Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Павлов, Интегрируемость егоровских систем
гидродинамического типа, *ТМФ*, 2007, том 150, но-
мер 2, 263–285

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf5978>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 17:37:16

© 2007 г.

М. В. Павлов*

ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ ЕГОРОВСКИХ СИСТЕМ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА

Представлен критерий интегрируемости егоровских систем гидродинамического типа. Найдено общее решение методом годографа. Даны примеры. Описание триортогональных систем координат обсуждается с точки зрения преобразований по решению.

Ключевые слова: гамильтонова структура, преобразование по решению, егоровская метрика, система гидродинамического типа, инварианты Римана, расширенное преобразование годографа, обобщенное преобразование годографа.

В честь Сергея Царева

1. ВВЕДЕНИЕ

Теория интегрируемых систем гидродинамического типа

$$u_t^i = \sum_{j=1}^N v_j^i(\mathbf{u}) u_x^j, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

была создана Дубровиным и Новиковым [1] и развита Царевым [2], [3].

Интегрируемость систем гидродинамического типа (1) была исследована Царевым в работах [2] для различных характеристических скоростей v^i , которые определяются алгебраической системой

$$\det |v_k^i(\mathbf{u}) - v \delta_k^i| = 0.$$

Если система (1) может быть записана через инварианты Римана $r^i(\mathbf{u})$, $i = 1, 2, \dots, N$, в диагональной форме

$$r_t^i = v^i(\mathbf{r}) r_x^i,$$

тогда условие интегрируемости (так называемое свойство “полугамильтоновости”) имеет вид

$$\partial_j \frac{\partial_k v^i}{v^k - v^i} = \partial_k \frac{\partial_j v^i}{v^j - v^i}, \quad i \neq j \neq k,$$

*Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия.
E-mail: M.V.Pavlov@lboro.ac.uk

где $\partial_k \equiv \partial/\partial r^k$. Любая полугамильтонова система гидродинамического типа (1) обладает бесконечным набором законов сохранения

$$\partial_t h(\mathbf{u}) = \partial_x p(\mathbf{u}) \quad (2)$$

и бесконечным набором коммутирующих потоков (т.е. функции u^k одновременно являются функциями x , t и τ , тогда условия совместности $(u_\tau^i)_t = (u_t^i)_\tau$ должны быть выполнены)

$$u_\tau^i = \sum_{j=1}^N w_j^i(\mathbf{u}) u_x^j, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (3)$$

параметризованных N произвольными функциями одного аргумента (см. работы [2]). Алгебраическая система

$$x\delta_k^i + tv_k^i(\mathbf{u}) = w_k^i(\mathbf{u}), \quad i, k = 1, 2, \dots, N, \quad (4)$$

задает (в неявной форме) общее решение (1). Это есть *обобщенный метод годографа*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [4], [5]. Полугамильтонова система гидродинамического типа (1) является егоровской, если она имеет пару законов сохранения

$$\partial_t a = \partial_x b, \quad \partial_t b = \partial_x c. \quad (5)$$

Если (1) является егоровской системой гидродинамического типа, тогда каждый коммутирующий поток (3) имеет аналогичную пару (см. работы [4], [5]) законов сохранения (5):

$$\partial_\tau a = \partial_x h, \quad \partial_\tau h = \partial_x f. \quad (6)$$

В этой работе мы описываем очень важный класс законов сохранения – егоровские системы гидродинамического типа (см. работы [2]–[13]), которые имеют множество применений в различных областях чистой и прикладной математики, физики, биологии и химии.

Здесь мы представляем расширенный метод годографа для егоровских систем гидродинамического типа и значительно улучшаем обобщенный метод годографа (4). Если егоровские системы гидродинамического типа обладают гамильтоновой структурой, то N серий законов сохранения и коммутирующих потоков могут быть найдены итеративно.

Статья организована следующим образом. Во втором разделе егоровские системы гидродинамического типа рассмотрены с помощью дифференциальной геометрии (сопряженные криволинейные системы координат). Введен *егоровский базисный набор* законов сохранения и коммутирующих потоков. В третьем разделе обобщенный метод годографа приспособлен для егоровских систем гидродинамического типа. В разделе 4 представлен расширенный метод годографа; в разделе 5 предложен критерий интегрируемости егоровских систем гидродинамического типа. В шестом разделе рассмотрены ортогональные системы координат с симметричными

коэффициентами вращения. В разделе 7 исследованы егоровские системы гидродинамического типа, обладающие локальной гамильтоновой структурой, и выведены соответствующие уравнения ассоциативности. В разделе 8 найдены преобразования по решению, сохраняющие локальную гамильтонову структуру. В девятом разделе рассмотрены егоровские триортогональные системы координат. Описаны преобразования между егоровскими системами гидродинамического типа, связанными с локальными гамильтоновыми структурами.

2. СОПРЯЖЕННЫЕ КРИВОЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Теория *сопряженных криволинейных систем координат* была развита в XIX веке (см. книгу [14] и ссылки в работах [3]). Линейная система

$$\partial_i H_k = \beta_{ik} H_i, \quad i \neq k, \quad (7)$$

интегрируема, если

$$\partial_i \beta_{jk} = \beta_{ji} \beta_{ik}, \quad i \neq j \neq k \quad (8)$$

(т.е. если $\partial_j(\partial_i H_k) = \partial_i(\partial_j H_k)$, $i \neq j \neq k$). Функции β_{ik} называются *коэффициентами вращения сопряженных криволинейных систем координат*, функции H_i – *коэффициентами Ламе*.

Возьмем произвольное решение нелинейной системы уравнений в частных производных (8). Предположим, что общее решение H_i линейной системы уравнений в частных производных (7) (параметризованное N произвольными функциями одного аргумента) найдено. Возьмем два произвольных решения $H_{(1)i}$ и $H_{(2)i}$ (7); тогда можно построить интегрируемую систему гидродинамического типа [2], [3]

$$r_{t^2}^i = \frac{H_{(2)i}}{H_{(1)i}} r_{t^1}^i, \quad (9)$$

где инварианты Римана r^i являются неявными функциями “времен” t^1 и t^2 , которые обычно называются x и t , соответственно. Общее решение этой системы гидродинамического типа задается обобщенным методом годографа [3].

ТЕОРЕМА 1 [2]. *Алгебраическая система*

$$xH_{(1)i} + tH_{(2)i} = H_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (10)$$

задает общее решение (в неявной форме) системы гидродинамического типа (9).

Таким образом, общее решение системы нелинейных уравнений в частных производных (8) вместе с общим решением линейной системы уравнений в частных производных (7) описывает все возможные полугамильтоновы системы гидродинамического типа (9).

Произвольные решения $\psi_i^{(\beta)}$ *сопряженной* линейной системы уравнений в частных производных (7)

$$\partial_i \psi_k = \beta_{ki} \psi_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (11)$$

определяют законы сохранения, записанные в потенциальной форме:

$$dz^\beta = \sum_{\gamma} a_{\gamma}^{\beta}(\mathbf{r}) dt^{\gamma}, \quad (12)$$

для систем гидродинамического типа

$$r_{t^{\beta}}^i = \frac{H_{(\beta)i}}{H_{(\gamma)i}} r_{t^{\gamma}}^i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (13)$$

где

$$\partial_i a_{\gamma}^{\beta} = \psi_i^{(\beta)} H_{(\gamma)i}. \quad (14)$$

Это означает, например, что система гидродинамического типа (9) имеет бесконечный набор законов сохранения

$$\partial_{t^2} a_1^{\beta} = \partial_{t^1} a_2^{\beta},$$

параметризованный N произвольными функциями одного аргумента.

Рассмотрим систему гидродинамического типа (9) вместе с ее $N - 2$ нетривиальными коммутирующими потоками (см. (13)):

$$r_{t^m}^i = \frac{H_{(m)i}}{H_{(1)i}} r_{t^1}^i, \quad m = 2, 3, \dots, N. \quad (15)$$

Тогда обобщенный метод годографа (см. (10)) задает общее решение [11]

$$x H_{(1)i} + t H_{(2)i} + \sum_{k=3}^N t^k H_{(k)i} = H_i, \quad (16)$$

где N инвариантов Римана r^i являются функциями N независимых переменных t^k . Это обратимое преобразование $r^i(t^1, t^2, \dots, t^N)$.

В этой статье мы ограничимся рассмотрением систем гидродинамического типа (9) (см. также (13) и (15)) в симметричном случае

$$\beta_{ik} = \beta_{ki}, \quad i \neq k. \quad (17)$$

Соответствующие сопряженные криволинейные системы координат (8) были введены Дарбу в 1866 г. и изучены Егоровым в 1901 г. в его диссертации [15]. Именно Дарбу [14] предложил называть их (см. (8) и (17)) *егоровскими* криволинейными системами координат. С точки зрения интегрируемости значительный прогресс был достигнут Бианки в 1915 г. (см. книгу [16]). Он нашел преобразование Беклунда для этой задачи и свойство перестановки, так же как и формулу суперпозиции для нее в плоском случае, т.е. когда сопряженная криволинейная система координат становится ортогональной:

$$\partial_i \beta_{ik} + \partial_k \beta_{ki} + \sum_{m \neq i, k} \beta_{mi} \beta_{mk} = 0. \quad (18)$$

Егоровские криволинейные системы координат были подробно изучены именно в то время.

Если коэффициенты вращения β_{ik} симметричны, то линейные системы уравнений в частных производных (7) и (11) совпадают, и соответствующие законы сохранения (см. (12) и (14)) могут быть записаны в симметричной форме:

$$d\Omega_\beta = \sum_{\gamma} a_{\beta\gamma} dt^\gamma, \quad (19)$$

где

$$\partial_i a_{\beta\gamma} = H_{(\beta)i} H_{(\gamma)i}. \quad (20)$$

Это означает, что может быть введена функция Ω , заданная ее вторыми производными

$$a_{\beta\gamma} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^\beta \partial t^\gamma}, \quad \Omega_\beta = \frac{\partial \Omega}{\partial t^\beta}.$$

Тогда коммутирующие потоки (15) определены с помощью единственной функции Ω . Таким образом, система гидродинамического типа (9) имеет егоровскую пару законов сохранения (5) (см. (20)), где

$$\partial_i a_{11} = H_{(1)i}^2, \quad \partial_i a_{12} = H_{(2)i} H_{(1)i}, \quad \partial_i a_{22} = H_{(2)i}^2. \quad (21)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [4], [5]. Плотность закона сохранения a_{11} называется *потенциалом* егоровской метрики.

Возьмем N частных решений $H_{(\beta)i}$ линейной системы уравнений в частных производных (7). Если коэффициенты вращения β_{ik} симметричны (см. (17)), то егоровские системы гидродинамического типа (15) могут быть записаны все вместе в симметричной потенциальной форме (19).

В следующем разделе обобщенный метод годографа (см. (10), (16)) будет адаптирован для егоровских систем гидродинамического типа.

3. ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД ГОДОГРАФА

Введем N полевых переменных a_k таких, что $\partial_i a_k = H_{(k)i} H_{(1)i}$ (т.е. $a_k \equiv a_{k1}$, см. (19) и (20)).

Тогда алгебраическая система (16) для егоровских систем гидродинамического типа (15)

$$\partial_{t^k} a_n = \partial_{t^1} a_{kn}(\mathbf{a}) \quad (22)$$

может быть переписана в форме

$$\sum_{k=1}^N t^k \partial_i a_k = \partial_i h \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^N t^k da_k = dh, \quad (23)$$

где плотность закона сохранения $h(a_1, a_2, \dots, a_N)$ определена ее первыми производными $\partial_i h = H_i H_{(1)i}$ (см. (20)) и параметризована N произвольными функциями одного аргумента.

Таким образом, мы получаем обобщенный метод годографа, адаптированный для егоровских систем гидродинамического типа.

ТЕОРЕМА 2. *Общее решение егоровских систем гидродинамического типа (15) задается решением алгебраической системы в неявной форме*

$$t^k = \frac{\partial h(\mathbf{a})}{\partial a_k}. \quad (24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из (23).

СЛЕДСТВИЕ. Функция Ω может быть явно выражена через полевые переменные a_k и найдена в квадратурах за два шага (см. (19) и ниже):

$$d\Omega_k = a_{ks}(\mathbf{a}) d\frac{\partial h(\mathbf{a})}{\partial a_k}, \quad d\Omega = \Omega_k(\mathbf{a}) d\frac{\partial h(\mathbf{a})}{\partial a_k}. \quad (25)$$

Токи $p_k(\mathbf{a})$ закона сохранения (ср. с формулой (2))

$$\partial_{t^k} h(\mathbf{a}) = \partial_{t^1} p_k(\mathbf{a}) \quad (26)$$

могут быть найдены в квадратурах:

$$dp_k(\mathbf{a}) = \frac{\partial h(\mathbf{a})}{\partial a_n} da_{kn}(\mathbf{a}).$$

ЛЕММА 1. *Егоровские системы гидродинамического типа (22) обладают произвольным коммутирующим потоком (см. (3) и (6)):*

$$\partial_\tau a_1 = \partial_{t^1} h(\mathbf{a}), \quad \partial_\tau a_k = \partial_{t^1} p_k(\mathbf{a}), \quad k = 2, 3, \dots, N. \quad (27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО может быть получено из условия совместности $\partial_{t^k}(\partial_\tau a_1) = \partial_\tau(\partial_{t^k} a_1)$.

В следующем разделе мы введем понятие расширенного метода годографа для интегрируемости егоровских систем гидродинамического типа, основанного на симметричной формулировке.

4. РАСШИРЕННЫЙ МЕТОД ГОДОГРАФА

Любая двухкомпонентная система (1) интегрируема методом годографа (см., например, книгу [17]). Приспособим метод годографа для егоровских систем гидродинамического типа. Система гидродинамического типа (1) может быть записана в консервативной форме (5). Эта пара законов сохранения может быть переписана в потенциальной форме:

$$dy = a dx + b dt, \quad dz = b dx + c(a, b) dt.$$

Используя преобразование Лежандра $\Phi = ax + bt - y$, $\xi = bx + ct - z$, эту пару можно записать в виде

$$d\Phi = x da + t db, \quad d\xi = x db + t dc(a, b).$$

Так как $x_b = t_a$ (см. первое уравнение), то (см. второе уравнение) условие совместности $(\xi_a)_b = (\xi_b)_a$

$$(x + tc_b)_a = (tc_a)_b \quad (28)$$

может быть записано как *линейное* уравнение в частных производных второго порядка:

$$\Phi_{aa} + c_b \Phi_{ab} = c_a \Phi_{bb}. \quad (29)$$

Таким образом, метод годографа есть преобразование из полевых переменных (зависимых функций) $a(x, t)$ и $b(x, t)$ *квазилинейной* системы уравнений в частных производных (1) в новые полевые переменные (независимые координаты) $x(a, b)$ и $t(a, b)$ *линейной* системы уравнений в частных производных (28).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Так как (см. (24)) $x = h_a$ и $t = h_b$, то $\Phi \equiv h$ и $\xi \equiv p$. Таким образом, уравнение (29) совпадает с уравнением, описывающим плотности законов сохранения $h(a, b)$ системы гидродинамического типа $a_t = b_x$, $b_t = \partial_x c(a, b)$.

ПРИМЕР 1. Нелинейное уравнение упругости (см., например, работу [18]) определено функцией $c(a)$. Вышеприведенное линейное уравнение в частных производных сводится к гипергеометрическому уравнению, если $c(a) = a^n$, $c(a) = \ln a$, $c(a) = e^a$.

Рассмотрим пару трехкомпонентных егоровских систем гидродинамического типа

$$\begin{aligned} a_t &= b_x, & a_y &= c_x, \\ b_t &= \partial_x u(a, b, c), & b_y &= \partial_x v(a, b, c), \\ c_t &= \partial_x v(a, b, c), & c_y &= \partial_x w(a, b, c), \end{aligned} \quad (30)$$

которые могут быть переписаны в потенциальной симметричной форме (19):

$$d \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & u & v \\ c & v & w \end{pmatrix} d \begin{pmatrix} t^1 \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}, \quad (31)$$

где $y = t^3$.

Если функции $a(x, t, y)$, $b(x, t, y)$ и $c(x, t, y)$ – общие для обеих систем гидродинамического типа (30), то условие совместности $\partial_t(\partial_y a) = \partial_y(\partial_t a)$ удовлетворяется тождественно, и условие совместности $\partial_t(\partial_y b) = \partial_y(\partial_t b)$ тождественно совпадает с условием совместности $\partial_t(\partial_y c) = \partial_y(\partial_t c)$.

ЛЕММА 2. Если две системы гидродинамического типа (30) коммутируют, то связь между коэффициентами $u(a, b, c)$, $v(a, b, c)$ и $w(a, b, c)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \partial_b \frac{u_a v_b + v_a v_c - u_b v_a}{u_c} &= \partial_a \frac{v_a + v_b v_c}{u_c}, \\ \partial_b \frac{u_c v_b + v_c^2 - u_b v_c - u_a}{u_c} &= \partial_c \frac{v_a + v_b v_c}{u_c}, \\ \partial_a \frac{u_c v_b + v_c^2 - u_b v_c - u_a}{u_c} &= \partial_c \frac{u_a v_b + v_a v_c - u_b v_a}{u_c}, \end{aligned} \quad (32)$$

где

$$dw = \frac{(u_a v_b + v_a v_c - u_b v_a) da + (v_a + v_b v_c) db + (u_c v_b + v_c^2 - u_b v_c - u_a) dc}{u_c}. \quad (33)$$

Доказательство может быть получено из условий совместности $\partial_t(\partial_y b) = \partial_y(\partial_t b)$, $\partial_t(\partial_y c) = \partial_y(\partial_t c)$.

Под действием преобразования Лежандра $\Phi = at^1 + bt^2 + ct^3 - \xi_1$, $F = bt^1 + ut^2 + vt^3 - \xi_2$, $\Psi = ct^1 + vt^2 + wt^3 - \xi_3$ симметричная система (31) приводится к трем дифференциалам

$$d\Phi = t^1 da + t^2 db + t^3 dc, \quad dF = t^1 db + t^2 du + t^3 dv, \quad d\Psi = t^1 dc + t^2 dv + t^3 dw.$$

Так как (см. первое из этих уравнений) $t^1 = \Phi_a$, $t^2 = \Phi_b$, $t^3 = \Phi_c$, то (см. второе и третье уравнения) условия совместности $((F_a)_b = (F_b)_a)$, $(\Psi_a)_b = (\Psi_b)_a$ и т.д.)

$$\begin{aligned} (t^2 u_a + t^3 v_a)_b &= (t^1 + t^2 u_b + t^3 v_b)_a, \\ (t^2 u_c + t^3 v_c)_a &= (t^2 u_a + t^3 v_a)_c, \\ (t^2 u_c + t^3 v_c)_b &= (t^1 + t^2 u_b + t^3 v_b)_c \end{aligned}$$

могут быть записаны как *линейная* система уравнений в частных производных

$$\begin{aligned} u_a \Phi_{bb} + v_a \Phi_{bc} &= \Phi_{aa} + u_b \Phi_{ab} + v_b \Phi_{ac}, \\ u_a \Phi_{bc} + v_a \Phi_{cc} &= u_c \Phi_{ab} + v_c \Phi_{ac}, \\ u_c \Phi_{bb} + v_c \Phi_{bc} &= \Phi_{ac} + u_b \Phi_{bc} + v_b \Phi_{cc}. \end{aligned} \quad (34)$$

Таким образом, вышеприведенное преобразование из полевых переменных (зависимых функций) $a(x, t, y)$, $b(x, t, y)$ и $c(x, t, y)$ *квазилинейной* системы уравнений в частных производных (30) в новые полевые переменные (независимые координаты) $x(a, b, c)$, $t(a, b, c)$ и $y(a, b, c)$ *линейной* системы уравнений в частных производных (34) есть не что иное, как *расширенный метод годографа* для пары трехкомпонентных егоровских систем гидродинамического типа.

Условия совместности $(\Phi_{cc})_b = (\Phi_{bc})_c$, $(\Phi_{cc})_a = (\Phi_{ac})_c$, $(\Phi_{ac})_b = (\Phi_{bc})_a$ переопределенной системы уравнений в частных производных (34) эквивалентны (32).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Так как (см. (24)) $\Phi \equiv h$, то (см. (26)) $F \equiv p_2$ и $\Psi \equiv p_3$. Таким образом, система (34) совпадает с системой, описывающей плотности законов сохранения $h(a, b, c)$ обеих систем гидродинамического типа (30).

Очевидно, что эта конструкция легко может быть обобщена на N -компонентный случай.

5. ЕСТЕСТВЕННЫЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ КОММУТИРУЮЩИЕ ПОТОКИ. КРИТЕРИЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ

Без потери общности ограничимся рассмотрением первой нетривиальной егоровской системы гидродинамического типа (см. (30)), записанной в консервативной

форме:

$$a_t = b_x, \quad b_t = \partial_x u(a, b, c), \quad c_t = \partial_x v(a, b, c). \quad (35)$$

Если эта система полугамильтонова, то она должна обладать естественным коммутирующим потоком (ср. (30))

$$a_y = c_x, \quad b_y = \partial_x v(a, b, c), \quad c_y = \partial_x w(a, b, c). \quad (36)$$

В самом деле, так как система (35) полугамильтонова, то она имеет бесконечный набор законов сохранения

$$\partial_t h(a, b, c) = \partial_x p(a, b, c)$$

и коммутирующих потоков. Каждый из них может быть записан в форме (27) [5]:

$$a_\tau = \partial_x h(a, b, c), \quad b_\tau = \partial_x p(a, b, c), \quad c_\tau = \partial_x q(a, b, c), \quad (37)$$

где коммутирующий поток (36) имеет закон сохранения

$$\partial_y h(a, b, c) = \partial_x q(a, b, c).$$

Функция $h(a, b, c)$ удовлетворяет линейному уравнению в частных производных первого порядка с переменными коэффициентами. Таким образом, очень трудно найти функцию $h(a, b, c)$ в общем случае. Однако не менее трех частных решений $h(a, b, c)$ дано априори (см. (35)): $h_{(1)} = a$, $h_{(2)} = b$ и $h_{(3)} = c$. Первый выбор тривиален, второй следует из (35). Следовательно, мы можем попытаться восстановить дополнительный коммутирующий поток, где первый закон сохранения имеет вид

$$a_y = c_x.$$

Более того, условие совместности $\partial_y(\partial_t a) = \partial_t(\partial_y a)$ приводит к следующему закону сохранения:

$$b_y = \partial_x v(a, b, c),$$

и, окончательно, условие совместности $\partial_y(\partial_t b) = \partial_t(\partial_y b)$ приводит к критерию интегрируемости для трехкомпонентных егоровских систем гидродинамического типа (35).

Критерий интегрируемости. *Егоровская система гидродинамического типа (35) имеет коммутирующий поток (36), если и только если функция w может быть найдена в квадратурах (33).*

Условие совместности $\partial_y(\partial_t c) = \partial_t(\partial_y c)$ приводит к тому же самому результату. Таким образом, если условия совместности выполнены, то егоровская система гидродинамического типа (35) имеет дополнительный коммутирующий поток (36).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Принимая во внимание $a = \partial_{t^1} \xi_1$, $b = \partial_{t^1} \xi_2 = \partial_{t^2} \xi_1$, $c = \partial_{t^1} \xi_3 = \partial_{t^3} \xi_1$, $u = \partial_{t^2} \xi_2$, $v = \partial_{t^2} \xi_3 = \partial_{t^3} \xi_2$, $w = \partial_{t^3} \xi_3$ (см. (31)), можно ввести новую потенциальную функцию Ω так, что (см. (25))

$$d\Omega = \xi_1 dt^1 + \xi_2 dt^2 + \xi_3 dt^3.$$

Тогда пара систем гидродинамического типа (35), (36) может быть записана в форме

$$\Omega_{tt} = u(\Omega_{xx}, \Omega_{xt}, \Omega_{xy}), \quad \Omega_{yt} = v(\Omega_{xx}, \Omega_{xt}, \Omega_{xy}), \quad \Omega_{yy} = w(\Omega_{xx}, \Omega_{xt}, \Omega_{xy}).$$

Эти уравнения по отдельности могут быть рассмотрены как $2 + 1$ квазилинейные уравнения в частных производных. Однако в общем случае все они неинтегрируемы (см., например, работу [19]); в некоторых случаях может быть интегрируемо (методом гидродинамических редукций [19]) одно из них, тогда как два других будут являться редукциями коммутирующих потоков более высоких порядков на трехкомпонентный случай. Эти $2 + 1$ уравнения совместны, если выполнены равенства (32).

Очевидно, аналогичный критерий интегрируемости может быть выведен для N -компонентных систем гидродинамического типа, записанных в консервативной форме и содержащих законы сохранения (5).

Рассмотрим систему гидродинамического типа

$$\partial_t a_1 = \partial_x a_2, \quad \partial_t a_k = \partial_x b_k(\mathbf{a}), \quad k = 2, 3, \dots, N. \quad (38)$$

ТЕОРЕМА 3. Если система гидродинамического типа (38) полугамильтонова, то ее $N - 2$ нетривиальных коммутирующих потока могут быть найдены в квадратурах. В таком случае эти системы гидродинамического типа могут быть записаны в симметричной форме (22).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если система гидродинамического типа (38) полугамильтонова, то может быть введена симметричная $((N - 1) \times (N - 1))$ -матрица с элементами $a_{kn}(\mathbf{a})$, где $a_{k2}(\mathbf{a}) = b_k(\mathbf{a})$ и все остальные элементы еще не определены. Так как система (38) полугамильтонова, то a_1 – потенциал егоровской метрики (см. (9) и (21)), т.е. $\partial_i a_1 = H_{(1)i}^2$. Тогда (см. (9)) $\partial_i a_k = H_{(k)i} H_{(1)i}$ и $\partial_i b_k = H_{(k)i} H_{(2)i}$, и все остальные компоненты a_{kn} могут быть найдены в квадратурах (см. (20)):

$$da_{kn} = \sum H_{(k)m} H_{(n)m} dr^m = \sum \frac{\partial_m a_k \partial_m a_n}{\partial_m a_1} dr^m.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Коммутирующие потоки (15), записанные в консервативной форме (22), называются егоровским базисным набором.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Вышеприведенное доказательство может быть выполнено без использования инвариантов Римана r^k . Условия совместности $\partial_{t^k}(\partial_{t^n} a_m) = \partial_{t^n}(\partial_{t^k} a_m)$ приводят к полному набору соотношений между коэффициентами a_{kn} , которые довольно сложны в переменных a^k (см., например, случай (33)).

Основная причина рассмотрения локальных гамильтоновых структур для егоровских систем гидродинамического типа (35) следующая: общее решение (24) определяется общим решением (34) (в трехкомпонентных случаях), которое параметризовано тремя произвольными функциями одного аргумента. Однако в общем случае это линейное уравнение в частных производных имеет переменные коэффициенты.

Наличие гамильтоновой структуры приводит к редукции решения (34) к линейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, коэффициенты $h^{(k)}$ которых могут быть найдены последовательно (см. ниже).

6. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ КРИВОЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Локальные гамильтоновы структуры систем гидродинамического типа, интегрируемых обобщенным методом годографа, связаны с теорией *ортогональных криволинейных систем координат* [3], [14]. Условие нулевой кривизны (18) есть следствие связи двух линейных систем уравнений в частных производных (7) и (11):

$$H_i = \partial_i \psi_i + \sum_{m \neq i} \beta_{mi} \psi_m. \quad (39)$$

Существование этого преобразования первого порядка эквивалентно [3] существованию локальной гамильтоновой структуры для соответствующей системы гидродинамического типа (9):

$$a_t^i = \partial_x \left(\bar{g}^{ik} \frac{\delta \mathbf{h}}{\delta a^k} \right), \quad (40)$$

где гамильтониан $\mathbf{h} = \int h(\mathbf{a}) dx$, $\partial_i h = \psi_i^{(2)} H_{(1)i}$, плотность импульса $P = \bar{g}_{ik} a^i a^k / 2$, $\partial_i P = \psi_i^{(1)} H_{(1)i}$, и

$$H_{(2)i} = \partial_i \psi_i^{(2)} + \sum_{m \neq i} \beta_{mi} \psi_m^{(2)}, \quad H_{(1)i} = \partial_i \psi_i^{(1)} + \sum_{m \neq i} \beta_{mi} \psi_m^{(1)}.$$

Плоские координаты a^k определены их производными $\partial_i a^k = \bar{\psi}_i^{(k)} H_{(1)i}$, а *постоянная невырожденная метрика*

$$\bar{g}^{ik} = \sum \bar{\psi}_m^{(i)} \bar{\psi}_m^{(k)} \quad (41)$$

связана с решениями линейной системы в частных производных:

$$\partial_j \bar{\psi}_i^{(k)} = \beta_{ij} \bar{\psi}_j^{(k)}, \quad 0 = \partial_i \bar{\psi}_i^{(k)} + \sum_{m \neq i} \beta_{mi} \bar{\psi}_m^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (42)$$

Если коэффициенты вращения β_{ik} симметричны (см. (17)), тогда все вышеприведенные выражения упрощаются [2], [3]. Например, условие нулевой кривизны (18) сводится к $\delta \beta_{ik} = 0$, где $\delta = \sum (\partial / \partial r^m)$ – оператор сдвига. Это означает, что коэффициенты вращения β_{ik} зависят только от разностей инвариантов Римана $r^n - r^m$. Соответствующее линейное преобразование (39) приводится к $H_i = \delta \tilde{H}_i$ (где H_i и $\tilde{H}_i$ – решения линейной системы уравнений в частных производных (7)); линейная система уравнений в частных производных (42) приводится к $\delta \bar{H}_i^{(k)} = 0$. Это означает, что *базисные* коэффициенты Ламе $\bar{H}_i^{(k)}$ зависят только от разностей инвариантов Римана $r^n - r^m$. Так как линейные системы уравнений в частных производных (7)

и (11) совпадают, то мы можем ввести коэффициенты Ламе с нижними и верхними индексами

$$\overline{H}_i^{(k)} = \bar{g}^{ks} \overline{H}_{(s)i}, \quad \overline{H}_{(k)i} = \bar{g}_{ks} \overline{H}_i^{(s)},$$

где постоянная невырожденная метрика имеет вид (ср. (41))

$$\bar{g}^{ik} = \sum \overline{H}_m^{(i)} \overline{H}_m^{(k)}, \quad \bar{g}_{ik} = \sum \overline{H}_{(i)m} \overline{H}_{(k)m}.$$

Введем *присоединенные* плоские координаты $a_i = \bar{g}_{ik} a^k$. Тогда гамильтоновы системы гидродинамического типа (40) могут быть записаны в форме

$$\partial_t a_i = \partial_x \left(\bar{g}_{ik} \frac{\delta \mathbf{h}}{\delta a_k} \right). \quad (43)$$

В этой работе мы ограничиваемся рассмотрением двух случаев, где егоровская система гидродинамического типа записана в плоских координатах a^k (см. (40)). Первый случай определен условием, что потенциал егоровской метрики a (см. (5)) – плоская координата a_1 , b – плоская координата a_2 . В общем случае a – произвольная плотность закона сохранения h .

7. ЛОКАЛЬНЫЕ ГАМИЛЬТОНОВЫ СТРУКТУРЫ. ПОЛНАЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ

Без потери общности для простоты мы ограничимся рассмотрением трехкомпонентных егоровских систем гидродинамического типа (40). Так как симметричная постоянная матрица $\bar{g}^{ik}$ под действием линейного преобразования независимых переменных может быть приведена к диагональной или косодиагональной форме, мы ограничим рассмотрение первого случая (a и b – плоские координаты) этими двумя “подслучаями”.

1. Рассмотрим егоровскую систему гидродинамического типа (35) с локальной гамильтоновой структурой

$$a_t = \partial_x \frac{\partial h_1}{\partial c}, \quad b_t = \partial_x \frac{\partial h_1}{\partial b}, \quad c_t = \partial_x \frac{\partial h_1}{\partial a}, \quad (44)$$

где $\partial h_1 / \partial c = b$ (см. (5)). Тогда мы можем выбрать дополнительный коммутирующий поток (36), записанный в той же гамильтоновой форме:

$$a_y = \partial_x \frac{\partial h_2}{\partial c}, \quad b_y = \partial_x \frac{\partial h_2}{\partial b}, \quad c_y = \partial_x \frac{\partial h_2}{\partial a}, \quad (45)$$

где $\partial h_2 / \partial c = c$ (см. (30)).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Егоровский базисный набор коммутирующих потоков (22) называется *каноническим*, если первая плоская координата a_1 – потенциал егоровской метрики, а все остальные плоские координаты a_k – токи первого закона сохранения $\partial_{t^k} a_1 = \partial_{t^1} a_k$, где соответствующая локальная гамильтонова структура дана выражением (43).

Так как $\partial h_2/\partial b = \partial h_1/\partial a$, обе егоровские системы гидродинамического типа определены единственной функцией $z(a, b)$, удовлетворяющей хорошо известному *уравнению ассоциативности* (см. [8], [9], [20], [21])

$$z_{aaa} = z_{abb}^2 - z_{aab}z_{bbb}, \quad (46)$$

где $h_1 = bc + z_b$, $h_2 = c^2/2 + z_a$ и плотность импульса P есть $h_0 = ac + b^2/2$. Так как ток h потенциала a (см. (5)) – плотность закона сохранения для произвольного коммутирующего потока (см. (6)), то оператор сдвига $\partial/\partial c$ совместен с линейной системой уравнений в частных производных (34), описывающей плотности законов сохранения (т.е. $\partial \tilde{h}/\partial c = h$, где h и $\tilde{h}$ – решения линейной системы уравнений в частных производных (34)). Это легко понять, если принять во внимание, что первое уравнение произвольного коммутирующего потока записано в форме (ср. формулы (5) и (44))

$$a_\tau = \partial_x \frac{\partial \tilde{h}}{\partial c} = \partial_x h.$$

ТЕОРЕМА 4. *Егоровская система гидродинамического типа (44) имеет три бесконечные серии законов сохранения, коэффициенты которых $h_k^{(n)}$ ($k = 0, 1, 2$ и $n = 0, 1, 2, \dots$) могут быть найдены итеративно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Принимая во внимание выражения (37), два других уравнения произвольного коммутирующего потока записываются в форме

$$b_\tau = \partial_x \frac{\partial \tilde{h}}{\partial b} = \partial_x p, \quad c_\tau = \partial_x \frac{\partial \tilde{h}}{\partial a} = \partial_x q.$$

Таким образом (см. также (26)),

$$\begin{aligned} dh_n^{(k+1)} &= h_n^{(k)} dc + p_n^{(k)} db + q_n^{(k)} da, \\ dp_n^{(k+1)} &= p_n^{(k)} dc + (q_n^{(k)} + z_{bbb}p_n^{(k)} + z_{abb}h_n^{(k)}) db + (z_{abb}p_n^{(k)} + z_{aab}h_n^{(k)}) da, \\ dq_n^{(k+1)} &= q_n^{(k)} dc + (z_{abb}p_n^{(k)} + z_{aab}h_n^{(k)}) db + (z_{aab}p_n^{(k)} + z_{aaa}h_n^{(k)}) da, \end{aligned} \quad (47)$$

где $h_0^{(0)} = a$, $p_0^{(0)} = b$, $q_0^{(0)} = c$; $h_1^{(0)} = b$, $p_1^{(0)} = c + z_{bb}$, $q_1^{(0)} = z_{ab}$; $h_2^{(0)} = c$, $p_2^{(0)} = z_{ab}$, $q_2^{(0)} = z_{aa}$. Тогда три бесконечные серии частных решений, полученные обобщенным методом годографа (см. (24)), представляются в неявной форме (ср. (37)):

$$x = q(a, b, c), \quad t = p(a, b, c), \quad y = h(a, b, c), \quad (48)$$

где

$$h = \sum_{k=0}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{kn} h_k^{(n)}, \quad p = \sum_{k=0}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{kn} p_k^{(n)}, \quad q = \sum_{k=0}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{kn} q_k^{(n)}$$

и σ_{kn} – произвольные константы.

Полная интегрируемость. В общем N -компонентном случае егоровский базисный набор (22) – канонический (см. (40) и (43)):

$$\partial_{t^k} a_n = \partial_{t^1} \left(\frac{\partial h_k}{\partial a^n} \right) = \partial_{t^1} a_{kn}(\mathbf{a}). \quad (49)$$

Это означает, что

$$h_k = \frac{\partial F}{\partial a^k}.$$

Условия совместности $\partial_{t^k}(\partial_{t^m} a_n) = \partial_{t^m}(\partial_{t^k} a_n)$ приводят к уравнению Виттена–Дийкграафа–Верлинде–Верлинде (ВДВВ) (см. [8])

$$\frac{\partial^3 F}{\partial a^k \partial a^i \partial a^s} \bar{g}^{sp} \frac{\partial^3 F}{\partial a^p \partial a^j \partial a^n} = \frac{\partial^3 F}{\partial a^j \partial a^i \partial a^s} \bar{g}^{sp} \frac{\partial^3 F}{\partial a^p \partial a^k \partial a^n}.$$

Канонический егоровский базисный набор обязан иметь N бесконечных серий законов сохранения

$$\partial_{t^k} h_s^{(p)} = \partial_{t^1} q_{k,s}^{(p)}, \quad k, s = 1, 2, \dots, N, \quad p = 0, 1, 2, \dots, \quad (50)$$

и коммутирующих потоков [2]

$$\partial_{t_p^s} a_k = \partial_{t^1} \left(\frac{\partial h_s^{(p)}}{\partial a^k} \right), \quad k, s = 1, 2, \dots, N, \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (51)$$

Так как a_1 – потенциал егоровской метрики, то (см. (6))

$$\partial_{t_p^s} a_1 = \partial_{t^1} \left(\frac{\partial h_s^{(p)}}{\partial a^1} \right) = \partial_{t^1} h_s^{(p-1)}, \quad (52)$$

где $h_s^{(0)} \equiv a_s$ и $t_{(1)}^s \equiv t^s$, $s = 1, 2, \dots, N$. Таким образом, $\partial h_s^{(p)} / \partial a^1 = h_s^{(p-1)}$. Условия совместности $\partial_{t^k}(\partial_{t_p^s} a_1) = \partial_{t_p^s}(\partial_{t^k} a_1)$ приводят к (см. (50) и (51))

$$\partial_{t^k} h_s^{(p-1)} = \partial_{t^1} \frac{\partial h_s^{(p)}}{\partial a^k} = \partial_{t^1} q_{k,s}^{(p-1)}. \quad (53)$$

Следовательно, плотности законов сохранения $h_s^{(p+1)}$ могут быть найдены в квадратурах (см. (52) и (53)):

$$dh_s^{(p+1)} = q_{k,s}^{(p)} da^k, \quad s, k = 1, 2, \dots, N, \quad p = 0, 1, 2, \dots, \quad (54)$$

где $q_{1,s}^{(p)} \equiv h_s^{(p)}$. Совместность законов сохранения (51) с базисным набором (49) приводит к соотношениям

$$\frac{\partial^2 h_s^{(p)}}{\partial a^i \partial a^m} \bar{g}^{mn} \frac{\partial^3 F}{\partial a^n \partial a^k \partial a^j} = \frac{\partial^2 h_s^{(p)}}{\partial a^j \partial a^m} \bar{g}^{mn} \frac{\partial^3 F}{\partial a^n \partial a^k \partial a^i}. \quad (55)$$

Подставив $j = 1$, приходим к рекурсионным соотношениям (см. (52))

$$\frac{\partial^2 h_s^{(p+1)}}{\partial a^i \partial a^k} = \frac{\partial^3 F}{\partial a^i \partial a^k \partial a^m} \bar{g}^{mn} \frac{\partial h_s^{(p)}}{\partial a^n}, \quad p = 0, 1, 2, \dots,$$

найденным Дубровиным в работах [8], [9]. С учетом выражений (54) вышеприведенная формула приводит к итеративной процедуре (ср. (47))

$$dq_{k,s}^{(p+1)} = q_{n,s}^{(p)} \bar{g}^{nm} \frac{\partial^3 F}{\partial a^m \partial a^k \partial a^i} da^i, \quad i, k, s, m, n = 1, 2, \dots, N, \quad p = 0, 1, 2, \dots,$$

включая (54). Полная интегрируемость егоровских гамильтоновых систем гидродинамического типа (49) была доказана в работах [2]. Тогда общее решение может быть найдено в неявной форме обобщенным методом годографа (см. (24) и ср. (48)):

$$t^k = \bar{g}^{kn} \frac{\partial h}{\partial a^n}, \quad h = \sum_{s=0}^N \sum_{p=0}^{\infty} \sigma_{ps} h_s^{(p)},$$

где σ_{ps} – подходящие константы.

ПРИМЕР 2. Первый выбор $h_0^{(0)} = a$, $p_0^{(0)} = b$, $q_0^{(0)} = c$ определяет егоровскую систему гидродинамического типа

$$\begin{aligned} \partial_{\tau_0^{(0)}} a &= \partial_x \left(ac + \frac{b^2}{2} \right), & \partial_{\tau_0^{(0)}} b &= \partial_x (bc + bz_{bb} + az_{ab} - z_b), \\ \partial_{\tau_0^{(0)}} c &= \partial_x \left(\frac{c^2}{2} + bz_{ab} + az_{aa} - z_a \right). \end{aligned}$$

Таким образом, первые четыре закона сохранения для канонического егоровского базисного набора (44), (45) вместе с вышеприведенным коммутирующим потоком могут быть записаны в потенциальной симметричной форме

$$d \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \\ \xi^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & P \\ b & u & v & R \\ c & v & w & S \\ P & R & S & Q \end{pmatrix} d \begin{pmatrix} x \\ t \\ y \\ \tau \end{pmatrix}, \quad (56)$$

где все коэффициенты можно найти в квадратурах (см. (47)):

$$\begin{aligned} u &= c + z_{bb}, & v &= z_{ab}, & w &= z_{aa}, \\ R &= bc + bz_{bb} + az_{ab} - z_b, & S &= \frac{c^2}{2} + bz_{ab} + az_{aa} - z_a, \\ Q &= ac^2 + b^2c + a^2z_{aa} + 2abz_{ab} + b^2z_{bb} - 2(az_a + bz_b - z). \end{aligned} \quad (57)$$

2. Рассмотрим егоровскую систему гидродинамического типа (35) с локальной гамильтоновой структурой

$$a_t = \partial_x \frac{\partial h_1}{\partial a}, \quad b_t = \partial_x \frac{\partial h_1}{\partial c}, \quad c_t = \partial_x \frac{\partial h_1}{\partial b}, \quad (58)$$

где $\partial h_1 / \partial a = b$ (см. (5)). Тогда мы можем выбрать дополнительный коммутирующий поток (36), записанный в той же самой гамильтоновой форме:

$$a_y = \partial_x \frac{\partial h_2}{\partial a}, \quad b_y = \partial_x \frac{\partial h_2}{\partial c}, \quad c_y = \partial_x \frac{\partial h_2}{\partial b},$$

где $\partial h_2/\partial a = c$ (см. (30)). Так как $\partial h_2/\partial c = \partial h_1/\partial b$, обе егоровские системы гидродинамического типа определены одной и той же функцией $z(b, c)$, удовлетворяющей хорошо известному уравнению ассоциативности (см. [8], [9], [20], [22], [23]):

$$1 + z_{bbc}z_{bcc} = z_{bbb}z_{ccc},$$

где $h_1 = ab + z_c$, $h_2 = ac + z_b$ и плотность импульса P есть $h_0 = a^2/2 + bc$.

ТЕОРЕМА 5. Система гидродинамического типа (44) эквивалентна системе гидродинамического типа (58) относительно преобразования $x \leftrightarrow t$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заменим $x \leftrightarrow t$, $\partial h_1/\partial c \rightarrow \tilde{a}$, $\partial h_1/\partial b \rightarrow \tilde{c}$, $\partial h_1/\partial a \rightarrow \tilde{b}$; $c \rightarrow \partial \tilde{h}_1/\partial \tilde{a}$, $a \rightarrow \partial \tilde{h}_1/\partial \tilde{b}$, $b \rightarrow \partial \tilde{h}_1/\partial \tilde{c}$. Тогда (58) преобразуется в (44).

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Преобразование, связывающее вышеприведенные уравнения ассоциативности, было найдено в работах [22].

3. В общем случае егоровская система гидродинамического типа (40) имеет пару законов сохранения (5), где a и b не связаны с гамильтоновой структурой (40).

Рассмотрим коммутирующий поток (см. (40) и (43))

$$\partial_z a_i = \partial_x \frac{\partial \tilde{h}}{\partial a^i},$$

где дополнительный закон сохранения (см. (5)) имеет вид

$$\partial_z a = \partial_x a_1. \quad (59)$$

Под действием преобразования $x \leftrightarrow z$ [24] этот коммутирующий поток приводит егоровскую систему гидродинамического типа к виду

$$\partial_x c_i = \partial_z \frac{\partial \bar{h}}{\partial c^i}, \quad (60)$$

где $c_i = \partial \tilde{h}/\partial a^i$, $\bar{h} = a^k \partial \tilde{h}/\partial a^k - \tilde{h}$ и дополнительный закон сохранения (ср. (59)) имеет вид

$$\partial_x \frac{\partial \bar{h}}{\partial c^1} = \partial_z a,$$

где $a_1 = \partial \bar{h}/\partial c^1$. Таким образом, в этом случае потенциал егоровской метрики $\bar{a} \equiv c_1$. В то же время егоровская система гидродинамического типа (60) имеет коммутирующий поток

$$\partial_y c_i = \partial_z \frac{\partial h}{\partial c^i},$$

где дополнительный закон сохранения имеет вид

$$\partial_y c_1 = \partial_z c_2.$$

Таким образом, этот общий случай сводится к простейшему, рассмотренному выше.

8. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПО РЕШЕНИЮ

В предыдущем разделе было рассмотрено простейшее преобразование по решению

$$dy^k = \sigma_n^k dt^n, \quad \sigma_n^k = \text{const},$$

переводящее егоровскую систему гидродинамического типа снова в егоровскую систему гидродинамического типа. В этом разделе будет рассмотрено более общее преобразование по решению. Предположим, что уже известны (см., например, предыдущий раздел) все законы сохранения и коммутирующие потоки для егоровской системы гидродинамического типа (22). Обобщенное преобразование по решению [25] содержит M рядов и M столбцов, определенных M законами сохранения и $M - 1$ коммутирующими потоками. Числа M и N (см. (1)) в общем случае не связаны друг с другом. Егоровская система гидродинамического типа (22) может быть записана в потенциальной симметричной форме (19). Если $M \geq N$, то обобщенное симметричное преобразование по решению (ср. (19))

$$d\tilde{y}_i = a_{ik}(\mathbf{a}) dt^k$$

сохраняет потенциальную симметричную форму и снова преобразует (22) в егоровскую систему гидродинамического типа. Если $M < N$, то обобщенное преобразование по решению

$$d\tilde{y}_i = a_{ik}(\mathbf{a}) dt^k, \quad i = 1, 2, \dots, M; \quad d\tilde{y}_i = \sigma_{ik} dt^k, \quad i = M + 1, \dots, N,$$

должно содержать симметричную часть, включающую потенциал егоровской метрики a , в то время как все остальные независимые переменные преобразуются линейно (т.е. $\sigma_{ik} = \text{const}$).

Без потери общности ограничимся для простоты преобразованием по решению

$$dy^1 = a_k dt^k, \quad dy^k = dt^k, \quad k = 2, 3, \dots, N. \quad (61)$$

Тогда егоровская система гидродинамического типа (22) приводится к аналогичному набору егоровских систем гидродинамического типа

$$\partial_{y^k} \left(-\frac{1}{a_1} \right) = \partial_{y^1} \frac{a_k}{a_1}, \quad \partial_{y^k} \frac{a_n}{a_1} = \partial_{y^1} \left(a_{nk} - \frac{a_n a_k}{a_1} \right), \quad k, n = 2, 3, \dots, N.$$

Пересчет локальных гамильтоновых структур под действием преобразования по решению дан в работе [25]. Здесь мы ограничимся рассмотрением вышеприведенного трехкомпонентного случая (44).

ТЕОРЕМА 6. *Локальная гамильтонова структура (44) егоровской системы гидродинамического типа (35) инвариантна относительно преобразования по решению (61):*

$$dz = a dx + b dt, \quad dy = dt.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Егоровская система гидродинамического типа (35) имеет четыре локальных закона сохранения, связанных с локальной гамильтоновой структурой (44), где плотность импульса P – квадратичное выражение относительно плоских координат [5]:

$$P = ac + \frac{b^2}{2}. \quad (62)$$

Под действием преобразования по решению *любая* плотность закона сохранения h приводится к h/a_1 . Таким образом, выражение (62) приводится к

$$\tilde{P} = \tilde{a}\tilde{c} + \frac{\tilde{b}^2}{2},$$

где $\tilde{P} = -c/a$, $\tilde{a} = 1/a$, $\tilde{c} = -P/a$, $\tilde{b} = -b/a$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Плотность гамильтониана егоровской системы гидродинамического типа (44)

$$\tilde{a}_t = \partial_z \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{c}}, \quad \tilde{b}_t = \partial_z \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{b}}, \quad \tilde{c}_t = \partial_z \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{a}}$$

имеет вид $\tilde{h} = h/a$.

9. ТРИОРТОГОНАЛЬНЫЕ ЕГОРОВСКИЕ КРИВОЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

N -ортогональные егоровские криволинейные системы координат описываются системой уравнений Бианки–Дарбу–Егорова–Ламе (8)

$$\partial_i \beta_{jk} = \beta_{ji} \beta_{ik}, \quad i \neq j \neq k; \quad \beta_{ik} = \beta_{ki}, \quad i \neq k, \quad \delta \beta_{ik} = 0.$$

N -ортогональные криволинейные системы координат изучались во множестве работ (см., например, [3], [14], [16], [26] и ссылки в них). В этом разделе будет построена новая связь между бесконечным набором N -ортогональных егоровских криволинейных систем координат:

$$\dots \leftarrow \beta_{ik}^{(-2)} \leftarrow \beta_{ik}^{(-1)} \leftarrow \beta_{ik}^{(0)} \rightarrow \beta_{ik}^{(1)} \rightarrow \beta_{ik}^{(2)} \rightarrow \dots \quad (63)$$

Без потери общности мы ограничимся рассмотрением трехкомпонентного случая. Основное преимущество подхода, предложенного ниже – то, что все формулы выражаются только через *плоские* координаты (в отличие от инвариантов Римана). В таком случае соответствующие формулы могут быть легко использованы для вычисления решений уравнения ВДВВ.

Предположим, что даны все коэффициенты вращения $\beta_{ik}^{(0)}$ и коэффициенты Ламе $H_{(k)i}$. Это означает, что дана также пара егоровских систем гидродинамического типа (30). Локальная гамильтонова структура (40) может быть приведена (в трехкомпонентном случае) к виду (44) линейным преобразованием полевых переменных ($a^k \rightarrow \sigma_s^k a^s$, $\sigma_s^k = \text{const}$), потому что симметричная постоянная невырожденная метрика $\bar{g}^{ik}$ приводима к диагональной или косодиагональной форме.

1. Применим преобразование по решению (61)

$$\begin{aligned} dx^{(1)} &= a^{(0)} dx^{(0)} + b^{(0)} dt^{(0)} + c^{(0)} dy^{(0)} + \left(a^{(0)} c^{(0)} + \frac{(b^{(0)})^2}{2} \right) d\tau^{(0)}, \\ dt^{(1)} &= dt^{(0)}, \quad d\tau^{(1)} = dy^{(0)}, \quad dy^{(1)} = d\tau^{(0)} \end{aligned} \quad (64)$$

к егоровским системам гидродинамического типа (30) (см. также (44), (45)), записанным для простоты в потенциальной симметричной форме (56):

$$d \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ \tilde{t}^{(1)} \\ \tilde{y}^{(1)} \\ \tilde{\tau}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{(0)} & b^{(0)} & c^{(0)} & P^{(0)} \\ b^{(0)} & u^{(0)} & v^{(0)} & R^{(0)} \\ c^{(0)} & v^{(0)} & w^{(0)} & S^{(0)} \\ P^{(0)} & R^{(0)} & S^{(0)} & Q^{(0)} \end{pmatrix} d \begin{pmatrix} x^{(0)} \\ t^{(0)} \\ y^{(0)} \\ \tau^{(0)} \end{pmatrix},$$

где $z^{(0)}$ удовлетворяет уравнению ассоциативности (46). Системы гидродинамического типа (30) образуют канонический егоровский базисный набор (44), (45) (т.е. токи $b^{(0)}$, $c^{(0)}$ первого закона сохранения $\partial_{t^{(0)}} a^{(0)} = \partial_{x^{(0)}} b^{(0)}$, $\partial_{y^{(0)}} a^{(0)} = \partial_{x^{(0)}} c^{(0)}$ являются соответствующими плоскими координатами). Так как $a^{(1)} = 1/a^{(0)}$, $b^{(1)} = -b^{(0)}/a^{(0)}$, $c^{(1)} = -P^{(0)}/a^{(0)}$ – плоские координаты (и $a^{(1)}$ – потенциал преобразованной егоровской метрики), то преобразованный канонический егоровский базисный набор (22) может быть извлечен из вышеприведенной преобразованной потенциальной симметричной формы:

$$d \begin{pmatrix} x^{(0)} \\ -\tilde{t}^{(1)} \\ -\tilde{\tau}^{(1)} \\ -\tilde{y}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/a^{(0)} & -\frac{b^{(0)}}{a^{(0)}} & -\frac{P^{(0)}}{a^{(0)}} & -\frac{c^{(0)}}{a^{(0)}} \\ -\frac{b^{(0)}}{a^{(0)}} & \frac{(b^{(0)})^2}{a^{(0)}} - u^{(0)} & \frac{b^{(0)}P^{(0)}}{a^{(0)}} - R^{(0)} & \frac{b^{(0)}c^{(0)}}{a^{(0)}} - v^{(0)} \\ -\frac{P^{(0)}}{a^{(0)}} & \frac{b^{(0)}P^{(0)}}{a^{(0)}} - R^{(0)} & \frac{(P^{(0)})^2}{a^{(0)}} - Q^{(0)} & \frac{c^{(0)}P^{(0)}}{a^{(0)}} - S^{(0)} \\ -\frac{c^{(0)}}{a^{(0)}} & \frac{b^{(0)}c^{(0)}}{a^{(0)}} - v^{(0)} & \frac{c^{(0)}P^{(0)}}{a^{(0)}} - S^{(0)} & \frac{(c^{(0)})^2}{a^{(0)}} - w^{(0)} \end{pmatrix} d \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ t^{(1)} \\ \tau^{(1)} \\ y^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Преобразованный канонический егоровский базисный набор имеет следующий вид (см. (44), (45)):

$$\begin{aligned} \partial_{t^{(1)}} a^{(1)} &= \partial_{x^{(1)}} b^{(1)}, & \partial_{y^{(1)}} a^{(1)} &= \partial_{x^{(1)}} c^{(1)}, \\ \partial_{t^{(1)}} b^{(1)} &= \partial_{x^{(1)}} (c^{(1)} + z_{b^{(1)}b^{(1)}}^{(1)}), & \partial_{y^{(1)}} b^{(1)} &= \partial_{x^{(1)}} z_{a^{(1)}b^{(1)}}^{(1)}, \\ \partial_{t^{(1)}} c^{(1)} &= \partial_{x^{(1)}} z_{a^{(1)}b^{(1)}}^{(1)}, & \partial_{y^{(1)}} c^{(1)} &= \partial_{x^{(1)}} z_{a^{(1)}a^{(1)}}^{(1)}, \end{aligned} \quad (65)$$

где $z^{(1)}$ удовлетворяет уравнению ассоциативности (46). Сравнивая соответствующие токи из вышеприведенных уравнений

$$z_{a^{(1)}a^{(1)}}^{(1)} = \frac{(P^{(0)})^2}{a^{(0)}} - Q^{(0)}, \quad z_{a^{(1)}b^{(1)}}^{(1)} = \frac{b^{(0)}P^{(0)}}{a^{(0)}} - R^{(0)}, \quad c^{(1)} + z_{b^{(1)}b^{(1)}}^{(1)} = \frac{(b^{(0)})^2}{a^{(0)}} - u^{(0)},$$

можно вычислить новое решение $z^{(1)}$ уравнения ассоциативности (46) в квадратурах:

$$dz^{(1)} = z_{a^{(1)}}^{(1)} d\frac{1}{a^{(0)}} - z_{b^{(1)}}^{(1)} d\frac{b^{(0)}}{a^{(0)}},$$

где

$$\begin{aligned} dz_{a^{(1)}}^{(1)} &= \left(\frac{(P^{(0)})^2}{a^{(0)}} - Q^{(0)} \right) d \frac{1}{a^{(0)}} - \left(\frac{b^{(0)} P^{(0)}}{a^{(0)}} - R^{(0)} \right) d \frac{b^{(0)}}{a^{(0)}}, \\ dz_{b^{(1)}}^{(1)} &= \left(\frac{b^{(0)} P^{(0)}}{a^{(0)}} - R^{(0)} \right) d \frac{1}{a^{(0)}} - \left(\frac{(b^{(0)})^2}{a^{(0)}} - u^{(0)} + \frac{P^{(0)}}{a^{(0)}} \right) d \frac{b^{(0)}}{a^{(0)}}. \end{aligned}$$

Более того, подстановка (57) в вышеприведенные дифференциалы дает явную связь решений $z^{(0)}$ и $z^{(1)}$ уравнения ассоциативности (46):

$$z^{(1)} = \frac{(b^{(0)})^4}{8(a^{(0)})^3} - \frac{1}{(a^{(0)})^2} z^{(0)}. \quad (66)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Преобразование Рибокура. Преобразования локальных гамильтоновых структур под действием обобщенных преобразований по решению описаны в работе [25]. В простейшем случае (64) сравнение коэффициентов Ламе $\overline{H}_{(1)i}^{(0)}$ и преобразованных коэффициентов Ламе $\overline{H}_{(1)i}^{(1)}$ из (см. (20))

$$\partial_i a^{(0)} = (\overline{H}_{(1)i}^{(0)})^2, \quad \partial_i a^{(1)} \equiv \partial_i \frac{1}{a^{(0)}} = -\frac{1}{(a^{(0)})^2} (\overline{H}_{(1)i}^{(0)})^2 = (\overline{H}_{(1)i}^{(1)})^2$$

приводит к преобразованию Рибокура (подробности см. в работах [3]) триортогональных егоровских криволинейных систем координат:

$$\beta_{ik}^{(1)} = \beta_{ik}^{(0)} - \frac{\overline{H}_{(1)i}^{(0)} \overline{H}_{(1)k}^{(0)}}{a^{(0)}}, \quad \overline{H}_{(1)k}^{(1)} = i \frac{\overline{H}_{(1)k}^{(0)}}{a^{(0)}}.$$

Эти коэффициенты вращения $\beta_{ik}^{(0)}$ и $\beta_{ik}^{(1)}$ симметричны и удовлетворяют условию нулевой кривизны (18). Таким образом, егоровские триортогональные криволинейные системы координат в самом деле переходят сами в себя под действием преобразования Рибокура (см. [3] и [16]).

2. Перепишем канонический егоровский базисный набор (65) в форме

$$\begin{aligned} \partial_{t^{(1)}} z_{a^{(1)} a^{(1)}}^{(1)} &= \partial_{y^{(1)}} z_{a^{(1)} b^{(1)}}^{(1)}, & \partial_{x^{(1)}} z_{a^{(1)} a^{(1)}}^{(1)} &= \partial_{y^{(1)}} c^{(1)}, \\ \partial_{t^{(1)}} z_{a^{(1)} b^{(1)}}^{(1)} &= \partial_{y^{(1)}} (c^{(1)} + z_{b^{(1)} b^{(1)}}^{(1)}), & \partial_{x^{(1)}} z_{a^{(1)} b^{(1)}}^{(1)} &= \partial_{y^{(1)}} b^{(1)}, \\ \partial_{t^{(1)}} c^{(1)} &= \partial_{y^{(1)}} b^{(1)}, & \partial_{x^{(1)}} c^{(1)} &= \partial_{y^{(1)}} a^{(1)}. \end{aligned}$$

Таким образом, под действием линейного преобразования независимых переменных

$$x^{(2)} = y^{(1)}, \quad t^{(2)} = t^{(1)}, \quad y^{(2)} = x^{(1)} \quad (67)$$

вышеприведенный канонический егоровский базисный набор приводится к преобразованному каноническому егоровскому базисному набору:

$$\begin{aligned} \partial_{t^{(2)}} a^{(2)} &= \partial_{x^{(2)}} b^{(2)}, & \partial_{y^{(2)}} a^{(2)} &= \partial_{x^{(2)}} c^{(2)}, \\ \partial_{t^{(2)}} b^{(2)} &= \partial_{x^{(2)}} (c^{(2)} + z_{b^{(2)} b^{(2)}}^{(2)}), & \partial_{y^{(2)}} b^{(2)} &= \partial_{x^{(2)}} z_{a^{(2)} b^{(2)}}^{(2)}, \\ \partial_{t^{(2)}} c^{(2)} &= \partial_{x^{(2)}} z_{a^{(2)} b^{(2)}}^{(2)}, & \partial_{y^{(2)}} c^{(2)} &= \partial_{x^{(2)}} z_{a^{(2)} a^{(2)}}^{(2)}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} a^{(2)} &= z_{a^{(1)}a^{(1)}}^{(1)}, & b^{(2)} &= z_{a^{(1)}b^{(1)}}^{(1)}, & c^{(2)} &= c^{(1)}, \\ z_{b^{(2)}b^{(2)}}^{(2)} &= z_{b^{(1)}b^{(1)}}^{(1)}, & z_{a^{(2)}b^{(2)}}^{(2)} &= b^{(1)}, & z_{a^{(2)}a^{(2)}}^{(2)} &= a^{(1)}. \end{aligned}$$

Это означает что решение $z^{(2)}$ уравнения ассоциативности (46) может быть найдено в квадратурах:

$$dz^{(2)} = z_{a^{(2)}}^{(2)} dz_{a^{(1)}a^{(1)}}^{(1)} + z_{b^{(2)}}^{(2)} dz_{a^{(1)}b^{(1)}}^{(1)}, \quad (68)$$

где

$$z_{a^{(2)}}^{(2)} = a^{(1)} z_{a^{(1)}a^{(1)}}^{(1)} + b^{(1)} z_{a^{(1)}b^{(1)}}^{(1)} - z_{a^{(1)}}^{(1)}, \quad dz_{b^{(2)}}^{(2)} = z_{b^{(1)}b^{(1)}}^{(1)} dz_{a^{(1)}b^{(1)}}^{(1)} + b^{(1)} dz_{a^{(1)}a^{(1)}}^{(1)}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Вышеприведенный дифференциал (справа)

$$dG = z_{bb} dz_{ab} + b dz_{aa}$$

существует, если и только если функция z есть решение уравнения ассоциативности (46). Эта функция G является первым таким примером из бесконечного множества подобных выражений, которые не могут быть выражены через функцию z и ее производные конечного порядка. К ним приводит вычисление высших законов сохранения, например (см. (44), (45)),

$$\partial_y(bc + z_b) = \partial_x(cz_{ab} + G), \quad \partial_t\left(\frac{c^2}{2} + z_a\right) = \partial_x[z_{ab}(c + z_{bb}) + bz_{aa} - G].$$

Таким образом, итеративное размножение решений уравнения ассоциативности (46) основано только на двух шагах:

$$\dots \leftarrow z^{(-2)} \leftarrow z^{(-1)} \leftarrow z^{(0)} \rightarrow z^{(1)} \rightarrow z^{(2)} \rightarrow \dots. \quad (69)$$

Отрицательное направление означает преобразования (64) и (67), примененные в обратном порядке.

Мы пришли к основному утверждению этого раздела. Каждое решение уравнения ассоциативности (46) порождает канонический егоровский базисный набор и одновременно соответствующие базисные коэффициенты Ламе $\overline{H}_i^{(k)}$ и коэффициенты вращения β_{ik} . Это означает, что бесконечный набор решений $z^{(k)}$ (см. (66), (68) и (69)) порождает бесконечный набор ортогональных криволинейных систем координат (63). Таким образом, описание всех решений уравнения ассоциативности (46) эквивалентно описанию триортогональных криволинейных систем координат.

Этот ряд преобразований имеет такую же интерпретацию, как и “метод одевания” в теории солитонов.

Выбирая начальное решение $z^{(0)} = 0$ уравнения ассоциативности (46), получаем, что первая итерация дает решение

$$z^{(1)} = \frac{b^4}{8a}.$$

Вторая итерация дает то же самое решение. Третья итерация снова дает “нулевое” решение. Однако в общем случае эта цепочка итераций не обрывается.

В этой работе был подробно рассмотрен только трехкомпонентный случай, но без каких-либо ограничений этот подход может быть применен и к N -компонентному случаю.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Первое преобразование (66) – в точности “инверсия I ” – преобразование уравнения ВДВВ, найденное в работе [9] (см. формулы (В.13)), второе – в точности преобразование Лежандра уравнения ВДВВ, найденное там же (см. формулы (В.1) и (В.2)).

Благодарности. Автор благодарен Е. Ферапонтову, Дж. Гиббонсу, Ю. Кодаме и С. Цареву за их помощь и объяснения, а также рецензенту, внимательно прочитавшему работу, за замечания, благодаря которым удалось исправить ряд элементарных небрежностей. Автор также признателен институту математики в Тайбее (Тайвань), где была сделана некоторая часть работы, и особенно Жень-Щю Чана, Цы-Хао Ли, Мин-Шиен Тю и Дерчи Ву за плодотворные обсуждения. Работа была выполнена при частичной финансовой поддержке Российско-Итальянского гранта № 06-01-92053-КЭа.

Список литературы

- [1] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, *Докл. АН СССР*, **270** (1983), 781–785; *УМН*, **44**:6 (1989), 29–98.
- [2] С. П. Царев, *Докл. АН СССР*, **282** (1985), 534–537; *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54**:5 (1990), 1048–1068.
- [3] S. P. Tsarev, “On the integrability of the averaged KdV and Benney equations”, *Singular Limits and Dispersive Waves*, Proc. NATO Adv. Res. Workshop (Lyon, France, 1991), NATO ASI Ser., Ser. B, Phys., **320**, eds. N. M. Ercolani, I. R. Gabitov, C. D. Levermore, D. Serre, Plenum, New York, 1994, 143–155; “Classical differential geometry and integrability of systems of hydrodynamic type”, *Applications of analytic and geometrical methods to nonlinear differential equations*, Proc. NATO Adv. Res. Workshop (Exeter, UK, 1992), NATO ASI Ser., Ser. C, Math. Phys. Sci., **413**, ed. P. A. Clarkson, Kluwer, Dordrecht, 1993, 241–249; S. P. Tsarev, “Integrability of equations of hydrodynamic type from the end of the 19th to the end of the 20th century”, *Integrability: the Seiberg–Witten and Whitham equations*, eds. H. W. Braden, I. M. Krichever, Gordon and Breach, Amsterdam, 2000, 251–265.
- [4] М. В. Павлов, С. П. Царев, *УМН*, **46**:4 (1991), 169–170; М. В. Павлов, *Докл. РАН*, **338**:1 (1994), 33–34; **338**:2 (1994), 165–167; **338**:3 (1994), 317–319; **339**:2 (1994), 157–161; **339**:3 (1994), 311–313; *УМН*, **49**:1 (1994), 219–220.
- [5] М. В. Павлов, С. П. Царев, *Функц. анализ и его прилож.*, **37**:1 (2003), 38–54.
- [6] И. М. Кричевер, *Функц. анализ и его прилож.*, **31**:1 (1997), 32–50; А. А. Ахметшин, И. М. Кричевер, Ю. С. Волвовский, *УМН*, **54**:2 (1999), 167–168.
- [7] В. Е. Захаров, *Функц. анализ и его прилож.*, **14**:2 (1980), 15–24.
- [8] В. А. Dubrovin, *Nucl. Phys. B*, **379** (1992), 627–689; *Comm. Math. Phys.*, **145** (1992), 195–207.
- [9] В. А. Dubrovin, “Geometry of 2D topological field theories”, *Integrable systems and quantum groups* (Montecatini Terme, Italy, 1993), Lecture Notes in Math., **1620**, eds. M. Francaviglia, S. Greco, Springer, Berlin, 1996, 120–348.

- [10] J. Gibbons, *Physica D*, **3**:3 (1981), 503–511.
- [11] J. Gibbons, Y. Kodama, *Phys. Lett. A*, **135**:3 (1989), 167–170; Y. Kodama, *Phys. Lett. A*, **147** (1990), 477–482.
- [12] I. M. Krichever, “Whitham theory for integrable systems and topological quantum field theories”, *New symmetry principles in quantum field theory* (Cargese, France, 1991), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B Phys., **295**, eds. J. Frolich, G. ’t Hooft, A. Jaffe, G. Mack, P. K. Mitter, R. Stora, Plenum, New York, 1992, 309–327; *Comm. Pure Appl. Math.*, **47** (1994), 437–475; M. Mañas, E. Medina, L. M. Alonso, *J. Phys. A*, **39** (2006), 2349–2381; M. Mañas, L. M. Alonso, E. Medina, *J. Phys. A*, **33** (2000), 2871–2894; 7181–7206; Q. P. Liu, M. Manas, *J. Phys. A*, **32** (1999), 5921–5927.
- [13] V. E. Zakharov, *Physica D*, **3** (1981), 193–200.
- [14] G. Darboux, *Lecçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes*, Gautier-Villars, Paris, 1910.
- [15] Д. Ф. Егоров, *Работы по дифференциальной геометрии*, Наука, М., 1970.
- [16] L. Bianchi, *Sisteme tripli ortogonali*, Opere, vol. III, Cremonese, Roma, 1955.
- [17] Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко, *Системы квазилинейных уравнений и их приложения в газовой динамике*, Наука, М., 1978.
- [18] Y. Nutku, *J. Math. Phys.*, **28**:11 (1987), 2579–2585.
- [19] Е. В. Ферапонтов, К. Р. Хуснутдинова, М. В. Павлов, *ТМФ*, **144**:1 (2005), 35–43.
- [20] E. V. Ferapontov, *Geom. Dedicata*, **103** (2004), 33–49.
- [21] О. И. Мохов, Тр. МИ РАН, **225**, 1999, 284–300.
- [22] Е. В. Ферапонтов, О. И. Мохов, *Функц. анализ и его прилож.*, **30**:3 (1996), 62–72; E. V. Ferapontov, C. A. P. Galvao, O. I. Mokhov, Y. Nutku, *Comm. Math. Phys.*, **186** (1997), 649–669; O. I. Mokhov, “Differential equations of associativity in 2D topological field theories and geometry of nondiagonalizable systems of hydrodynamic type”, *Nonlinearity and integrability: from mathematics to physics*, Abstracts Int. Conf. on Integrable Systems (Montpellier, France, 1995), 1995; E. V. Ferapontov, O. I. Mokhov, “The equations of associativity as hydrodynamic type systems: Hamiltonian representation and the integrability”, *Nonlinear physics. Theory and experiment. Nature, structure and properties of nonlinear phenomena*, Proc. Int. Workshop (Lecce, Italy, 1995), eds. E. Alfinito, M. Boiti, L. Martina, F. Pempinelli, World Scientific, River Edge, N.Y., 1996, 104–115.
- [23] O. I. Mokhov, “Symplectic and Poisson geometry on loop spaces of manifolds and nonlinear equations”, *Topics in Topology and Mathematical Physics*, Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2, **170**, ed. S. P. Novikov, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, 121–151.
- [24] М. В. Павлов, *Матем. заметки*, **57**:5 (1995), 704–711; С. П. Царев, *Матем. заметки*, **46**:1 (1989), 105–111.
- [25] E. V. Ferapontov, M. V. Pavlov, *J. Math. Phys.*, **44**:3 (2003), 1150–1172.
- [26] Е. И. Ганжа, С. П. Царев, *УМН*, **51**:5 (1996), 197–198; В. Е. Захаров, *ТМФ*, **128**:1 (2001), 133–144; V. E. Zakharov, *Duke Math. J.*, **94**:1 (1998), 103–139; “Application of inverse scattering method to problem of differential geometry”, *The legacy of the inverse scattering transform in applied mathematics*, Proc. AMS-IMS-SIAM Join Summer Res. Conf. (South Hedley, MA, USA, 2001), *Contemp. Math.*, **301**, eds. J. Bona, R. Choudhury, D. Kaup, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, 15–34.