Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. М. Кашаев, Уравнение пятиугольника и группы классов отображений поверхностей с отмеченными точками, *ТМФ*, 2000, том 123, номер 2, 198–204

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf598>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 15:31:49

© 2000 г.

Р. М. Кашаев*

УРАВНЕНИЕ ПЯТИУГОЛЬНИКА И ГРУППЫ КЛАССОВ ОТОБРАЖЕНИЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ОТМЕЧЕННЫМИ ТОЧКАМИ

В квантовой теории Тейхмюллера, основанной на координатах Пеннера, реализуется проективное представление групп классов отображений поверхностей с отмеченными точками. Можно заметить, что алгебраически это представление основывается на уравнении пятиугольника и двух дополнительных соотношениях. Два примера решений этих уравнений связаны с матричными (или операторными) обобщениями дилוגарифма Роджера. Соответствующие центральные заряды рациональны. Возможно, что эта система уравнений допускает много различных решений.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть V – векторное пространство, а обратимые элементы $\mathbf{T} \in \text{End}(V \otimes V)$, $\mathbf{R} \in \text{End}(V)$ удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{13}\mathbf{T}_{23} = \mathbf{T}_{23}\mathbf{T}_{12}, \quad (1)$$

$$[\mathbf{R} \otimes 1\mathbf{T}1 \otimes \mathbf{R}, \mathbf{P}] = 0, \quad (2)$$

$$\mathbf{T}\mathbf{R} \otimes 1\mathbf{P}\mathbf{T} = \zeta \mathbf{R} \otimes \mathbf{R}, \quad (3)$$

$$\mathbf{R}^3 = 1, \quad (4)$$

где ζ – комплексное число на единичной окружности, $\mathbf{P} \in \text{End}(V \otimes V)$ – оператор перестановки, определяемый соотношением $\mathbf{P}x \otimes y = y \otimes x$, а $\mathbf{T}_{12}$ является ограничением элемента $\mathbf{T}$ на первый и третий сомножители тензорного произведения $V \otimes V \otimes V$ и т. д. Было показано [1, 2], что в квантовой теории пространств Тейхмюллера поверхностей с отмеченными точками эта система уравнений позволяет построить проективное представление группы классов отображений поверхностей с отмеченными точками. В этом случае проективный множитель является целой степенью числа ζ .

В квантовой конформной теории поля группы классов отображений имеют проективное представление в пространстве конформных блоков, при этом проективный множитель связан с центральным зарядом алгебры Вирасоро. В этом смысле центральный

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербургское отделение, Санкт-Петербург, Россия; Хельсинкский институт физики, Хельсинкский университет, Хельсинки, Финляндия. E-mail: Rinat.Kashaev@helsinki.fi

заряд алгебры Вирасоро (гипотетической) конформной теории поля, в которой соответствующее представление группы классов отображений задается системой уравнений (1)–(4), связан с числом ζ формулой

$$\exp(i\pi c) = \zeta^{-72}. \quad (5)$$

Цель данной работы состоит в описании некоторых решений системы (1)–(4).

2. ПОВЕРХНОСТЬ РОДА ТРИ С ОДНОЙ ОТМЕЧЕННОЙ ТОЧКОЙ

В этом разделе показано, как соотношения (1)–(4) приводят к проективному представлению группы классов отображений поверхности рода три с одной отмеченной точкой. Если род поверхности меньше трех, проективный множитель соответствующей группы классов отображений можно устранить переопределением генераторов. В случае рода три и выше определяющие соотношения для генераторов (которые являются твистами Дена вдоль неразделяющих кривых) включают сплетающие соотношения, фиксирующие относительную нормировку генераторов; “фонарное” соотношение, фиксирующее оставшуюся свободу в нормировке генераторов, и “цепное” соотношение, выявляющее проективный множитель. Случай поверхности рода три с одной отмеченной точкой был исследован в работе [2].

Рассмотрим кривые на поверхности, показанной на рисунке. Твисты Дена вдоль указанных кривых порождают группу классов отображений этой поверхности и задаются в тензорном произведении $V^{\otimes 10}$ (множители нумеруются числами $0, 1, \dots, 9$) следующими формулами:

$$\begin{aligned} F_{\alpha_i} &= \zeta^{-6} \text{Ad}(\mathbf{T}_{3i-1, 3i-2}) \mathbf{T}_{3i, 3i-2}^{-1}, \\ F_{\beta_i} &= \zeta^{-6} \text{Ad}(\mathbf{T}_{3i, 3i-2}) \mathbf{T}_{3i-1, 3i}^{-1}, \quad i = 1, 2, 3, \\ F_{\gamma_1} &= \zeta^{-6} \text{Ad}(\mathbf{T}_{0\tilde{7}} \mathbf{T}_{8\tilde{7}} \mathbf{T}_{10} \mathbf{T}_{1\tilde{9}} \mathbf{T}_{21} \mathbf{T}_{31} \mathbf{T}_{27} \mathbf{T}_{30}) \mathbf{T}_{0\tilde{7}}^{-1}, \\ F_{\gamma_2} &= \zeta^{-6} \text{Ad}(\mathbf{T}_{8\tilde{7}} \mathbf{T}_{8\tilde{0}} \mathbf{T}_{8\tilde{4}} \mathbf{T}_{8\tilde{9}} \mathbf{T}_{69} \mathbf{T}_{9\tilde{7}} \mathbf{T}_{54} \mathbf{T}_{7\tilde{8}}) \mathbf{T}_{8\tilde{4}}^{-1}, \\ F_{\mu} &= \zeta^{-6} \text{Ad}(\mathbf{T}_{0\tilde{7}} \mathbf{T}_{8\tilde{7}} \mathbf{T}_{10} \mathbf{T}_{1\tilde{9}} \mathbf{T}_{8\tilde{9}} \mathbf{T}_{21} \mathbf{T}_{49} \mathbf{T}_{69} \mathbf{T}_{54} \mathbf{T}_{5\tilde{8}} \mathbf{T}_{08} \mathbf{T}_{30} \mathbf{T}_{34} \mathbf{T}_{49} \mathbf{T}_{10}) \mathbf{T}_{1\tilde{9}}^{-1}, \\ F_{\alpha_3 \mu} &= \zeta^{-6} \text{Ad}(\mathbf{T}_{0\tilde{7}} \mathbf{T}_{8\tilde{7}} \mathbf{T}_{10} \mathbf{T}_{8\tilde{9}} \mathbf{T}_{18} \mathbf{T}_{21} \mathbf{T}_{49} \mathbf{T}_{69} \mathbf{T}_{30} \mathbf{T}_{9\tilde{7}} \mathbf{T}_{42} \mathbf{T}_{54} \mathbf{T}_{4\tilde{7}} \mathbf{T}_{10} \mathbf{T}_{50}) \mathbf{T}_{0\tilde{7}}^{-1}, \\ F_{\epsilon} &= \zeta^{-6} \text{Ad}(\mathbf{T}_{0\tilde{7}} \mathbf{T}_{8\tilde{7}} \mathbf{T}_{10} \mathbf{T}_{30} \mathbf{T}_{20} \mathbf{T}_{30} \mathbf{T}_{21} \mathbf{T}_{32} \mathbf{T}_{93} \mathbf{T}_{31} \mathbf{T}_{10}) \mathbf{T}_{0\tilde{7}}^{-1}, \end{aligned}$$

где

$$\text{Ad}(a)b \equiv aba^{-1}, \quad a_{\tilde{k}} \equiv \text{Ad}(\mathbf{R}_k)a_k, \quad a_{\tilde{k}} \equiv \text{Ad}(\mathbf{R}_k^{-1})a_k.$$

Относительная нормировка этих операторов фиксируется соотношениями вида

$$\mathbf{F}_{\alpha_1} \mathbf{F}_{\beta_1} \mathbf{F}_{\alpha_1} = \mathbf{F}_{\beta_1} \mathbf{F}_{\alpha_1} \mathbf{F}_{\beta_1}, \dots,$$

в то время как общая нормировка фиксируется фонарным соотношением

$$\mathbf{F}_{\alpha_3} \mathbf{F}_{\mu} \mathbf{F}_{\alpha_3 \mu} = \mathbf{F}_{\alpha_1} \mathbf{F}_{\alpha_2} \mathbf{F}_{\gamma_1} \mathbf{F}_{\gamma_2}.$$

Тем самым нормировка полностью определяется. Проверка цепного соотношения позволяет восстановить проективный множитель

$$(\mathbf{F}_{\alpha_1} \mathbf{F}_{\beta_1} \mathbf{F}_{\gamma_1})^4 = \xi_{\mathbf{F}} \mathbf{F}_{\epsilon} \mathbf{F}_{\alpha_3}, \quad \xi_{\mathbf{F}} = \zeta^{-72}. \quad (6)$$

3. ПРИМЕРЫ

ПРИМЕР 1. Рассмотрим некомпактный квантовый дилогарифм [3]

$$\psi(x) \equiv \exp\left(-\frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-2ixz) dz}{\operatorname{sh}(z\lambda) \operatorname{sh}\left(\frac{z}{\lambda}\right)}\right), \quad (7)$$

сингулярность при $z = 0$ смещена ниже контура интегрирования, а λ — действительный параметр. Эта функция является решением пары функциональных уравнений

$$\psi\left(x + \frac{i\lambda^{\pm 1}}{2}\right) = (1 + \exp(2\pi x \lambda^{\pm 1})) \psi\left(x - \frac{i\lambda^{\pm 1}}{2}\right)$$

и удовлетворяет “соотношению инверсии”

$$\psi(x)\psi(-x) = \exp\left(-i\pi x^2 - i\pi \frac{\lambda^2 + \lambda^{-2}}{12}\right).$$

Пусть векторное пространство $V = L^2(\mathbb{R})$ является пространством представления алгебры Гейзенберга самосопряженных операторов с соотношением коммутации

$$[\mathbf{p}, \mathbf{q}] = \frac{1}{2\pi i}.$$

Тогда функция (7) удовлетворяет также операторному пятичленному тождеству

$$\psi(\mathbf{q})\psi(\mathbf{p}) = \psi(\mathbf{p})\psi(\mathbf{p} + \mathbf{q})\psi(\mathbf{q}).$$

Используя эти соотношения, легко проверить, что решением системы уравнений (1)–(4) являются унитарные операторы

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &\equiv \exp(2\pi i \mathbf{p} \otimes \mathbf{q}) \psi(\mathbf{q} \otimes 1 + 1 \otimes (\mathbf{p} - \mathbf{q})), \\ \mathbf{R} &= \exp\left(2\pi i \mathbf{q}^2 - \frac{\pi i}{3}\right) \exp(\pi i \mathbf{p}^2) \exp(\pi i \mathbf{q}^2), \end{aligned}$$

при этом

$$\zeta = \exp\left(-\pi i \frac{(\lambda + \lambda^{-1})^2}{12}\right).$$

Заметим, что оператор $\mathbf{R}$ удовлетворяет уравнениям

$$\mathbf{R}\mathbf{q}\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{p} - \mathbf{q}, \quad \mathbf{R}\mathbf{p}\mathbf{R}^{-1} = -\mathbf{q}.$$

Этот пример взят из квантовой теории Тейхмюллера, он относится также к квантовой теории Лиувилля. В частности, центральный заряд теории Лиувилля $c_L = 1 + 6(\lambda + \lambda^{-1})^2$ связан с ζ формулой $\exp(i\pi c_L) = -\zeta^{-72}$ (подробности см. в [2]).

Специальный класс примеров можно построить с помощью *матричных обобщений дилогарифма Роджера*. Последние определяются следующим образом.

Пусть $I = (0, 1)$ – открытый единичный интервал на действительной прямой, а U – векторное пространство. Отображение $T: I \rightarrow \text{End}(U \otimes U)$ называется матричным (операторным) дилогарифмом, если оно удовлетворяет следующему уравнению пятиугольника:

$$T_{23}(x)T_{12}(y) = T_{12}\left(\frac{y - xy}{1 - xy}\right)T_{13}(xy)T_{23}\left(\frac{x - xy}{1 - xy}\right). \quad (8)$$

Мы рассмотрим решения этого уравнения, удовлетворяющие двум дополнительным соотношениям вида

$$[R \otimes 1T(x)1 \otimes R, P] = 0, \quad (9)$$

$$T(x)R \otimes 1PT(1 - x) = \zeta R \otimes R, \quad (10)$$

где P есть оператор перестановки в $U \otimes U$, а оператор $R \in \text{End}(U)$ таков, что

$$R^3 = 1. \quad (11)$$

Из решения системы уравнений (8)–(11) можно построить решение системы уравнений (1)–(4) следующим образом. Определим пространство $V \equiv \{f: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow U\}$, где $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, и отождествим $V^{\otimes n}$ с $\{f: \mathbb{R}_+^{2n} \rightarrow U^{\otimes n}\}$. Тогда операторы $\mathbf{T} \in \text{End}(V \otimes V)$ и $\mathbf{R} \in \text{End}(V)$, определяемые соотношением

$$\mathbf{T}f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = T\left(\frac{x_1y_2}{x_1y_2 + x_2}\right)f(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}, \mathbf{x} * \mathbf{y}), \quad \mathbf{R}f(\mathbf{x}) = Rf(\hat{\mathbf{x}}),$$

где для любых $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, $x_i, y_i \in \mathbb{R}_+$, функция $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U \otimes U$ и по определению

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} &:= (x_1y_1, x_1y_2 + x_2), \quad \mathbf{x} * \mathbf{y} := \left(\frac{y_1x_2}{x_1y_2 + x_2}, \frac{y_2}{x_1y_2 + x_2}\right), \\ \hat{\mathbf{x}} &:= \left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{1}{x_1}\right), \quad f(\mathbf{x}) \in U, \end{aligned}$$

удовлетворяют соотношениям (1)–(4).

ПРИМЕР 2. Пусть $U = L^2(\mathbb{R})$, а операторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ реализуют алгебру Гейзенберга самосопряженных операторов

$$[\mathbf{p}, \mathbf{q}] = \frac{1}{2\pi i}.$$

При $0 < x < 1$ и $y \in \mathbb{R}$ определим функцию

$$\phi_x(y) = \exp(-i\pi xy^2).$$

Она удовлетворяет тождеству пятиугольника

$$\phi_x(\mathbf{q})\phi_y(\mathbf{p}) = \phi_{(y-xy)/(1-xy)}(\mathbf{p})\phi_{xy}(\mathbf{p} + \mathbf{q})\phi_{(x-xy)/(1-xy)}(\mathbf{q}).$$

Тогда операторы

$$T(x) = \exp(2\pi i \mathbf{p} \otimes \mathbf{q}) \phi_x(\mathbf{q} \otimes 1 + 1 \otimes (\mathbf{p} - \mathbf{q}))$$

и

$$R = \exp\left(2\pi i \mathbf{q}^2 - \frac{\pi i}{3}\right) \exp(\pi i \mathbf{p}^2) \exp(\pi i \mathbf{q}^2)$$

удовлетворяют системе уравнений (8)–(11) при

$$\zeta = \exp\left(-\frac{\pi i}{6}\right).$$

Из уравнения (5) следует, что соответствующий центральный заряд есть четное целое число. Если исключить аналоги нефизических степеней свободы квантовой теории Тейхмюллера, то центральный заряд оказывается нечетным целым числом, что согласуется с интерпретацией в терминах свободной бозонной конформной теории поля. В действительности этот пример связан с бесконечномерным решением ограниченного соотношения звезда–треугольник Бажанова и Бакстера [4], которое возникает в трехмерной свободной бозонной модели на кубической решетке.

ПРИМЕР 3. Пусть $U = \mathbb{C}^N$ при некотором целом $N \geq 2$, и пусть целое число M является взаимно простым с N и таким, что $|M| \leq N - 1$ и $M + N = 1 \pmod{2}$. Определим

$$\theta := \exp\left(i\pi \frac{M}{N}\right).$$

Для любой матрицы E такой, что $E^N = -1$, и любого x из интервала $0 < x < 1$ компактный (или циклический) квантовый дилогарифм определяется следующим образом [5, 6]:

$$\Psi_x(E) := \prod_{j=1}^{N-1} ((1-x)^{1/N} - x^{1/N} E \theta^{-2j})^{j/N},$$

где числа $(1-x)^{1/N}$ и $x^{1/N}$ действительны и положительны, а ветвь корня N -й степени выбирается из условия $\Psi_0(E) = 1$. Эта функция удовлетворяет функциональному уравнению

$$\Psi_x(\theta^{-2} E) = ((1-x)^{1/N} - x^{1/N} E) \Psi_x(E),$$

тождеству пятиугольника

$$\Psi_x(F)\Psi_y(E) = \Psi_{(y-xy)/(1-xy)}(E)\Psi_{xy}(-EF)\Psi_{(x-xy)/(1-xy)}(F),$$

где

$$EF = \theta^2 FE, \quad E^N = F^N = -1,$$

и соотношению инверсии

$$\Psi_x(-\theta^{2k-1})\Psi_{1-x}(-\theta^{-2k-1}) = \theta^{-k^2} \exp(-i\pi A_{M,N}),$$

где

$$A_{M,N} = -A_{-M,N} = N^{-1} \sum_{k=1}^{N-1} k(\{\alpha_k\}_1 - \{[\alpha_k]_1\}_2), \quad \alpha_k \equiv (2k+1)\frac{M}{N}.$$

Здесь $[x]_y \in \mathbb{Z}$ и $0 \leq \{x\}_y < y$ — соответственно целая и дробная части числа $x \in \mathbb{R}$ относительно числа $\mathbb{R} \ni y > 0 : x = \{x\}_y + y[x]_y$. В частности,

$$A_{1-N,N} = \frac{1}{6}(N - N^{-1}), \quad A_{1,N} = -\frac{1}{12}(N + 2N^{-1}). \quad (12)$$

Введем матрицы $\theta^{2a}, \theta^{2b} \in \text{End}(U)$, удовлетворяющие соотношениям

$$\theta^2 \theta^{2a} \theta^{2b} = \theta^{2b} \theta^{2a}, \quad \theta^{2aN} = \theta^{2bN} = 1.$$

Тогда отображения

$$T(x) = \Psi_x(-\theta^{-2b} \theta^{2a} \otimes \theta^{2b}) \theta^{2b \otimes a}$$

и

$$R = \exp\left(i\frac{2\pi}{3}(2A_{M,N} + B_{M,N})\right) \theta^{2a^2} \theta^{b^2} \theta^{a^2},$$

где

$$B_{M,N} = -B_{-M,N} = N^{-1} \sum_{k=1}^{N-1} k(\{\beta_k\}_1 + \{[\beta_k]_1\}_2 - 1), \quad \beta_k \equiv 2k\frac{M}{N},$$

удовлетворяют уравнениям (8)–(11) при

$$\zeta = \exp\left(i\frac{\pi}{3}(B_{M,N} - A_{M,N})\right).$$

Из уравнения (5) вытекает следующая формула для центрального заряда:

$$c_{M,N} = 24(A_{M,N} - B_{M,N}) \pmod{2}. \quad (13)$$

В частности, принимая во внимание уравнение (12) и соотношение

$$B_{1-N,N} = B_{1,N} = \frac{(N-1)(N-2)}{6N},$$

получаем

$$c_{1-N,N} = c_{1,N} + 6N = 12(1 - N^{-1}) = -\frac{12}{N} \pmod{2}. \quad (14)$$

Этот результат согласуется с удвоенным центральным зарядом $SU(2)_{N-2}$ конформной теории поля Весса–Зумино–Виттена–Новикова:

$$2c_{SU(2)_{N-2}} = \frac{6(N-2)}{N} = -\frac{12}{N} \pmod{2}.$$

Данный факт, очевидно, отражает связь между циклическим квантовым дилогарифмом и неунитарным вариантом квантовой теории Тейхмюллера [1], которая, в свою очередь, предположительно связана с $SL(2, \mathbb{C})$ -теорией Черна–Саймонса (через комплексификацию $SL(2, \mathbb{R})$)¹⁾.

4. РЕЗЮМЕ

Система операторных соотношений (1)–(4), приводящая к проективным представлениям групп классов отображений поверхностей с отмеченными точками, возможно, допускает много различных решений. Два примера решений из трех, представленных в данной работе, соответствуют двум случаям квантового дилогарифма – компактному и некомпактному. В случае компактного q -дилогарифма проективный множитель отвечает рациональному центральному заряду алгебры Вирасоро, задаваемому уравнением (13). Интересно отметить, что частное значение (14) согласуется с удвоенным центральным зарядом $SU(2)_{N-2}$ -конформной теории поля Весса–Зумино–Виттена–Новикова.

Список литературы

- [1] *R. M. Kashaev*. Lett. Math. Phys. 1998. V. 43. № 2. P. 105–115; q-alg/9705021.
- [2] *R. M. Kashaev*. Liouville central charge in quantum Teichmüller theory. PDMI Preprint 24/1998. St-Petersburg: PDMI, 1998; hep-th/9811203.
- [3] *L. D. Faddeev*. Lett. Math. Phys. 1995. V. 34. P. 249–254; hep-th/9504111.
- [4] *V. V. Bazhanov, R. J. Baxter*. J. Stat. Phys. 1993. V. 71. P. 839–885.
- [5] *V. V. Bazhanov, N. Yu. Reshetikhin*. Remarks on the quantum dilogarithm. Preprint ANU/SMS/MRR-005-95. Canberra: Australia Nat. Univ., 1995; J. Phys. A. 1995. V. 28. № 8. P. 2217–2226.
- [6] *L. D. Faddeev, R. M. Kashaev*. Mod. Phys. Lett. A. 1994. V. 9. P. 427–434; hep-th/9310070.

¹⁾Точнее, следует исключить нефизические степени свободы, отвечающие связям в квантовой теории Тейхмюллера. Это легко сделать при нечетных N ; в результате центральный заряд, рассматриваемый по модулю 2, остается неизменным.