Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Славнов, Корреляционные функции XXZ -цепочки Гейзенберга при $\Delta = 1/2$, *ТМФ*, 2007, том 150, номер 2, 304–310

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf5980>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 17:27:09

© 2007 г.

Н. А. Славнов*

КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ XXZ -ЦЕПОЧКИ ГЕЙЗЕНБЕРГА ПРИ $\Delta = 1/2$

Приводятся точные результаты для корреляционных функций XXZ -цепочки Гейзенберга в термодинамическом пределе при значении параметра анизотропии $\Delta = 1/2$. Показано, что ответы выражаются через целые числа.

Ключевые слова: корреляционные функции, матрицы чередующихся знаков.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматривается XXZ -цепочка Гейзенберга спина $1/2$ [1] с периодическими граничными условиями. Гамильтониан этой модели задается формулой

$$H = \sum_{m=1}^M \{ \sigma_m^x \sigma_{m+1}^x + \sigma_m^y \sigma_{m+1}^y + \Delta (\sigma_m^z \sigma_{m+1}^z - 1) \}, \quad (1)$$

где Δ – параметр анизотропии, а $\sigma_m^{x,y,z}$ суть операторы локального спина, действующие в m -м узле цепочки.

В 2001 г. Разумов и Строганов [2] исследовали XXZ -цепочки нечетной длины $M = 2n + 1$, $n = 1, \dots, 8$, при значении параметра анизотропии $\Delta = 1/2$ и сделали ряд замечательных наблюдений¹⁾. Было показано, в частности, что при специальной нормировке амплитуды компонент основного состояния задаются целыми положительными числами. При этом отношение максимальной амплитуды к минимальной равно числу матриц чередующихся знаков порядка n :

$$\frac{a_{\max}}{a_{\min}} = \mathcal{A}_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(3k+1)!}{(n+k)!}. \quad (2)$$

Было замечено также, что числам $\mathcal{A}_n$ пропорциональна сумма амплитуд основного состояния и его норма.

¹⁾В обозначениях Разумова и Строганова гамильтониан (1) имеет общий знак минус, поэтому случай $\Delta = 1/2$ в этой статье соответствует случаю $\Delta = -1/2$ в работе [2].

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: nslavnov@mi.ras.ru

Таким образом, ХХZ-цепочка при $\Delta = 1/2$ оказывается тесно связанной с матрицами чередующихся знаков. На сегодняшний день известны многочисленные примеры, подтверждающие этот факт [3]. Однако исчерпывающего объяснения этой связи до сих пор не найдено.

В настоящей работе мы приводим некоторые точные результаты, касающиеся вычисления корреляционных функций в ХХZ-цепочке в термодинамическом пределе. Мы демонстрируем, что и в этом случае в окончательных ответах возникают числа $\mathcal{A}_n$, а также и другие целые числа, комбинаторная природа которых (если она существует) пока не ясна.

Для вычисления корреляционных функций мы используем их представления в виде кратных интегралов [4]. Следуя стратегии работ [5], мы исследуем оператор

$$Q_\kappa(m) = \prod_{n=1}^m \left(\frac{1+\kappa}{2} + \frac{1-\kappa}{2} \sigma_n^z \right), \quad (3)$$

где κ – комплексное число. Среднее значение этого оператора по основному состоянию является производящей функцией для коррелятора третьих компонент спина:

$$\langle \sigma_1^z \sigma_{m+1}^z \rangle = 2 \frac{\partial^2}{\partial \kappa^2} D_m^2 \langle Q_\kappa(m) \rangle \Big|_{\kappa=1} - 1, \quad (4)$$

где D_m^2 означает вторую производную на решетке. В пределе $\kappa \rightarrow 0$ среднее по основному состоянию оператора $Q_\kappa(m)$ дает так называемую вероятность образования пустоты, т.е. вероятность обнаружить ферромагнитную струну длины m в антиферромагнитном основном состоянии.

Для специального значения параметра анизотропии $\Delta = 1/2$ производящая функция $\langle Q_\kappa(m) \rangle$ допускает следующее представление в виде кратных интегралов типа Коши [4]:

$$\begin{aligned} \langle Q_\kappa(m) \rangle = & \frac{(-1)^{\frac{m^2-m}{2}} 3^{\frac{m^2+m}{2}}}{2^{m^2} m!} \sum_{n=0}^m \kappa^n C_m^n \oint_{\Gamma\{-\frac{i\pi}{6}\}} \frac{d^n z}{(2\pi i)^n} \oint_{\Gamma\{+\frac{i\pi}{6}\}} \frac{d^{m-n} z}{(2\pi i)^{m-n}} \times \\ & \times \det_m \frac{\text{sh} \frac{1}{2}(z_j - z_k)}{\text{sh} \frac{3}{2}(z_j - z_k)} \prod_{j=1}^n \frac{1}{\text{sh}^m(z_j + \frac{i\pi}{6})} \prod_{j=n+1}^m \frac{1}{\text{sh}^m(z_j - \frac{i\pi}{6})} \times \\ & \times \prod_{a=1}^n \prod_{b=n+1}^m \frac{\text{sh}(z_a - z_b - \frac{i\pi}{3}) \text{sh}(z_a - z_b + \frac{i\pi}{3})}{\text{sh}^2(z_a - z_b)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь контуры интегрирования $\Gamma\{\mp \frac{i\pi}{6}\}$ окружают точку $-\frac{i\pi}{6}$ для переменных $z_1, \dots, z_n$ и $+\frac{i\pi}{6}$ для переменных $z_{n+1}, \dots, z_m$. Разумеется, кратный интеграл (5) сводится к производным порядка $m-1$ по каждой переменной интегрирования. Однако аналитическое вычисление этой кратной производной встречает серьезные трудности. В следующем разделе мы явно вычислим эту производную для вероятности образования пустоты [6].

2. ВЕРОЯТНОСТЬ ОБРАЗОВАНИЯ ПУСТОТЫ

Как мы уже отмечали выше, вероятность образования пустоты является частным случаем производящей функции (5):

$$\mathcal{P}(m) = \langle Q_\kappa(m) \rangle \Big|_{\kappa=0}. \quad (6)$$

Полагая в формуле (5) $\kappa = 0$, мы получаем

$$\mathcal{P}(m) = \frac{(-1)^{\frac{m^2-m}{2}} 3^{\frac{m^2+m}{2}}}{2^{m^2} m!} \oint_{\Gamma\{+\frac{i\pi}{6}\}} \frac{d^m z}{(2\pi i)^m} \prod_{j=1}^m \frac{1}{\operatorname{sh}^m(z_j - \frac{i\pi}{6})} \cdot \det_m \frac{\operatorname{sh} \frac{1}{2}(z_j - z_k)}{\operatorname{sh} \frac{3}{2}(z_j - z_k)}. \quad (7)$$

Рассмотрим вспомогательную функцию $\mathcal{P}(m \mid \{\xi\})$, определенную следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(m \mid \{\xi\}) &= \frac{(-1)^{\frac{m^2-m}{2}} 3^{\frac{m^2+m}{2}}}{2^{m^2} m!} \oint_{\Gamma\{+\frac{i\pi}{6}\}} \frac{d^m z}{(2\pi i)^m} \prod_{a=1}^m \prod_{j=1}^m \frac{1}{\operatorname{sh}^m(z_j - \xi_a - \frac{i\pi}{6})} \times \\ &\times \det_m \frac{\operatorname{sh} \frac{1}{2}(z_j - z_k)}{\operatorname{sh} \frac{3}{2}(z_j - z_k)}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\xi_1, \dots, \xi_m$ суть попарно различные комплексные числа, а контуры интегрирования охватывают точки $\xi_j + \frac{i\pi}{6}$. В пределе $\xi_1, \dots, \xi_m \rightarrow 0$ мы воспроизводим вероятность образования пустоты $\mathcal{P}(m)$. Так как подынтегральное выражение в формуле (8) содержит только простые полюсы, интеграл может быть легко взят:

$$\mathcal{P}(m \mid \{\xi\}) = \frac{(-1)^{\frac{m^2-m}{2}} 3^{\frac{m^2+m}{2}}}{2^{m^2}} \prod_{\substack{a,b=1 \\ a \neq b}}^m \frac{1}{\operatorname{sh}(\xi_a - \xi_b)} \cdot \det_m \frac{\operatorname{sh} \frac{1}{2}(\xi_j - \xi_k)}{\operatorname{sh} \frac{3}{2}(\xi_j - \xi_k)}. \quad (9)$$

В силу аналитичности функции $\operatorname{sh} \frac{z}{2} / \operatorname{sh} \frac{3z}{2}$ в точке $z = 0$ предел $\xi_1, \dots, \xi_m \rightarrow 0$ в (9) хорошо определен и не зависит от того, как параметры ξ_a стремятся к своему предельному значению. Более того, имеем

$$\begin{aligned} \lim_{\xi_1, \dots, \xi_m \rightarrow 0} \prod_{\substack{a,b=1 \\ a \neq b}}^m \frac{1}{\operatorname{sh}(\xi_a - \xi_b)} \cdot \det_m \frac{\operatorname{sh} \frac{1}{2}(\xi_j - \xi_k)}{\operatorname{sh} \frac{3}{2}(\xi_j - \xi_k)} &= \\ = \lim_{\substack{\xi_1, \dots, \xi_m \rightarrow 0 \\ \xi'_1, \dots, \xi'_m \rightarrow 0}} \prod_{a>b}^m \frac{1}{\operatorname{sh}(\xi_a - \xi_b) \operatorname{sh}(\xi'_b - \xi'_a)} \cdot \det_m \frac{\operatorname{sh} \frac{1}{2}(\xi_j - \xi'_k)}{\operatorname{sh} \frac{3}{2}(\xi_j - \xi'_k)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь мы ввели еще один дополнительный набор комплексных параметров $\xi'_1, \dots, \xi'_m$.

Метод вычисления предела в правой части формулы (10) был предложен Купербергом в работе [7]. Для полноты изложения мы приводим ниже вывод соответствующей формулы. Пусть $\xi_j = \epsilon j$ и $\xi'_k = \epsilon(1 - k)$. Тогда мы имеем

$$\mathcal{P}(m) = \frac{(-1)^{\frac{m^2-m}{2}} 3^{\frac{m^2+m}{2}}}{2^{m^2}} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \prod_{j>k}^m \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \epsilon(j - k)} \cdot \det_m \frac{\operatorname{sh} \frac{\epsilon}{2}(j + k - 1)}{\operatorname{sh} \frac{3\epsilon}{2}(j + k - 1)}. \quad (11)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для произвольных комплексных α и β выполняется равенство

$$\det_N \left(\frac{\operatorname{sh} \alpha(j+k-1)}{\operatorname{sh} \beta(j+k-1)} \right) = 2^{N^2-N} \prod_{j>k}^N \operatorname{sh}^2 \beta(j-k) \cdot \prod_{j=1}^N \prod_{k=1}^N \frac{\operatorname{sh}(\beta(j-k) + \alpha)}{\operatorname{sh} \beta(j+k-1)}. \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО [7]. Рассмотрим левую часть соотношения (12) как функцию от α . Очевидно, мы можем написать

$$\det_N \left(\frac{\operatorname{sh} \alpha(j+k-1)}{\operatorname{sh} \beta(j+k-1)} \right) = e^{-\alpha N^2} P_{N^2}(e^{2\alpha}), \quad (13)$$

где $P_{N^2}(x)$ является полиномом от x степени N^2 . Найдём корни этого полинома. При $\alpha = \pm n\beta$, $n = 0, \dots, N-1$, матрица в левой части формулы (13) имеет ранг n . Соответственно, полином $P_{N^2}(e^{2\alpha})$ имеет в этих точках нули порядка $N-n$. Легко видеть, что общая степень этих нулей в точности равна N^2 . Таким образом, мы нашли полином $P_{N^2}(e^{2\alpha})$ с точностью до постоянного множителя $C(\beta)$:

$$\begin{aligned} \det_N \left(\frac{\operatorname{sh} \alpha(j+k-1)}{\operatorname{sh} \beta(j+k-1)} \right) &= C(\beta) \cdot e^{-\alpha N^2} \prod_{n=1-N}^{N-1} (e^{2\alpha} - e^{2n\beta})^{N-n} = \\ &= C(\beta) \cdot 2^{N^2} \prod_{j=1}^N \prod_{k=1}^N \operatorname{sh}(\beta(j-k) + \alpha). \end{aligned} \quad (14)$$

Для того чтобы определить множитель $C(\beta)$, достаточно перейти к пределу при $\alpha \rightarrow \infty$:

$$C(\beta) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} e^{-\alpha N^2} \det_N \left(\frac{\operatorname{sh} \alpha(j+k-1)}{\operatorname{sh} \beta(j+k-1)} \right) = 2^{-N} \det_N \frac{1}{\operatorname{sh} \beta(j+k-1)}. \quad (15)$$

Детерминант в правой части формулы (15) является частным случаем детерминанта Коши, следовательно,

$$C(\beta) = 2^{-N} \cdot \prod_{j>k}^N \operatorname{sh}^2 \beta(j-k) \cdot \prod_{j=1}^N \prod_{k=1}^N \frac{1}{\operatorname{sh} \beta(j+k-1)}. \quad (16)$$

Предложение доказано.

Используя равенство (12), мы немедленно получаем

$$\mathcal{P}(m) = \frac{(-1)^{\frac{m^2-m}{2}} 3^{\frac{m^2+m}{2}}}{2^m} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \prod_{j>k}^m \frac{\operatorname{sh}^2 \frac{3\epsilon}{2}(j-k)}{\operatorname{sh}^2 \epsilon(j-k)} \cdot \prod_{j=1}^m \prod_{k=1}^m \frac{\operatorname{sh} \frac{3\epsilon}{2}(j-k + \frac{1}{3})}{\operatorname{sh} \frac{3\epsilon}{2}(j+k-1)}. \quad (17)$$

Теперь переход к пределу $\epsilon \rightarrow 0$ становится тривиальным, и в конечном итоге мы получаем

$$\mathcal{P}(m) = \frac{1}{2^{m^2}} \mathcal{A}_m, \quad (18)$$

где целые числа $\mathcal{A}_m$ даются формулой (2). Таким образом, мы видим, что числа матриц чередующихся знаков возникают в теории модели ХХЗ-цепочки при $\Delta = 1/2$ не только для цепочек конечной длины, но и в термодинамическом пределе.

Формула (18) впервые была предсказана Разумовым и Строгановым в работе [2]. Представления для корреляторов в виде кратных интегралов позволяют строго доказать этот результат.

3. ДВУХТОЧЕЧНАЯ ФУНКЦИЯ

Мы показали, что для частного случая $\kappa = 0$ производящая функция $\langle Q_\kappa(m) \rangle$ может быть вычислена явно. К сожалению, метод, описанный в предыдущем разделе, не работает в случае общего κ . Разумеется, в формуле (5) можно ввести набор вспомогательных параметров $\xi_1, \dots, \xi_m$, как и в случае вычисления вероятности образования пустоты. Это позволяет взять интеграл, однако эффективный метод перехода к пределу $\xi_1, \dots, \xi_m \rightarrow 0$ на сегодняшний день не найден. Как следствие не удастся представить среднее $\langle Q_\kappa(m) \rangle$ как функцию m и κ при произвольном m . Однако если расстояние на решетке m не слишком велико, представление (5) может быть успешно использовано для явного вычисления $\langle Q_\kappa(m) \rangle$ с помощью компьютерной алгебры. В качестве примера мы приводим ниже список результатов для $P_m(\kappa) = 2^{m^2} \langle Q_\kappa(m) \rangle$ при $m = 1, \dots, 9$:

$$\begin{aligned}
 P_1(\kappa) &= 1 + \kappa, \\
 P_2(\kappa) &= 2 + 12\kappa + 2\kappa^2, \\
 P_3(\kappa) &= 7 + 249\kappa + 249\kappa^2 + 7\kappa^3, \\
 P_4(\kappa) &= 42 + 10004\kappa + 45444\kappa^2 + 10004\kappa^3 + 42\kappa^4, \\
 P_5(\kappa) &= 429 + 738174\kappa + 16038613\kappa^2 + 16038613\kappa^3 + 738174\kappa^4 + 429\kappa^5, \\
 P_6(\kappa) &= 7436 + 96289380\kappa + 11424474588\kappa^2 + 45677933928\kappa^3 + 11424474588\kappa^4 + \\
 &\quad + 96289380\kappa^5 + 7436\kappa^6, \\
 P_7(\kappa) &= 218348 + 21798199390\kappa + 15663567546585\kappa^2 + 265789610746333\kappa^3 + \\
 &\quad + 265789610746333\kappa^4 + 15663567546585\kappa^5 + 21798199390\kappa^6 + 218348\kappa^7, \\
 P_8(\kappa) &= 10850216 + 8485108350684\kappa + 39461894378292782\kappa^2 + \\
 &\quad + 3224112384882251896\kappa^3 + 11919578544950060460\kappa^4 + \\
 &\quad + 3224112384882251896\kappa^5 + 39461894378292782\kappa^6 + \\
 &\quad + 8485108350684\kappa^7 + 10850216\kappa^8, \\
 P_9(\kappa) &= 911835460 + 5649499685353257\kappa + 177662495637443158524\kappa^2 + \\
 &\quad + 77990624578576910368767\kappa^3 + 1130757526890914223990168\kappa^4 + \\
 &\quad + 1130757526890914223990168\kappa^5 + 77990624578576910368767\kappa^6 + \\
 &\quad + 177662495637443158524\kappa^7 + 5649499685353257\kappa^8 + 911835460\kappa^9.
 \end{aligned} \tag{19}$$

Замечательно, что все коэффициенты полученных полиномов оказываются целыми числами. Однако, в отличие от рассмотренного выше случая, комбинаторный смысл всех этих коэффициентов не известен. Можно лишь отметить несколько очевидных свойств полиномов $P_n(\kappa)$.

Во первых, в силу симметрии основного состояния относительно инверсии всех спинов, мы имеем $P_n(\kappa) = \kappa^n P_n(\kappa^{-1})$. Во-вторых, свободный член этих полиномов

равен числу матриц чередующихся знаков порядка n , что следует из результатов предыдущего раздела. В-третьих, $P_n(1) = 2^{n^2}$, так как при $\kappa = 1$ оператор $Q_\kappa(m)$ равен единичному оператору. Пользуясь этими свойствами, мы можем найти коэффициенты 12 в $P_2(\kappa)$ и 249 в $P_3(\kappa)$, не прибегая к вычислению интегралов:

$$\begin{aligned} 12 &= 2^4 - 2\mathcal{A}_2, \\ 249 &= 2^8 - \mathcal{A}_3. \end{aligned} \quad (20)$$

К сожалению, нам не удалось найти аналогичных простых формул для коэффициентов старших полиномов.

Используя результаты (19), мы можем вычислить корреляционную функцию $\langle \sigma_1^z \sigma_{m+1}^z \rangle$ вплоть до $m = 8$:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_1^z \sigma_2^z \rangle &= -2^{-1}, \\ \langle \sigma_1^z \sigma_3^z \rangle &= 7 \cdot 2^{-6}, \\ \langle \sigma_1^z \sigma_4^z \rangle &= -401 \cdot 2^{-12}, \\ \langle \sigma_1^z \sigma_5^z \rangle &= 184453 \cdot 2^{-22}, \\ \langle \sigma_1^z \sigma_6^z \rangle &= -95214949 \cdot 2^{-31}, \\ \langle \sigma_1^z \sigma_7^z \rangle &= 1758750082939 \cdot 2^{-46}, \\ \langle \sigma_1^z \sigma_8^z \rangle &= -30283610739677093 \cdot 2^{-60}, \\ \langle \sigma_1^z \sigma_9^z \rangle &= 5020218849740515343761 \cdot 2^{-78}. \end{aligned} \quad (21)$$

Для $m = 2, 3$ мы воспроизводим результаты работ [8], в которых были вычислены корреляционные функции ХХZ-цепочки вплоть до расстояния на решетке $m = 3$ и для произвольного Δ .

Можно также сравнить точные результаты (21) с асимптотической формулой, предложенной в работе [9],

$$\langle \sigma_1^z \sigma_{m+1}^z \rangle \approx -\frac{3}{2\pi^2 m^2} + (-1)^m \frac{C}{m^{3/2}}, \quad (22)$$

где

$$C = \frac{8}{\pi^{7/2}} \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left(\frac{1}{\text{ch}^2 t} - e^{-6t} \right) \right\} \approx 0.4285370106. \quad (23)$$

Значения $\langle \sigma_1^z \sigma_{m+1}^z \rangle$

m	Точные ответы	Асимптотические ответы
1	-0.5000000000	-0.5805187860
2	0.1093750000	0.1135152692
3	-0.0979003906	-0.0993588501
4	0.0439770222	0.0440682654
5	-0.0443379157	-0.0444087865
6	0.0249933420	0.0249365346
7	-0.0262668452	-0.0262404925
8	0.0166105110	0.0165641239

Точные результаты и ответы, полученные прямой подстановкой $m = 1, \dots, 8$ в формулу (22), приведены в таблице.

Разумеется, при столь малых расстояниях трудно ожидать хорошего согласия точных ответов с асимптотическими. Тем не менее, мы видим, что корреляционная функция $\langle \sigma_1^z \sigma_{m+1}^z \rangle$ выходит на асимптотический режим очень быстро, и уже для $m = 4$ относительная погрешность не превышает 1%. По-видимому, это объясняется тем, что при $\Delta = 1/2$ поправки к лидирующему члену асимптотического разложения оказываются малыми.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы показали, что ответы для корреляционных функций модели XXZ -цепочки в термодинамическом пределе при значении параметра анизотропии $\Delta = 1/2$ выражаются через целые числа. По аналогии со случаем цепочек конечной длины мы могли бы ожидать, что эти целые числа каким-то образом связаны с проблемой перечисления матриц чередующихся знаков и, следовательно, имеют комбинаторное происхождение. Обнаружение этой комбинаторики, на наш взгляд, является наиболее интересной задачей в этом направлении.

Благодарности. Настоящая работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 05-01-00498), INTAS (грант № 03-51-3350), Программы поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-672.2006.1) и программы РАН “Математические методы в нелинейной динамике”.

Список литературы

- [1] W. Heisenberg, *Z. Phys.*, **49** (1928), 619.
- [2] A. V. Razumov, Yu. G. Stroganov, *J. Phys. A*, **34** (2001), 3185; [cond-mat/0012141](#).
- [3] A. V. Razumov, Yu. G. Stroganov, *J. Phys. A*, **34** (2001), 5335; [cond-mat/0102247](#); *J. Stat. Mech.*, **07** (2006), P07004; [math-ph/0605004](#); M. T. Batchelor, J. de Gier, B. Nienhuis, *J. Phys. A*, **34** (2001), L265; [cond-mat/0101385](#); Di Francesco, P. Zinn-Justin, *Electron. J. Combin.*, **12:1** (2005), R6; [math-ph/0410061](#).
- [4] N. Kitanine, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, V. Terras, *J. Stat. Mech.*, **09** (2005), L09002; [hep-th/0506114](#).
- [5] A. G. Izergin, V. E. Korepin, *Comm. Math. Phys.*, **99** (1985), 271; N. Kitanine, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, V. Terras, *Nucl. Phys. B*, **641** (2002), 487; [hep-th/0201045](#).
- [6] N. Kitanine, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, V. Terras, *J. Phys. A*, **35** (2002), L385; [hep-th/0201134](#).
- [7] G. Kuperberg, *Int. Math. Res. Not.*, **3** (1996), 139; [math.CO/9712207](#).
- [8] G. Kato, M. Shiroishi, M. Takahashi, K. Sakai, *J. Phys. A*, **36** (2003), L337; [cond-mat/0304475](#); **37** (2004), 5097; [cond-mat/0402625](#).
- [9] S. Lukyanov, *Phys. Rev. B*, **59** (1999), 11163; [cond-mat/9809254](#).