical Physics, The University of Hamburg, Hamburg, Germany. E-mail: lipatov@thd.pnpi.spb.ru, onish@mail.desy.de, Vitaly.Velizhanin@thd.pnpi.spb.ru

плотностей $f_a(x, Q^2)$ и $\tilde{f}_a(x, Q^2)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d \ln Q^2} f_a(x, Q^2) &= \int_x^1 \frac{dy}{y} \sum_b W_{b \rightarrow a} \left(\frac{x}{y} \right) f_b(y, Q^2), \\ \frac{d}{d \ln Q^2} \tilde{f}_a(x, Q^2) &= \int_x^1 \frac{dy}{y} \sum_b \widetilde{W}_{b \rightarrow a} \left(\frac{x}{y} \right) \tilde{f}_b(y, Q^2). \end{aligned} \quad (2)$$

Аномальные размерности и интегральные ядра известны в КХД в первых трех порядках теории возмущений [2], [3].

Выражения в КХД для аномальных размерностей можно использовать и в случае $\mathcal{N}$ -расширенных суперсимметричных теорий Янга–Миллса (ЯМ), выбирая операторы Казимира C_A , C_F , T_f в виде $C_A = C_F = N_c$, $T_f n_f = \mathcal{N} N_c / 2$. Для $\mathcal{N} = 2$ и $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричных теорий ЯМ аномальные размерности вильсоновских операторов получают также дополнительные вклады от скалярных частиц [4], которые были вычислены в следующем за ведущим порядке в случае $\mathcal{N} = 4$ [5].

Оказывается, что выражения для собственных значений матрицы аномальных размерностей в $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной теории ЯМ можно получить непосредственно из аномальных размерностей КХД без утомительных вычислений. Соответствующий метод (см. работу [4]), который может быть назван как принцип максимальной трансцендентности, основывается на специальных свойствах интегрального ядра уравнения Балицкого–Фадиной–Кураева–Липатова (БФКЛ) [6]–[8] для данной модели и на новом соответствии между уравнениями БФКЛ и ДГЛАП в случае $\mathcal{N} = 4$. Во втором порядке теории возмущений этот метод позволил получить собственные значения аномальных размерностей [4], которые были проверены затем прямыми вычислениями в работе [5]. Полученные результаты лишь вкратце описаны ниже, детальное обсуждение можно найти в работе [4]. На основе результатов для трехпетлевых поправок к аномальным размерностям в КХД [3], используя гипотезу максимальной трансцендентности, мы нашли собственные значения матрицы аномальных размерностей для $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной теории ЯМ в третьем порядке теории возмущений [9].

Полученный ответ оказывается важным для проверки различных предположений [10]–[14], появляющихся при исследовании свойств конформных операторов в контексте АдС/КТП-соответствия [15].

2. ЭВОЛЮЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ В $\mathcal{N} = 4$ СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ ЯМ

Основной повод для исследования уравнений БФКЛ и ДГЛАП в суперсимметричных теориях связан с общим убеждением в том, что высокий порядок симметрии может существенно упростить структуру этих уравнений. В самом деле, в ведущем порядке теории возмущений было обнаружено [16], что так называемые операторы твиста 2 в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории ЯМ объединяются в супермультиплеты с аномальными размерностями, получаемыми из универсальной аномальной размерности $\gamma_{\text{un}}(j)$ путем сдвига ее аргумента на целое число. Более того, матрицы аномальных размерностей для операторов твиста 2 фиксированы требованием

суперконформной инвариантности [16]. Вычисления в максимально расширенной $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной теории ЯМ, в которой константа связи не перенормируется, приводят к еще более впечатляющим результатам. Оказывается, что все операторы твиста 2 содержатся в этом случае в одном и том же супермультиплете, матрица их аномальных размерностей полностью фиксирована условием суперконформной инвариантности, а их универсальная аномальная размерность в ведущем порядке оказывается пропорциональна $\Psi(j-1) - \Psi(1)$ (см. раздел 3), что, в свою очередь, приводит к тому факту, что эволюционные уравнения матричных элементов операторов твиста 2 оказываются эквивалентными в пределе большого числа цветов $N_c \rightarrow \infty$ уравнению Шредингера для интегрируемой спиновой модели Гейзенберга [17], [18]. Заметим, что в КХД интегрируемость сохраняется только лишь в малом секторе этих операторов [19]. В случае $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной теории ЯМ оказываются интегрируемыми и уравнения для других наборов операторов [11], [20]–[22]. Похожие результаты, связанные с интегрируемостью многоцветной КХД, были получены ранее в пределе Редже [23]. В работе [4] было показано, что в $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной теории ЯМ имеет место интересное соотношение между эволюционными уравнениями БФКЛ и ДГЛАП. Именно, сингулярности на плоскости значений j аномальных размерностей вильсоновских операторов твиста 2 могут быть в этом случае получены в ведущем порядке теории возмущений из собственных значений ядра уравнения БФКЛ с помощью аналитического продолжения. Вычисления в следующем порядке показали [4], что некоторые из этих соотношений остаются справедливыми также и в старших порядках теории возмущений. В частности, уравнение БФКЛ обладает свойством эрмитовой сепарабельности. Кроме того, линейные комбинации мультипликативно перенормируемых операторов не зависят от константы связи, а собственные значения матрицы аномальных размерностей выражаются в терминах универсальной функции $\gamma_{\text{un}}(j)$, которую также можно получить из соответствующих выражений для КХД с использованием гипотезы максимальной трансцендентности.

3. МАТРИЦА АНОМАЛЬНЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ В ВЕДУЩЕМ ПОРЯДКЕ В $\mathcal{N} = 4$ СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ

В $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной теории ЯМ [24] можно ввести следующие синглетные по цвету и по группе $SU(4)$ вильсоновские операторы твиста 2 [4], [5]:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{O}_{\mu_1, \dots, \mu_j}^g &= \hat{S} G_{\rho\mu_1}^a \mathcal{D}_{\mu_2} \mathcal{D}_{\mu_3} \dots \mathcal{D}_{\mu_{j-1}} G_{\rho\mu_j}^a, \\
 \tilde{\mathcal{O}}_{\mu_1, \dots, \mu_j}^g &= \hat{S} G_{\rho\mu_1}^a \mathcal{D}_{\mu_2} \mathcal{D}_{\mu_3} \dots \mathcal{D}_{\mu_{j-1}} \tilde{G}_{\rho\mu_j}^a, \\
 \mathcal{O}_{\mu_1, \dots, \mu_j}^\lambda &= \hat{S} \bar{\lambda}_i^a \gamma_{\mu_1} \mathcal{D}_{\mu_2} \dots \mathcal{D}_{\mu_j} \lambda^{ai}, \\
 \tilde{\mathcal{O}}_{\mu_1, \dots, \mu_j}^\lambda &= \hat{S} \bar{\lambda}_i^a \gamma_5 \gamma_{\mu_1} \mathcal{D}_{\mu_2} \dots \mathcal{D}_{\mu_j} \lambda^{ai}, \\
 \mathcal{O}_{\mu_1, \dots, \mu_j}^\varphi &= \hat{S} \bar{\varphi}_r^a \mathcal{D}_{\mu_1} \mathcal{D}_{\mu_2} \dots \mathcal{D}_{\mu_j} \varphi_r^a,
 \end{aligned} \tag{3}$$

где $\mathcal{D}_\mu$ – ковариантные производные. Спиноры λ_i и тензор поля $G_{\rho\mu}$ описывают со-

ответственно состояния глюино и глюонов, а φ_r – комплексные скалярные поля. Для всех операторов в соотношениях (3) предполагается симметризация по тензорным и лоренцевым индексам $\mu_1, \dots, \mu_j$ и вычитание следов. Поскольку все операторы твиста 2 лежат в одном и том же супермультиплете, собственные значения их матрицы аномальных размерностей должны выражаться через единственную универсальную аномальную размерность $\gamma_{\text{un}}(j)$ со сдвинутыми аргументами²⁾.

Матрица аномальных размерностей в ведущем порядке теории возмущений в $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной теории ЯМ задается следующими выражениями (см. [18]):

1) для тензорных операторов твиста 2

$$\begin{aligned}\gamma_{gg}^{(0)}(j) &= 4\left(\Psi(1) - \Psi(j-1) - \frac{2}{j} + \frac{1}{j+1} - \frac{1}{j+2}\right), \\ \gamma_{\lambda g}^{(0)}(j) &= 8\left(\frac{1}{j} - \frac{2}{j+1} + \frac{2}{j+2}\right), \quad \gamma_{\varphi g}^{(0)}(j) = 12\left(\frac{1}{j+1} - \frac{1}{j+2}\right), \\ \gamma_{g\lambda}^{(0)}(j) &= 2\left(\frac{2}{j-1} - \frac{2}{j} + \frac{1}{j+1}\right), \quad \gamma_{q\varphi}^{(0)}(j) = \frac{8}{j}, \\ \gamma_{\lambda\lambda}^{(0)}(j) &= 4\left(\Psi(1) - \Psi(j) + \frac{1}{j} - \frac{2}{j+1}\right), \quad \gamma_{\varphi\lambda}^{(0)}(j) = \frac{6}{j+1}, \\ \gamma_{\varphi\varphi}^{(0)}(j) &= 4(\Psi(1) - \Psi(j+1)), \quad \gamma_{g\varphi}^{(0)}(j) = 4\left(\frac{1}{j-1} - \frac{1}{j}\right);\end{aligned}\tag{4}$$

2) для псевдотензорных операторов

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}_{gg}^{(0)}(j) &= 4\left(\Psi(1) - \Psi(j+1) - \frac{2}{j+1} + \frac{2}{j}\right), \\ \tilde{\gamma}_{\lambda g}^{(0)}(j) &= 8\left(-\frac{1}{j} + \frac{2}{j+1}\right), \quad \tilde{\gamma}_{g\lambda}^{(0)}(j) = 2\left(\frac{2}{j} - \frac{1}{j+1}\right), \\ \tilde{\gamma}_{\lambda\lambda}^{(0)}(j) &= 4\left(\Psi(1) - \Psi(j+1) + \frac{1}{j+1} - \frac{1}{j}\right).\end{aligned}\tag{5}$$

Заметим, что в $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричный мультиплет входят также и операторы твиста 2 с фермионными квантовыми числами, но их аномальные размерности совпадают с точностью до сдвига аргумента на целое число с вышеприведенными выражениями для бозонных компонент (ср. [16]).

Аномальные размерности и операторы твиста 2 с мультипликативной перенормировкой. Можно построить пять независимых операторов твиста 2 с мультипликативной перенормировкой. Соответствующие меллиновские моменты

²⁾Недиагональные элементы матрицы аномальных размерностей связаны с непрямыми аномальными размерностями посредством суперконформных тождеств Уорда [25] и могут быть выражены также через непрямую универсальную аномальную размерность [26].

партонных распределений и их аномальные размерности в ведущем порядке имеют вид (см. [18])

$$\begin{aligned}
f_I(j) &= f_g(j) + f_\lambda(j) + f_\varphi(j) \sim f_{\lambda,g,\varphi}^+(j), \\
\gamma_I^{(0)}(j) &= 4(\Psi(1) - \Psi(j-1)) \equiv -4S_1(j-2) \equiv \gamma_+^{(0)}(j), \\
f_{II}(j) &= -2(j-1)f_g(j) + f_\lambda(j) + \frac{2}{3}(j+1)f_\varphi(j) \sim f_{\lambda,g,\varphi}^0(j), \\
\gamma_{II}^{(0)}(j) &= 4(\Psi(1) - \Psi(j+1)) \equiv -4S_1(j) \equiv \gamma_0^{(0)}(j), \\
f_{III}(j) &= -\frac{j-1}{j+2}f_g(j) + f_\lambda(j) - \frac{j+1}{j}f_\varphi(j) \sim f_{\lambda,g,\varphi}^-(j), \\
\gamma_{III}^{(0)}(j) &= 4(\Psi(1) - \Psi(j+3)) \equiv -4S_1(j+2) \equiv \gamma_-^{(0)}(j), \\
f_{IV}(j) &= 2\tilde{f}_g(j) + \tilde{f}_\lambda(j) \sim \tilde{f}_{\lambda,g}^+(j), \\
\gamma_{IV}^{(0)}(j) &= 4(\Psi(1) - \Psi(j)) \equiv -4S_1(j-1) \equiv \tilde{\gamma}_+^{(0)}(j), \\
f_V(j) &= -(j-1)\tilde{f}_g(j) + \frac{j+2}{2}\tilde{f}_\lambda(j) \sim \tilde{f}_{\lambda,g}^-(j), \\
\gamma_V^{(0)}(j) &= 4(\Psi(1) - \Psi(j+2)) \equiv -4S_1(j+1) \equiv \tilde{\gamma}_-^{(0)}(j).
\end{aligned} \tag{6}$$

Таким образом, имеется один супермультиплет операторов с одной аномальной размерностью $\gamma_{\text{un}}(j)$, пропорциональной $\Psi(1) - \Psi(j-1)$. Моменты соответствующих линейных комбинаций партонных распределений могут быть получены из приведенных выше выражений для $f_k(j)$ с помощью подходящего сдвига их аргумента j в соответствии со сдвигом аргумента $\gamma_k(j)$. Более того, коэффициенты в этих линейных комбинациях для $\mathcal{N} = 4$ суперсимметрии могут быть найдены из условия суперконформной инвариантности (ср. [16]), и они должны совпадать во всех порядках теории возмущений в подходящей схеме перенормировок.

Моменты трех мультипликативно перенормируемых операторов твиста 2 в неполяризованном случае имеют вид

$$f_N(j) = a_g f_g(j) + a_\lambda f_\lambda(j) + a_\varphi f_\varphi(j),$$

где коэффициенты a_i можно получить из выражений (6). Сделав такую подстановку в уравнениях ДГЛАП (2), придем к следующим представлениям для соответствующих собственных значений:

$$\begin{aligned}
\gamma_N^{(0)}(j) &= \gamma_{gg}^{(0)}(j) + \frac{a_\lambda}{a_g} \gamma_{\lambda g}^{(0)}(j) + \frac{a_\varphi}{a_g} \gamma_{\varphi g}^{(0)}(j) = \\
&= \gamma_{\lambda\lambda}^{(0)}(j) + \frac{a_g}{a_\lambda} \gamma_{g\lambda}^{(0)}(j) + \frac{a_\varphi}{a_\lambda} \gamma_{\varphi\lambda}^{(0)}(j) = \\
&= \gamma_{\varphi\varphi}^{(0)}(j) + \frac{a_g}{a_\varphi} \gamma_{g\varphi}^{(0)}(j) + \frac{a_\lambda}{a_\varphi} \gamma_{\lambda\varphi}^{(0)}(j).
\end{aligned} \tag{7}$$

Равенства (7) приводят к соотношениям для аномальных размерностей матрицы $\gamma_{ab}^{(0)}(j)$, $a, b = g, \lambda, \varphi$, которые также должны выполняться в следующем за ведущим

порядке с точностью до эффектов нарушения суперконформной инвариантности (см. работу [5] и приведенную там литературу).

Аналогично для набора двух мультипликативно перенормируемых операторов в поляризованном случае

$$\tilde{f}_N(j) = \tilde{a}_g \tilde{f}_g(j) + \tilde{a}_\lambda \tilde{f}_\lambda(j)$$

можно вывести следующие соотношения:

$$\tilde{\gamma}_N^{(0)}(j) = \tilde{\gamma}_{gg}^{(0)}(j) + \frac{\tilde{a}_\lambda}{\tilde{a}_g} \tilde{\gamma}_{\lambda g}^{(0)}(j) = \tilde{\gamma}_{\lambda\lambda}^{(0)}(j) + \frac{\tilde{a}_g}{\tilde{a}_\lambda} \tilde{\gamma}_{g\lambda}^{(0)}(j). \quad (8)$$

Таким образом, имеют место девять уравнений на матричные элементы в случае стандартных партонных распределений и четыре уравнения в случае поляризованных распределений, что полностью задает матрицы аномальных размерностей $\gamma_{ab}^{(0)}(j)$, $a, b = g, \lambda, \varphi$, и $\tilde{\gamma}_{ab}^{(0)}(j)$, $a, b = g, \lambda$, если известны их собственные значения в ведущем порядке³⁾:

$$\gamma_{\pm}^{(0)}(j) = -4S_1(j \mp 2), \quad \gamma_0^{(0)}(j) = -4S_1(j), \quad \tilde{\gamma}_{\pm}^{(0)}(j) = -4S_1(j \mp 1).$$

4. МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ МАТРИЦЫ АНОМАЛЬНЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ В $\mathcal{N} = 4$ СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ ЯМ

Как отмечалось в разделе 1, универсальную аномальную размерность можно получить непосредственно из результатов КХД, не обращаясь к вкладу скалярных частиц. Эта возможность основана на новом соотношении между динамикой ДГЛАП и БФКЛ в $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной теории ЯМ [4], [8].

Прежде всего отметим, что собственные значения ядра уравнения БФКЛ оказываются аналитическими функциями конформного спина $|n|$ по крайней мере в двух первых порядках теории возмущений [4]. Введем уровень трансцендентности i для собственных значений $\omega(\gamma)$ интегральных ядер уравнений БФКЛ в согласии со сложностью членов в соответствующих суммах:

$$\Psi \sim \frac{1}{\gamma}, \quad \Psi' \sim \beta' \sim \zeta(2) \sim \frac{1}{\gamma^2}, \quad \Psi'' \sim \beta'' \sim \zeta(3) \sim \frac{1}{\gamma^3}.$$

Тогда в рамках так называемой $\overline{\text{DR}}$ -схемы (modified dimensional reduction) [27] из уравнения БФКЛ вытекает, что специальные функции на различных уровнях трансцендентности i не смешиваются⁴⁾ (см. [8]), т.е. все специальные функции в ведущем и следующем порядках теории возмущений содержат лишь суммы членов $\sim 1/\gamma^i$ при $i = 1$ и $i = 3$, соответственно.

Поскольку в $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной теории ЯМ имеет место соотношение между уравнениями БФКЛ и ДГЛАП (см. [4], [8]), похожее явление должно наблюдаться и для самих аномальных размерностей, т.е. базисные функции $\gamma_{\text{un}}^{(0)}(j)$,

³⁾ Детали этой процедуры см. в работе [4].

⁴⁾ Заметим, что сходные аргументы были использованы в работе [28] при получении аналитических выражений для вкладов некоторых сложных диаграмм Фейнмана в теориях с массивными частицами без привлечения прямых вычислений.

$\gamma_{\text{un}}^{(1)}(j)$ и $\gamma_{\text{un}}^{(2)}(j)$, как предполагается, должны иметь вид $\sim 1/j^i$ с соответствующими уровнями $i = 1$, $i = 3$ и $i = 5$. Члены, которые возникают в данном порядке теории возмущений из предыдущих порядков, могли бы нарушать это свойство. Эти вклады порождаются и/или обращаются в нуль подходящей конечной перенормировкой константы связи. Такие члены, однако, не возникают именно в $\overline{\text{DR}}$ -схеме.

Известно, что в первых двух порядках теории возмущений⁵⁾ (с соотношением суперсимметрии для цветовых факторов теории КХД $C_F = C_A = N_c$) наиболее сложные вклады (а именно, те, для которых $i = 1$ и $i = 3$, соответственно) оказываются одними и теми же для всех соответствующих аномальных размерностей в КХД [2] и в скаляр-скалярном взаимодействии [5]. С помощью этого свойства универсальные аномальные размерности $\gamma_{\text{un}}^{(0)}(j)$ и $\gamma_{\text{un}}^{(1)}(j)$ были найдены в [4] с помощью принципа максимальной трансцендентности без знания всех элементов матрицы аномальных размерностей в КХД и проверены прямым вычислением в работе [5].

Из вышеприведенных аргументов можно заключить, что и в третьем порядке теории возмущений имеется лишь один возможный кандидат на роль универсальной аномальной размерности $\gamma_{\text{un}}^{(2)}(j)$, а именно самая сложная часть матрицы аномальных размерностей КХД (с наложенным соотношением суперсимметрии на цветовые факторы КХД $C_F = C_A = N_c$). Действительно, после диагонализации матрицы аномальных размерностей ее собственные значения должны содержать это наиболее сложное выражение в виде общего вклада, так как они отличаются друг от друга только сдвигами аргумента, и их разности строятся из менее сложных членов. Недиагональные элементы матрицы аномальных размерностей также содержат только менее сложные члены (см., например, явные выражения для аномальных размерностей в первых двух порядках теории возмущений в работах [2] для КХД и в работе [5] для $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной теории ЯМ), а потому они не могут порождать наиболее сложные вклады в собственные значения матрицы аномальных размерностей.

Таким образом, наиболее сложная часть аномальных размерностей КХД в третьем порядке теории возмущений должна совпасть (с точностью до цветовых множителей) с универсальной аномальной размерностью $\gamma_{\text{un}}^{(2)}(j)$.

5. УНИВЕРСАЛЬНАЯ АНОМАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ ДЛЯ $\mathcal{N} = 4$ СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ ЯМ

Окончательный трехпетлевой результат для универсальной аномальной размерности $\gamma_{\text{un}}(j)$ в $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной теории ЯМ имеет вид [9]⁶⁾

$$\gamma(j) \equiv \gamma_{\text{un}}(j) = \hat{a} \gamma_{\text{un}}^{(0)}(j) + \hat{a}^2 \gamma_{\text{un}}^{(1)}(j) + \hat{a}^3 \gamma_{\text{un}}^{(2)}(j) + \dots, \quad \hat{a} = \frac{\alpha N_c}{4\pi}, \quad (9)$$

⁵⁾ Это свойство выполняется и в третьем порядке теории возмущений, как видно из работы [9].

⁶⁾ Заметим, что, как и в работе [7], наша нормировка для $\gamma(j)$ содержит дополнительный множитель $-1/2$ по сравнению со стандартной нормировкой (см. [2]) и отличается знаком от нормировки в работах [3].

где

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4}\gamma_{\text{un}}^{(0)}(j+2) &= -S_1, \\
 \frac{1}{8}\gamma_{\text{un}}^{(1)}(j+2) &= (S_3 + \bar{S}_{-3}) - 2\bar{S}_{-2,1} + 2S_1(S_2 + \bar{S}_{-2}), \\
 \frac{1}{32}\gamma_{\text{un}}^{(2)}(j+2) &= 2\bar{S}_{-3}S_2 - S_5 - 2\bar{S}_{-2}S_3 - 3\bar{S}_{-5} + 24\bar{S}_{-2,1,1,1} + \\
 &\quad + 6(\bar{S}_{-4,1} + \bar{S}_{-3,2} + \bar{S}_{-2,3}) - 12(\bar{S}_{-3,1,1} + \bar{S}_{-2,1,2} + \bar{S}_{-2,2,1}) - \\
 &\quad - (S_2 + 2S_1^2)(3\bar{S}_{-3} + S_3 - 2\bar{S}_{-2,1}) - S_1(8\bar{S}_{-4} + \bar{S}_{-2}^2 + \\
 &\quad + 4S_2\bar{S}_{-2} + 2S_2^2 + 3S_4 - 12\bar{S}_{-3,1} - 10\bar{S}_{-2,2} + 16\bar{S}_{-2,1,1})
 \end{aligned} \tag{10}$$

и $S_a \equiv S_a(j)$, $S_{a,b} \equiv S_{a,b}(j)$, $S_{a,b,c} \equiv S_{a,b,c}(j)$ – гармонические суммы

$$\begin{aligned}
 S_a(j) &= \sum_{m=1}^j \frac{1}{m^a}, & S_{a,b,c,\dots}(j) &= \sum_{m=1}^j \frac{1}{m^a} S_{b,c,\dots}(m), \\
 S_{-a}(j) &= \sum_{m=1}^j \frac{(-1)^m}{m^a}, & S_{-a,b,c,\dots}(j) &= \sum_{m=1}^j \frac{(-1)^m}{m^a} S_{b,c,\dots}(m)
 \end{aligned}$$

и

$$\bar{S}_{-a,b,c,\dots}(j) = (-1)^j S_{-a,b,c,\dots}(j) + S_{-a,b,c,\dots}(\infty)(1 - (-1)^j). \tag{11}$$

Выражение (11) определено при всех целых значениях аргументов (см. [4], [29], [30]), но его легко также аналитически продолжить на вещественные и комплексные j с помощью метода работ [4], [30], [31].

Предел $j \rightarrow 1$. Предельный переход $j \rightarrow 1$ важен для исследования поведения партонных распределений при малых x (см. обзор [32] и приведенные в нем ссылки). Этот режим стал особенно популярен в последнее время после того, как были получены новые экспериментальные данные для высокоэнергетического поведения структурных функций глубоко неупругого рассеяния [33]. Используя асимптотические выражения для гармонических сумм при $j = 1 + \omega \rightarrow 1$ (см. [4], [5]), получим для универсальной аномальной размерности $\gamma_{\text{un}}(j)$ в $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной теории ЯМ в формуле (9) следующие выражения:

$$\begin{aligned}
 \gamma_{\text{un}}^{(0)}(1 + \omega) &= \frac{4}{\omega} + O(\omega^1), \\
 \gamma_{\text{un}}^{(1)}(1 + \omega) &= -32\zeta_3 + O(\omega^1), \\
 \gamma_{\text{un}}^{(2)}(1 + \omega) &= 32\zeta_3 \frac{1}{\omega^2} - 232\zeta_4 \frac{1}{\omega} - 1120\zeta_5 + 256\zeta_3\zeta_2 + O(\omega^1),
 \end{aligned} \tag{12}$$

которые находятся в согласии с предсказаниями для $\gamma_{\text{un}}^{(0)}(1 + \omega)$, $\gamma_{\text{un}}^{(1)}(1 + \omega)$ и для первого члена $\gamma_{\text{un}}^{(2)}(1 + \omega)$, полученными из исследования уравнения БФКЛ в первых двух порядках теории возмущений в работе [8]⁷⁾.

⁷⁾К сожалению, в результаты работ [4], [8] вкралась опечатка. Именно, множитель при $\hat{a}^3$, полученный в пределе $j \rightarrow 1$, в уравнении (39) работы [4] должен быть умножен на 4.

6. ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ И АДС/КТП-СООТВЕТСТВИЕ

Рассмотрим несколько важных предельных случаев соотношений (9)–(11), в которых наш результат можно сравнить с результатами, полученными в других подходах.

6.1. Предел $j \rightarrow 4$. Исследование интегрируемости в $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной теории ЯМ для операторов Беренштейна–Малдасены–Настасе [34] позволяет найти аномальную размерность операторов Кониши [11], [35], для которых аномальная размерность совпадает с нашим выражением (9) при $j = 4$:

$$\gamma_{\text{un}}(j)|_{j=4} = -6\hat{a} + 24\hat{a}^2 - 168\hat{a}^3 = -\frac{3\alpha N_c}{2\pi} + \frac{3\alpha^2 N_c^2}{2\pi^2} - \frac{21\alpha^3 N_c^3}{8\pi^4}. \quad (13)$$

Это соотношение подтверждено прямыми вычислениями в двухпетлевом [5], [10] и трехпетлевом [12] случаях.

Отметим очень интересный результат, основанный на рассмотрении факторизованной S -матрицы [13], который включает в себя как струнные, так и квантово-полевые исследования с использованием АДС/КТП-соответствия [11], [21], [22], [34], [36], [37] и открывает возможность найти трехпетлевую аномальную размерность из анзаца Бете при произвольном значении лоренцевского спина. Полученный при этом анзац Бете воспроизводит наши результаты для универсальной аномальной размерности $\gamma_{\text{un}}(j)$ (соотношение (9)), подтверждая таким образом гипотезу об интегрируемости $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной теории ЯМ.

6.2. Предел $j \rightarrow \infty$. В пределе $j \rightarrow \infty$ результаты (10) значительно упрощаются. Заметим, что этот предел связан с исследованием асимптотического поведения структурных функций и сечений при $x \rightarrow 1$, отвечающего квазиупругой кинематике глубоко неупругого ep -рассеяния.

Можно получить следующее асимптотическое поведение для $\mathcal{N} = 4$ универсальной аномальной размерности $\gamma_{\text{un}}(j)$ в уравнении (9):

$$\begin{aligned} \gamma_{\text{un}}^{(0)}(j) &= -4(\ln j + \gamma_e) + O(j^{-1}), \\ \gamma_{\text{un}}^{(1)}(j) &= 8\zeta_2(\ln j + \gamma_e) + 12\zeta_3 + O(j^{-1}), \\ \gamma_{\text{un}}^{(2)}(j) &= -88\zeta_4(\ln j + \gamma_e) - 16\zeta_2\zeta_3 - 80\zeta_5 + O(j^{-1}). \end{aligned} \quad (14)$$

Недавно коэффициенты при $\ln j$ в выражениях (14) были подтверждены вычислениями Эдена и Штадахера [14], в которых члены старших порядков $\gamma_{\text{un}}^{(n)}(j)$, $n \geq 3$, также были получены с помощью подхода анзаца Бете.

6.3. Пересуммирование γ_{un} и АДС/КТП-соответствие. Последние несколько лет наблюдался быстрый прогресс в исследовании $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной теории ЯМ в рамках АДС/КТП-соответствия [15], в котором предел сильной связи $\alpha_s N_c \rightarrow \infty$ описывается классической теорией супергравитации в пространстве анти-де Ситтера $AdS_5 \times S^5$. В частности, было выдвинуто весьма интригующее предсказание [38] (см. также [39]) относительно поведения аномальной размерности операторов твиста 2 при больших j :

$$\gamma(j) = a(z) \ln j, \quad z = \frac{\alpha N_c}{\pi} = 4\hat{a} \quad (15)$$

в режиме сильной связи (относительно асимптотических поправок см. [40])

$$\lim_{z \rightarrow \infty} a = -z^{1/2} + \frac{3 \ln 2}{8\pi} + O(z^{-1/2}). \quad (16)$$

С другой стороны, все аномальные размерности $\gamma_i(j)$ и $\tilde{\gamma}_i(j)$, $i = +, 0, -$, при больших j совпадают, и наши результаты для $\gamma_{\text{un}}(j)$ в выражении (9) позволяют найти три первых члена разложения коэффициента $a(z)$ при малых z (см. также (14)):

$$\lim_{z \rightarrow 0} a = -z + \frac{\pi^2}{12} z^2 - \frac{11}{720} \pi^4 z^3 + \dots \quad (17)$$

Для пересуммирования этого ряда предлагается следующее уравнение для $\tilde{a}$ [5]:

$$z = -\tilde{a} + \frac{\pi^2}{12} \tilde{a}^2, \quad (18)$$

которое является интерполяцией между его разложением в режиме слабой связи с точностью до поправок третьего порядка

$$\tilde{a} = -z + \frac{\pi^2}{12} z^2 - \frac{1}{72} \pi^4 z^3 + O(z^4) \quad (19)$$

и его асимптотическим поведением в режиме сильной связи

$$\tilde{a} = -\frac{2\sqrt{3}}{\pi} z^{1/2} + \frac{6}{\pi^2} + O(z^{-1/2}) \approx -1.1026 z^{1/2} + 0.6079 + O(z^{-1/2}). \quad (20)$$

Замечательным представляется тот факт, что предсказание для приближения третьего слагаемого в правой части (19), основанное на вышеприведенном простом уравнении и полученное до результатов работы [9], оказывается верным с точностью $\sim 10\%$. Тем самым экстраполяция (18) представляется справедливой при всех значениях переменной z .

7. СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ ПОМЕРОНОМ И ГРАВИТОНОМ В РАМКАХ АДС/КТП-СООТВЕТСТВИЯ

При $j \rightarrow 2$ можно принять в расчет тот факт, что в соответствии с уравнением БФКЛ [7] аномальная размерность операторов твиста 2 в кинематике Редже оказывается квантованной:

$$\gamma = \frac{1}{2} + i\nu + \frac{j-1}{2} = 1 + \frac{j-2}{2} + i\nu \quad (21)$$

для главной серии унитарных представлений группы Мёбиуса. С другой стороны, в диффузионном приближении, справедливом вблизи ведущей сингулярности парциальной волны в t -канале двухчастичного рассеяния, собственное значение ядра уравнения БФКЛ имеет вид

$$j-1 = \omega_0 - D\nu^2, \quad (22)$$

где ω_0 и D — соответственно интерцепт померона и коэффициент диффузии и являются функциями от константы связи. Мы предполагаем, что в режиме большой

константы связи в $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной теории ЯМ интерцепт померона стремится к интерцепту гравитона в пространстве $AdS_5 \times S_5$ [41], откуда следует, что

$$j_0 = 1 + \omega_0 = 2 - \Delta, \quad (23)$$

где Δ – малый параметр. Далее, ввиду закона сохранения энергии-импульса ($\gamma = 0$ для $j = 2$) параметры Δ и D совпадают, а $\gamma(j)$ выражается в окрестности $j = 2$ в терминах единственного параметра:

$$\gamma(j) = (j - 2) \left[\frac{1}{2} - \frac{1/\Delta}{1 + \sqrt{1 + (j - 2)/\Delta}} \right]. \quad (24)$$

Производную $\gamma'(j)|_{j=2}$ можно вычислить исходя из наших результатов в первых трех порядках теории возмущений:

$$\gamma'(j)|_{j=2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\Delta} = -\frac{\pi^2}{6}z + \frac{\pi^4}{72}z^2 - \frac{\pi^6}{540}z^3 + \dots \quad (25)$$

Так же, как и в случае больших j , для пересуммирования этого ряда мы использовали уравнение $\tilde{a} = \gamma'(j)|_{j=2}$ (см. [5]):

$$\frac{\pi^2}{6}z = -\tilde{a} + \frac{1}{2}\tilde{a}^2. \quad (26)$$

Его решение при малых z имеет вид

$$\tilde{a} = -\frac{\pi^2}{6}z + \frac{\pi^4}{72}z^2 - \frac{\pi^6}{432}z^3 + \dots \quad (27)$$

Из (25) и (27) следует, что предсказания для третьего порядка теории возмущений, основанные на простом соотношении (26), верны с точностью $\sim 20\%$. Тем самым можно надеяться, что этот способ пересуммирования обеспечивает хорошую оценку также и для поведения параметра a при больших z :

$$\gamma'(2) = 1 - \sqrt{\frac{\pi^2}{3}z + 1} \approx -\frac{\pi}{\sqrt{3}}z^{1/2} + 1 + O(z^{-1/2}). \quad (28)$$

Тогда для интерцепта померона в $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной теории ЯМ из формулы пересуммирования (26) при больших z следует

$$j = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2\pi}z^{-1/2} - \frac{3}{4\pi^2}z^{-1} - O(z^{-2}). \quad (29)$$

С другой стороны, из (21) и (22) и из соотношения

$$E^2 = (j + \Gamma)^2 - 4, \quad \Gamma = -2\gamma, \quad (30)$$

справедливого в рамках АдС/КТП-соответствия для струнной энергии при значениях параметра j , близких к 2 [15], [38], следует, что уравнение БФКЛ в диффузионном приближении (21) эквивалентно уравнению для ведущей траектории Редже в теории суперструн:

$$j = 2 + \frac{\alpha'}{2}t, \quad t = \frac{E^2}{R^2}, \quad \alpha' = \frac{R^2}{2}\Delta, \quad (31)$$

где R – радиус пространства анти-де Ситтера.

Естественно ожидать, что эта траектория Редже остается приближенно линейной (с точностью до поправок к диффузионному приближению для уравнения БФКЛ) при всех значениях t и j . Можно попытаться использовать выражение (24) также и при больших z :

$$\gamma(j)|_{z \rightarrow \infty} = -\sqrt{j-2} \Delta^{-1/2}. \quad (32)$$

Это соотношение находится в согласии с предсказаниями Полякова и других авторов [15], [38],

$$\gamma(j)|_{(z,j) \rightarrow \infty} = -\frac{1}{2}E = -\sqrt{\pi j} z^{1/4} - \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \frac{j^{3/2}}{z^{1/4}} + \dots, \quad (33)$$

при условии справедливости соотношения

$$\Delta = \frac{1}{\pi} z^{-1/2}. \quad (34)$$

Этот результат совпадает с точностью до 15% с оценкой $\Delta = [\sqrt{3}/(2\pi)] z^{-1/2}$, полученной в (29) из процедуры пересуммирования (26). Можно ожидать, что выражение (32) с параметром Δ , вычисленным в (34), задает аномальную размерность операторов твиста 2 при $z \rightarrow \infty$ и при всех j (если пренебречь эффектами нелинейности).

Заметим, что результаты (32)–(34) (см. также [9], [42]) были недавно подтверждены в работе [43].

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы представили здесь результаты для аномальной размерности $\gamma_{\text{un}}(j)$ вильсоновских операторов твиста 2 в $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной калибровочной теории в приближении ССВП и проверили их самосогласованность в реджевском ($j \rightarrow 1$) и квазиупругом ($j \rightarrow \infty$) режимах. Наш результат для универсальной аномальной размерности при $j = 4$ можно использовать для нахождения аномальной размерности оператора Кониши [35] в трехпетлевом приближении. Примечательно, что наш результат совпадает с соответствующими предсказаниями в подходе дилатационного оператора и интегрируемых теорий [11], [36]. Метод, развитый в этом построении, можно также применить и в случаях $\mathcal{N} = 1$ и $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричных теорий ЯМ и КХД с низшими симметриями, которые весьма важны в феноменологических приложениях. В связи с проверкой АдС/КТП-соответствия вычисления разнообразных физических величин в $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной теории ЯМ привлекают к себе значительный интерес, так как эти вычисления дают возможность развивать непerturbативные подходы к КХД.

Нами было показано, что выражения, представляющие собой интерполяцию между режимами слабой и сильной связи, замечательным образом оказываются справедливыми как в пределе $j \rightarrow \infty$, так и при $j \rightarrow 2$. Интегрируемость эволюционных уравнений для операторов твиста 2 в ведущем порядке теории возмущений [17], [18] оказывается примечательным свойством $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной теории ЯМ, которое следует проверить также в следующих двух порядках. Мы предполагаем обсудить эти вопросы в последующих публикациях.

Благодарности. Авторы благодарны Н. Бейсерту, Э. Сокачевой и М. Штудатхеру за обсуждения результатов нашей работы. Работа поддержана РФФИ (грант № 04-02-17094) и грантом RSGSS-1124.2003.2.

Список литературы

- [1] В. Н. Грибов, Л. Н. Липатов, *ЯФ*, **15** (1972), 781; 1218; Л. Н. Липатов, *ЯФ*, **20** (1974), 181; G. Altarelli, G. Parisi, *Nucl. Phys. B*, **126** (1977), 298; Ю. Л. Докшицер, *ЖЭТФ*, **73** (1977), 1216.
- [2] D. J. Gross, F. Wilczek, *Phys. Rev. D*, **8** (1973), 3633; H. Georgi, H. D. Politzer, *Phys. Rev. D*, **9** (1974), 416; E. G. Floratos, D. A. Ross, C. T. Sachrajda, *Nucl. Phys. B*, **129** (1977), 66; Erratum, **139** (1978), 545; **152** (1979), 493; A. Gonzalez-Arroyo, C. Lopez, F. J. Yndurain, *Nucl. Phys. B*, **153** (1979), 161; A. Gonzalez-Arroyo, C. Lopez, *Nucl. Phys. B*, **166** (1980), 429; G. Gurci, W. Furmanski, R. Petronzio, *Nucl. Phys. B*, **175** (1980), 27; W. Furmanski, R. Petronzio, *Phys. Lett. B*, **97** (1980), 437; E. G. Floratos, C. Kounnas, R. Lacage, *Nucl. Phys. B*, **192** (1981), 417; C. Lopes, F. J. Yndurain, *Nucl. Phys. B*, **171** (1980), 231; **183** (1981), 157; R. Hamberg, W. L. van Neerven, *Nucl. Phys. B*, **379** (1992), 143; R. K. Ellis, W. Vogelsang, *The evolution of parton distributions beyond leading order*, [hep-ph/9602356](#); R. Mertig, W. L. van Neerven, *Z. Phys. C*, **70** (1996), 637; W. Vogelsang, *Nucl. Phys. B*, **475** (1996), 47.
- [3] S. Moch, J. A. M. Vermaseren, A. Vogt, *Nucl. Phys. B*, **688** (2004), 101; A. Vogt, S. Moch, J. A. M. Vermaseren, *Nucl. Phys. B*, **691** (2004), 129.
- [4] A. V. Kotikov, L. N. Lipatov, *Nucl. Phys. B*, **661** (2003), 19; [hep-ph/0112346](#).
- [5] A. V. Kotikov, L. N. Lipatov, V. N. Velizhanin, *Phys. Lett. B*, **557** (2003), 114.
- [6] Л. Н. Липатов, *ЯФ*, **23** (1976), 642; V. S. Fadin, E. A. Kuraev, L. N. Lipatov, *Phys. Lett. B*, **60** (1975), 50; E. A. Кураев, Л. Н. Липатов, В. С. Фадин, *ЖЭТФ*, **71** (1976), 840; **72** (1977), 377; И. И. Балицкий, Л. Н. Липатов, *ЯФ*, **28** (1978), 1597; *Письма в ЖЭТФ*, **30** (1979), 383.
- [7] V. S. Fadin, L. N. Lipatov, *Phys. Lett. B*, **429** (1998), 127; G. Camici, M. Ciafaloni, *Phys. Lett. B*, **430** (1998), 349.
- [8] A. V. Kotikov, L. N. Lipatov, *Nucl. Phys. B*, **582** (2000), 19.
- [9] A. V. Kotikov, L. N. Lipatov, A. I. Onishchenko, V. N. Velizhanin, *Phys. Lett. B*, **595** (2004), 521.
- [10] G. Arutyunov, B. Eden, A. C. Petkou, E. Sokatchev, *Nucl. Phys. B*, **620** (2002), 380; B. Eden, C. Jarczak, E. Sokatchev, Y. S. Stanev, *Nucl. Phys. B*, **722** (2005), 119; [hep-th/0501077](#); B. Eden, *Nucl. Phys. B*, **738** (2006), 409; [hep-th/0501234](#).
- [11] N. Beisert, C. Kristjansen, M. Staudacher, *Nucl. Phys. B*, **664** (2003), 131.
- [12] B. Eden, C. Jarczak, E. Sokatchev, *Nucl. Phys. B*, **712** (2005), 157; [hep-th/0409009](#).
- [13] M. Staudacher, *JHEP*, **05** (2005), 054; [hep-th/0412188](#).
- [14] B. Eden, M. Staudacher, *J. Stat. Mech.*, **11** (2006), 014; [hep-th/0603157](#).
- [15] J. Maldacena, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **2** (1998), 231; *Int. J. Theor. Phys.*, **38** (1998), 1113; S. S. Gubser, I. R. Klebanov, A. M. Polyakov, *Phys. Lett. B*, **428** (1998), 105; E. Witten, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **2** (1998), 253.
- [16] А. П. Бухвостов, Е. А. Кураев, Л. Н. Липатов, Г. В. Фролов, *Письма в ЖЭТФ*, **41** (1985), 77; A. P. Bukhvostov, G. V. Frolov, L. N. Lipatov, E. A. Kuraev, *Nucl. Phys. B*, **258** (1985), 601.
- [17] L. N. Lipatov, “Evolution equations in QCD”, *Perspectives in hadronic physics*, Proc. ICTP Conf. (Trieste, Italy, 1997), eds. S. Boffi, C. Cio Degli Atti, M. Giannini, World Scientific, Singapore, 1998, 413.
- [18] L. N. Lipatov, “Effective action for high energy processes in QCD”, *Very high multiplicity physics*, Proc. Int. Workshop (Dubna, 2000), eds. J. Manjavidze, A. Sissakian, JINR, Dubna,

- 2000, 159; *Nucl. Phys. B. Proc. Suppl.*, **99** (2001), 175.
- [19] V. M. Braun, S. E. Derkachov, A. N. Manashov, *Phys. Rev. Lett.*, **81** (1998), 2020; A. V. Belitsky, *Phys. Lett. B*, **453** (1999), 59.
- [20] G. Ferretti, R. Heise, K. Zarembo, *Phys. Rev. D*, **70** (2004), 074024; N. Beisert, G. Ferretti, R. Heise, K. Zarembo, *Nucl. Phys. B*, **717** (2005), 137; [hep-th/0412029](#).
- [21] J. A. Minahan, K. Zarembo, *JHEP*, **03** (2003), 013.
- [22] N. Beisert, M. Staudacher, *Nucl. Phys. B*, **670** (2003), 439.
- [23] Л. Н. Липатов, *Письма в ЖЭТФ*, **59** (1994), 571; L. N. Lipatov, *High energy asymptotics of multi-colour QCD and exactly solvable lattice models*, [hep-th/9311037](#); L. D. Faddeev, G. P. Korchemsky, *Phys. Lett. B*, **342** (1995), 311.
- [24] L. Brink, J. H. Schwarz, J. Scherk, *Nucl. Phys. B*, **121** (1977), 77; F. Gliozzi, J. Scherk, D. I. Olive, *Nucl. Phys. B*, **122** (1977), 253.
- [25] A. V. Belitsky, D. M. Müller, A. Schafer, *Phys. Lett. B*, **450** (1999), 126; A. V. Belitsky, D. Müller, *Nucl. Phys. B. Proc. Suppl.*, **79** (1999), 576; [hep-ph/9905211](#); *Phys. Rev. D*, **65** (2002), 054037.
- [26] A. I. Onishchenko, V. N. Velizhanin, *JHEP*, **02** (2004), 036.
- [27] W. Siegel, *Phys. Lett. B*, **84** (1979), 193.
- [28] J. Fleischer, A. V. Kotikov, O. L. Veretin, *Nucl. Phys. B*, **547** (1999), 343; *Acta Phys. Polon. B*, **29** (1998), 2611.
- [29] D. I. Kazakov, A. V. Kotikov, *Nucl. Phys. B*, **307** (1988), 721; Erratum, **345** (1990), 299; *Phys. Lett. B*, **291** (1992), 171.
- [30] A. V. Kotikov, V. N. Velizhanin, *Analytic continuation of the Mellin moments of deep inelastic structure functions*, [hep-ph/0501274](#).
- [31] А. В. Котиков, *ЯФ*, **57** (1994), 142.
- [32] Small x Collaboration (Bo Andersson, et al.), *Eur. Phys. J. C*, **25** (2002), 77; [hep-ph/0204115](#).
- [33] H1 Collaboration (C. Adloff et al.), *Eur. Phys. J. C*, **21** (2001), 33; [hep-ex/0012053](#); ZEUS Collaboration (S. Chekanov et al.), *Eur. Phys. J. C*, **21** (2001), 443; [hep-ex/0105090](#).
- [34] D. Berenstein, J. M. Maldacena, H. Nastase, *JHEP*, **04** (2002), 013.
- [35] K. Konishi, *Phys. Lett. B*, **135** (1984), 439.
- [36] N. Beisert, *Nucl. Phys. B*, **682** (2004), 487.
- [37] G. Arutyunov, S. Frolov, J. Russo, A. A. Tseytlin, *Nucl. Phys. B*, **671** (2003), 3; G. Arutyunov, J. Russo, A. A. Tseytlin, *Phys. Rev. D*, **69** (2004), 086009; G. Arutyunov, M. Staudacher, *JHEP*, **03** (2004), 004; V. A. Kazakov, A. Marshakov, J. A. Minahan, K. Zarembo, *JHEP*, **05** (2004), 024; G. Arutyunov, S. Frolov, M. Staudacher, *JHEP*, **10** (2004), 016; V. A. Kazakov, K. Zarembo, *JHEP*, **10** (2004), 060; S. Frolov, A. A. Tseytlin, *JHEP*, **07** (2003), 016; *Nucl. Phys. B*, **668** (2003), 77; *Phys. Lett. B*, **570** (2003), 96; S. Frolov, I. Y. Park, A. A. Tseytlin, *Phys. Rev. D*, **71** (2005), 026006; N. Beisert, J. A. Minahan, M. Staudacher, K. Zarembo, *JHEP*, **09** (2003), 010; N. Beisert, S. Frolov, M. Staudacher, A. A. Tseytlin, *JHEP*, **10** (2003), 037.
- [38] S. S. Gubser, I. R. Klebanov, A. M. Polyakov, *Nucl. Phys. B*, **636** (2002), 99.
- [39] M. Kruczenski, *JHEP*, **12** (2002), 024; Yu. Makeenko, *JHEP*, **01** (2003), 007; [hep-th/0210256](#); M. Axenides, E. Floratos, A. Kehagias, *Nucl. Phys. B*, **662** (2003), 170; [hep-th/0210091](#).
- [40] S. Frolov, A. A. Tseytlin, *JHEP*, **06** (2002), 007.
- [41] J. Polchinski, M. J. Strassler, *JHEP*, **05** (2003), 012.
- [42] A. V. Kotikov, L. N. Lipatov, A. I. Onishchenko, V. N. Velizhanin, *Phys. Lett. B*, **632** (2006), 754.
- [43] R. C. Brower, J. Polchinski, M. J. Strassler, C.-I. Tan, *The Pomeron and gauge/string duality*, [hep-th/0603115](#).