Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Спиридонов, Эллиптические гипергеометрические функции и модели типа Калоджеро–Сазерленда, *ТМФ*, 2007, том 150, номер 2, 311–324

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf5981>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 14:12:02

© 2007 г.

В. П. Спиридонов*

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И МОДЕЛИ ТИПА КАЛОДЖЕРО–САЗЕРЛЕНДА

Рассматриваются эллиптический аналог гипергеометрической функции Гаусса и два его многомерных обобщения. Описана их связь с эллиптическими бета-интегралами, исключительной группой Вейля E_7 , эллиптическим гипергеометрическим уравнением и моделями типа Калоджеро–Сазерленда.

Ключевые слова: вполне интегрируемые системы, модели Калоджеро–Сазерленда, гипергеометрические функции, эллиптические функции.

Гипергеометрическая функция Гаусса является одной из ключевых специальных функций математической физики и математики в целом. Обычно она определяется либо в виде бесконечного ряда, либо интегральным представлением Эйлера [1]:

$$F(a, b; c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} x^n = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-b)\Gamma(b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-xt)^{-a} dt, \quad (1)$$

где $(a)_n = a(a+1)\dots(a+n-1)$ – символ Похгаммера, а $\Gamma(x)$ – гамма-функция Эйлера. Каждое из этих представлений имеет свою область применимости, которые мы не указываем для краткости. Эта функция обладает многими свойствами, характерными для классических функций: она удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка с полиномиальными коэффициентами, из нее строится хорошо известная система ортогональных полиномов Якоби, через нее выражается ряд явных цепных дробей и т.д.

Существует много функций гипергеометрического типа, обобщающих функцию Гаусса ${}_2F_1$. Вероятно, наиболее известной из них является совершенно уравновешенный сбалансированный q -гипергеометрический ряд ${}_8\varphi_7$, связанный с полиномами Аски–Вильсона [1], [2]. Достаточно неожиданно недавно в ряде задач математической физики появились эллиптические гипергеометрические функции, представляющие собой специфическую двухпараметрическую (p, q) -деформацию гипергеометрических рядов и интегралов. Мы не будем описывать здесь основные положения

*Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия.
E-mail: spiridon@theor.jinr.ru

теории этих функций, отсылая читателей к обзорам [2] (гл. 11) и [3]. Нам потребуются следующие обозначения:

$$(z; p)_\infty = \prod_{j=0}^{\infty} (1 - zp^j), \quad (z; p, q)_\infty = \prod_{j,k=0}^{\infty} (1 - zp^j q^k), \quad |p|, |q| < 1,$$

для бесконечных произведений;

$$\theta(z; p) = (z; p)_\infty (pz^{-1}; p)_\infty = \frac{1}{(p; p)_\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k p^{k(k-1)/2} z^k,$$

$$\theta(pz; p) = \theta(z^{-1}; p) = -z^{-1} \theta(z; p), \quad \theta(a_1, \dots, a_k; p) := \theta(a_1; p) \dots \theta(a_k; p)$$

для эллиптической тета-функции;

$$\Gamma(z; p, q) = \frac{(pqz^{-1}; p, q)_\infty}{(z; p, q)_\infty},$$

$$\Gamma(a_1, \dots, a_k; p, q) := \Gamma(a_1; p, q) \dots \Gamma(a_k; p, q)$$

для стандартной эллиптической гамма-функции с $|p|, |q| < 1$;

$$q = e^{2\pi i \omega_1 / \omega_2}, \quad p = e^{2\pi i \omega_3 / \omega_2}, \quad r = e^{2\pi i \omega_3 / \omega_1},$$

$$\tilde{q} = e^{-2\pi i \omega_2 / \omega_1}, \quad \tilde{p} = e^{-2\pi i \omega_2 / \omega_3}, \quad \tilde{r} = e^{-2\pi i \omega_1 / \omega_3}$$

для параметризации базисных переменных и их модулярных партнеров с помощью трех квазипериодов $\omega_{1,2,3} \in \mathbb{C}$;

$$G(u; \omega) = \Gamma(e^{2\pi i u / \omega_2}; p, q) \Gamma(re^{-2\pi i u / \omega_1}; \tilde{q}, r) = e^{-\pi i P(u)} \Gamma(e^{-2\pi i u / \omega_3}; \tilde{r}, \tilde{p})$$

для модифицированной эллиптической гамма-функции, где $|p| < 1$, $|r| < 1$ и полином третьей степени $P(u)$ имеет вид

$$P\left(u + \sum_{m=1}^3 \frac{\omega_m}{2}\right) = \frac{u(u^2 - (1/4) \sum_{m=1}^3 \omega_m^2)}{3\omega_1 \omega_2 \omega_3}.$$

Функции $G(u; \omega)$ и $\Gamma(e^{2\pi i u / \omega_2}; p, q)$ являются различными решениями одного и того же линейного разностного уравнения первого порядка

$$f(u + \omega_1) = \theta(e^{2\pi i u / \omega_2}; p) f(u) \quad (2)$$

с нормировкой $f(\sum_{m=1}^3 \omega_m / 2) = 1$. Однако функция $G(u; \omega)$ в отличие от $\Gamma(z; p, q)$ остается хорошо определенной мероморфной функцией и при $|q| = 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Возьмем восемь параметров $t_1, \dots, t_8 \in \mathbb{C}^*$ и две базисные переменные $p, q \in \mathbb{C}$, удовлетворяющие ограничениям

$$\prod_{j=1}^8 t_j = p^2 q^2, \quad |p|, |q| < 1.$$

При $|t_j| < 1$, $j = 1, \dots, 8$, эллиптический аналог гипергеометрической функции Гаусса $F(a, b; c; x)$ определяется интегральным представлением

$$V(t_1, \dots, t_8; p, q) = \kappa \int_{\mathbb{T}} \frac{\prod_{j=1}^8 \Gamma(t_j z^{\pm}; p, q)}{\Gamma(z^{\pm 2}; p, q)} \frac{dz}{z}, \quad (3)$$

где

$$\kappa = \frac{(p; p)_{\infty} (q; q)_{\infty}}{4\pi i},$$

$\mathbb{T}$ обозначает положительно ориентированную единичную окружность и

$$\Gamma(tz^{\pm}; p, q) := \Gamma(tz; p, q)\Gamma(tz^{-1}; p, q), \quad \Gamma(z^{\pm 2}; p, q) := \Gamma(z^2; p, q)\Gamma(z^{-2}; p, q).$$

При других допустимых значениях параметров V -функция определяется аналитическим продолжением выражения (3).

Первым нетривиальным свойством этой функции является ее редукция к эллиптическому бета-интегралу [4] при наложении условия $t_j t_k = pq$ для произвольно выбранной пары параметров t_j и t_k . При этом благодаря уравнению отражения для функции $\Gamma(z; p, q)$

$$\Gamma(a; p, q)\Gamma(b; p, q) = 1, \quad ab = pq,$$

параметры t_j и t_k полностью выпадают. Например, при $t_7 t_8 = pq$ имеем

$$V(\underline{t}; p, q)|_{t_7 t_8 = pq} = \kappa \int_{\mathbb{T}} \frac{\prod_{j=1}^6 \Gamma(t_j z^{\pm}; p, q)}{\Gamma(z^{\pm 2}; p, q)} \frac{dz}{z} = \prod_{1 \leq j < k \leq 6} \Gamma(t_j t_k; p, q), \quad (4)$$

где $\prod_{j=1}^6 t_j = pq$. Заменяем $\mathbb{T}$ на контур C , который отделяет последовательности полюсов, сходящихся к нулю по точкам $z = t_j q^k p^m$, $k, m \in \mathbb{N}$, от их партнеров $z \rightarrow 1/z$, уходящих на бесконечность. Это позволяет снять ограничения $|t_j| < 1$ без изменения правой части (4). Аналогичным образом аналитически продолжается в область $|t_j| \geq 1$ и V -функция. При этом легко проверяется, что V -функция является мероморфной по всем параметрам для произвольных $t_j \in \mathbb{C}^*$, — достаточно вычислить вычеты подынтегральной функции и определить аналитически продолженную функцию как сумму интеграла по фиксированному контуру и вычетов, возникших при пересечении контура полюсами (см., например, [5]).

Рассмотрим теперь симметрии V -функции. Благодаря свойству $\Gamma(z; p, q) = \Gamma(z; q, p)$ V -функция инвариантна относительно перестановки переменных p и q . Очевидно также, что она инвариантна относительно группы S_8 перестановок параметров t_j . Однако из-за наличия линейного ограничения $\prod_{j=1}^8 t_j = p^2 q^2$ реально мы имеем A_7 -группу Вейля. Существует дополнительное нетривиальное преобразование симметрии, расширяющее A_7 до исключительной группы E_7 . Действительно, рассмотрим двойной интеграл

$$\kappa \int_{C^2} \frac{\prod_{j=1}^4 \Gamma(a_j z^{\pm}, b_j w^{\pm}; p, q) \Gamma(c z^{\pm} w^{\pm}; p, q)}{\Gamma(z^{\pm 2}, w^{\pm 2}; p, q)} \frac{dz}{z} \frac{dw}{w},$$

где $a_j, b_j, c \in \mathbb{C}^*$ и $c^2 \prod_{j=1}^4 a_j = c^2 \prod_{j=1}^4 b_j = pq$, а C обозначает контур такой, что только полюсы $z = a_j q^k p^l$, $cw^\pm q^k p^l$, $w \in C$, и $w = b_j q^k p^l$, $cz^\pm q^k p^l$, $z \in C$, $j = 1, \dots, 4$, сходящиеся к нулю при $k, l \in \mathbb{N}$, одновременно находятся внутри C (например, можно выбрать $C = \mathbb{T}$ при $|a_j|, |b_j|, |c| < 1$). Используя формулу (4) для того, чтобы снять одно из интегрирований – либо по z , либо по w (перестановка порядка интегрирования разрешена, поскольку подынтегральная функция ограничена на контуре интегрирования), получаем следующую формулу преобразования:

$$\begin{aligned} & \prod_{1 \leq j < k \leq 4} \Gamma(a_j a_k; p, q) \int_C \frac{\prod_{j=1}^4 \Gamma(ca_j w^\pm, b_j w^\pm; p, q)}{\Gamma(w^{\pm 2}; p, q)} \frac{dw}{w} = \\ & = \prod_{1 \leq j < k \leq 4} \Gamma(b_j b_k; p, q) \int_C \frac{\prod_{j=1}^4 \Gamma(a_j z^\pm, cb_j z^\pm; p, q)}{\Gamma(z^{\pm 2}; p, q)} \frac{dz}{z}. \end{aligned}$$

В компактных обозначениях $V(\underline{t}) = V(t; p, q)$ это соотношение для интегралов принимает вид

$$V(\underline{t}) = \prod_{1 \leq j < k \leq 4} \Gamma(t_j t_k, t_{j+4} t_{k+4}; p, q) V(\underline{s}), \quad (5)$$

где

$$\begin{cases} s_j = \varepsilon^{-1} t_j, & j = 1, 2, 3, 4, \\ s_j = \varepsilon t_j, & j = 5, 6, 7, 8, \end{cases} \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{t_1 t_2 t_3 t_4}{pq}} = \sqrt{\frac{pq}{t_5 t_6 t_7 t_8}}$$

(при выборе контура $C = \mathbb{T}$ должны выполняться ограничения $|t_j|, |s_j| < 1$). Это фундаментально важное соотношение получено автором в работе [6], где впервые и появилась эллиптическая гипергеометрическая функция $V(\underline{t})$. Оно является эллиптическим аналогом (более того, его интегральным обобщением) преобразования Бэйли для четырех необрывающихся рядов $_{10}\varphi_9$ [2].

Повторим преобразование (5) еще раз с параметрами $s_{3,4,5,6}$, играющими роль $t_{1,2,3,4}$, и переставим параметры t_3, t_4 и t_5, t_6 в конечном ответе. Это приводит к соотношению

$$V(\underline{t}) = \prod_{j,k=1}^4 \Gamma(t_j t_{k+4}; p, q) V\left(\frac{T^{1/2}}{t_1}, \dots, \frac{T^{1/2}}{t_4}, \frac{U^{1/2}}{t_5}, \dots, \frac{U^{1/2}}{t_8}\right), \quad (6)$$

где $T = t_1 t_2 t_3 t_4$ и $U = t_5 t_6 t_7 t_8$ (при выборе контура $C = \mathbb{T}$ должны выполняться ограничения $|T|^{1/2} < |t_j| < 1$, $|U|^{1/2} < |t_{j+4}| < 1$, $j = 1, 2, 3, 4$).

Теперь мы, приравнявая правые части соотношений (5) и (6), выразим параметры t_j через s_j и получим третье соотношение:

$$V(\underline{s}) = \prod_{1 \leq j < k \leq 8} \Gamma(s_j s_k; p, q) V\left(\frac{\sqrt{pq}}{s_1}, \dots, \frac{\sqrt{pq}}{s_8}\right) \quad (7)$$

(при выборе контура $C = \mathbb{T}$ должны выполняться ограничения $|pq|^{1/2} < |s_j| < 1$ для всех j).

Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^8$ со скалярным произведением $\langle x, y \rangle$ и ортонормированным базисом $e_i \in \mathbb{R}^8$, $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. Корневая система A_7 состоит

из векторов $v = \{e_i - e_j, i \neq j\}$, а ее группа Вейля – из отражений $x \rightarrow S_v(x) = x - 2v\langle v, x \rangle / \langle v, v \rangle$, действующих в гиперплоскости, ортогональной вектору $\sum_{i=1}^8 e_i$ (т.е. координаты векторов $x = \sum_{i=1}^8 x_i e_i$ удовлетворяют соотношению $\sum_{i=1}^8 x_i = 0$), и совпадает с группой перестановок S_8 .

Свяжем параметры функции $V(\underline{t})$ с координатами x_j соотношениями $t_j = e^{2\pi i x_j} (pq)^{1/4}$. При этом условие балансировки подразумевает, что $\sum_{i=1}^8 x_i = 0$. Теперь нетрудно увидеть, что преобразование координат в соотношении (5) соответствует отражению $S_v(x)$ по отношению к вектору $v = (\sum_{i=5}^8 e_i - \sum_{i=1}^4 e_i)/2$, имеющему каноническую длину $\langle v, v \rangle = 2$. Это отражение расширяет группу A_7 до исключительной группы Вейля E_7 , и функция

$$V_{\text{inv}}(t_1, \dots, t_8; p, q) := \frac{V(t_1, \dots, t_8; p, q)}{\prod_{1 \leq k < l \leq 8} \sqrt{\Gamma(t_k t_l; p, q)}}$$

инвариантна относительно этой группы преобразований: $S_v(V_{\text{inv}}) = V_{\text{inv}}$, $v \in E_7$. Соотношения (6) и (7) независимо были доказаны довольно сложным образом в работе [7], где и было указано, что эти преобразования принадлежат группе E_7 . Однако, как показано выше [3], они являются простыми следствиями повторного применения соотношения (5) и не требуют отдельного доказательства.

Фундаментальная теорема сложения для эллиптических тета-функций может быть записана следующим образом:

$$\theta(xw^\pm, yz^\pm; p) - \theta(xz^\pm, yw^\pm; p) = \frac{y}{w} \theta(xy^\pm, wz^\pm; p), \quad (8)$$

где $\theta(xw^\pm; p) = \theta(xw; p)\theta(xw^{-1}; p)$ и $w, x, y, z \in \mathbb{C}^*$ – произвольные комплексные переменные. Если обозначить $y = t_6$, $w = t_7$ и $x = q^{-1}t_8$, то это тождество эквивалентно q -разностному уравнению

$$\begin{aligned} \Delta(z, t_1, \dots, t_5, qt_6, t_7, q^{-1}t_8) - \frac{\theta(t_6 t_7^\pm; p)}{\theta(q^{-1}t_8 t_7^\pm; p)} \Delta(z, \underline{t}) = \\ = \frac{t_6}{t_7} \frac{\theta(q^{-1}t_8 t_6^\pm; p)}{\theta(q^{-1}t_8 t_7^\pm; p)} \Delta(z, t_1, \dots, t_6, qt_7, q^{-1}t_8), \end{aligned} \quad (9)$$

где $\Delta(z, \underline{t}) = \prod_{k=1}^8 \Gamma(t_k z^\pm; p, q) / \Gamma(z^{\pm 2}; p, q)$ обозначает подынтегральное ядро V -функции. Интегрируя уравнение (9) по z вдоль контура C с подходящими свойствами, получаем соотношение

$$t_7 \theta\left(\frac{t_8 t_7^\pm}{q}; p\right) V(qt_6, q^{-1}t_8) - (t_6 \leftrightarrow t_7) = t_7 \theta(t_6 t_7^\pm; p) V(\underline{t}),$$

которое использовалось в первом доказательстве эллиптического бета-интеграла [4]. Здесь $V(qt_j, q^{-1}t_k)$ обозначает эллиптические гипергеометрические функции, смежные с $V(\underline{t})$ в том смысле, что параметры t_j и t_k заменены на qt_j и $q^{-1}t_k$, соответственно, а $(t_6 \leftrightarrow t_7)$ обозначает перестановку параметров в предыдущем выражении. Подставим теперь преобразование симметрии (7) в это уравнение и получим вторую

формулу сложения для смежных функций:

$$t_6 \theta\left(\frac{t_7}{qt_8}; p\right) \prod_{k=1}^5 \theta\left(\frac{t_6 t_k}{q}; p\right) V(q^{-1} t_6, qt_8) - (t_6 \leftrightarrow t_7) = t_6 \theta\left(\frac{t_7}{t_6}; p\right) \prod_{k=1}^5 \theta\left(\frac{t_8}{t_k}; p\right) V(\underline{t}).$$

Подходящая комбинация этих двух равенств приводит к уравнению

$$\mathcal{A}(\underline{t})(U(qt_6, q^{-1}t_7) - U(\underline{t})) + (t_6 \leftrightarrow t_7) + U(\underline{t}) = 0,$$

где использованы обозначения

$$\begin{aligned} U(\underline{t}) &= \frac{V(\underline{t})}{\Gamma(t_6 t_8^\pm, t_7 t_8^\pm; p, q)}, \\ \mathcal{A}(\underline{t}) &= \frac{\theta(t_6/(qt_8), t_6 t_8, t_8/t_6; p)}{\theta(t_6/t_7, t_7/qt_6, t_6 t_7/q; p)} \prod_{k=1}^5 \frac{\theta(t_7 t_k/q; p)}{\theta(t_8 t_k; p)} = \\ &= \frac{\theta(qt_0/t_6, t_0 t_6, t_0/t_6; p)}{\theta(t_6/t_7, qt_6/t_7, q/(t_6 t_7); p)} \prod_{k=1}^5 \frac{\theta(q/(t_7 t_k); p)}{\theta(t_0 t_k; p)} \end{aligned}$$

и $t_0 = t_8/p^2$. Подставив $t_j = e^{2\pi i g_j/\omega_2}$, легко проверить, что потенциал $\mathcal{A}(\underline{t})$ является модулярно-инвариантной эллиптической функцией переменных $g_1, \dots, g_7$, т.е. он не меняется при заменах $g_j \rightarrow g_j + \omega_{2,3}$ и $(\omega_2, \omega_3) \rightarrow (-\omega_3, \omega_2)$.

Если обозначить $t_6 = cx$, $t_7 = c/x$ и заменить $U(\underline{t})$ на неизвестную функцию $f(x)$, то мы получим q -разностное уравнение второго порядка, которое называется *эллиптическим гипергеометрическим уравнением*:

$$A(x)(f(qx) - f(x)) + A(x^{-1})(f(q^{-1}x) - f(x)) + \nu f(x) = 0, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{\theta(cx/t_8, cx/(qt_8), p^4 ct_8 x; p)}{\theta(x^2, qx^2; p)} \prod_{k=1}^5 \theta\left(\frac{qx}{ct_k}; p\right), \\ \nu &= \theta\left(\frac{p^4 c^2}{q}; p\right) \prod_{k=1}^5 \theta\left(\frac{1}{t_k t_8}; p\right) \end{aligned}$$

и $t_8 c^2 \prod_{k=1}^5 t_k = p^2 q^2$. Мы уже имеем одно функциональное решение этого уравнения

$$f_1(x) = \frac{V(t_1, \dots, t_5, cx, c/x, t_8; p, q)}{\Gamma(cx^\pm t_8, cx^\pm/t_8; p, q)}, \quad (11)$$

где при выборе контура интегрирования $C = \mathbb{T}$ в определении V -функции необходимо наложить ограничения $\sqrt{pq} < |t_j| < 1$, $j = 1, 2, \dots, 5$ и $\sqrt{|pq|} < |q^{\pm 1} t_6|, |q^{\pm 1} t_7|, |q^{\pm 1} t_8| < 1$. Однако эти ограничения могут быть ослаблены аналитическим продолжением. Второе независимое решение может быть получено умножением одного из параметров $c, t_1, \dots, t_5$ или x на p или другими простыми способами (см. ниже).

Введем новые обозначения для параметров:

$$\varepsilon_k = \frac{q}{ct_k}, \quad k = 1, \dots, 5, \quad \varepsilon_8 = \frac{c}{t_8}, \quad \varepsilon_7 = \frac{\varepsilon_8}{q}, \quad \prod_{k=1}^8 \varepsilon_k = p^2 q^2.$$

Из условия балансировки находим $c = \sqrt{\varepsilon_6 \varepsilon_8} / p^2$. Тогда выражения для $A(x)$ и ν упрощаются:

$$A(x) = \frac{\prod_{k=1}^8 \theta(\varepsilon_k x; p)}{\theta(x^2, qx^2; p)}, \quad \nu = \prod_{k=1}^6 \theta\left(\frac{\varepsilon_k \varepsilon_8}{q}; p\right). \quad (12)$$

В аддитивной системе обозначений

$$x = e^{2\pi i u / \omega_2}, \quad \varepsilon_k = e^{2\pi i a_k / \omega_2}, \quad f(x) =: h(u)$$

с $a_7 = a_8 - \omega_1$ и $\sum_{k=1}^8 a_k = 2 \sum_{m=1}^3 \omega_m$ эллиптическое гипергеометрическое уравнение принимает вид

$$B(u)(h(u + \omega_1) - h(u)) + B(-u)(h(u - \omega_1) - h(u)) + \nu h(u) = 0, \\ B(u) = \frac{\prod_{k=1}^8 [u + a_k]}{[2u][2u + \omega_1]}, \quad \nu = \prod_{k=1}^6 [a_8 + a_k - \omega_1], \quad (13)$$

где $[u] = \theta(e^{2\pi i u / \omega_2}; p)$. Если обозначить

$$v(\underline{g}; \omega_1, \omega_2, \omega_3) \equiv V(e^{2\pi i g_1 / \omega_2}, \dots, e^{2\pi i g_8 / \omega_2}; e^{2\pi i \omega_1 / \omega_2}, e^{2\pi i \omega_3 / \omega_2}),$$

то функция

$$h_1(u; \omega) = \frac{v(\delta - a_1, \dots, \delta - a_5, \gamma + u, \gamma - u, \rho; \omega)}{\Gamma(e^{2\pi i(a_6 - 4\omega_3 \pm u)/\omega_2}, e^{2\pi i(a_8 \pm u)/\omega_2}; p, q)}, \quad (14)$$

где

$$\delta = \omega_1 + 2\omega_3 - \frac{a_6 + a_8}{2}, \quad \gamma = \frac{a_6 + a_8}{2} - 2\omega_3, \quad \rho = \frac{a_6 - a_8}{2} - 2\omega_3,$$

дает функциональное решение уравнения (13) (ср. с решением (11)). Для получения второго линейно независимого решения можно воспользоваться модулярным преобразованием $(\omega_2, \omega_3) \rightarrow (-\omega_3, \omega_2)$, т.е.

$$h_2(u; \omega_1, \omega_2, \omega_3) = h_1(u; \omega_1, -\omega_3, \omega_2). \quad (15)$$

Определим теперь модифицированную эллиптическую гипергеометрическую функцию

$$v_{\text{mod}}(\underline{g}; \omega) = \int_{-\omega_3/2}^{\omega_3/2} \frac{\prod_{j=1}^8 G(g_j \pm x; \omega)}{G(\pm 2x; \omega)} \frac{dx}{\omega_2},$$

где $\sum_{k=1}^8 g_k = 2 \sum_{m=1}^3 \omega_m$ и контур интегрирования проходит между последовательностями полюсов подынтегральной функции, уходящими в одну или другую сторону от отрезка, соединяющего точки $-\omega_3/2$ и $\omega_3/2$. Поскольку при выводе

свойств V -функции мы использовали только уравнение (2), то все вышеперечисленные соотношения остаются справедливыми при замене обычной эллиптической гамма-функции на модифицированную. В частности, функция $v_{\text{mod}}(\underline{g}; \omega)$ также обладает E_7 -группой симметрии, и она же порождает еще одно решение эллиптического гипергеометрического уравнения. Однако, как видно из соотношения

$$v_{\text{mod}}(\underline{g}; \omega) = \frac{2\omega_3 e^{2\pi i(P(0) - \sum_{j=1}^8 P(g_j))}}{\omega_2(\tilde{p}; \tilde{p})_{\infty}(\tilde{r}; \tilde{r})_{\infty}} v(\underline{g}; \omega_1, -\omega_3, \omega_2),$$

это решение будет пропорционально $h_2(u)$. Любые другие решения уравнения (13) можно выразить через линейные комбинации $h_1(u)$ и $h_2(u)$ с некоторыми коэффициентами. Различные решения этого уравнения можно получить сдвигами $a_k \rightarrow a_k + \omega_3$, $k = 1, \dots, 6$, или сдвигом $u \rightarrow u + \omega_3$, или благодаря явной S_6 -симметрии уравнения (13) перестановкой одного из параметров $a_1, \dots, a_5$ с a_6 в выражении (14). Заметим также, что $V(\underline{t})$ удовлетворяет не одному, а намного большему числу уравнений, получающихся из (10) подстановками из E_7 -группы преобразований Вейля, а также перестановкой базисных параметров p и q .

Переход от эллиптических к q -гипергеометрическим функциям можно произвести многими способами. Для этого необходимо выделить из параметров ε_k некоторые степени p (или сдвинуть параметры a_k на какие-то доли ω_3) такие, что предел $p \rightarrow 0$ (или $\text{Im}(\omega_3) \rightarrow +\infty$) становится допустимым. Например, заменим $t_{1,2} \rightarrow pt_{1,2}$, воспользуемся формулой отражения $\Gamma(pqz; p, q) = 1/\Gamma(z^{-1}; p, q)$ и, устремив $p \rightarrow 0$, получаем

$$\lim_{p \rightarrow 0} V(pt_1, pt_2, t_3, \dots, t_8; p, q) = \frac{(q; q)_{\infty}}{4\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{(z^{\pm 2}, qz^{\pm}/t_1, qz^{\pm}/t_2; q)_{\infty}}{\prod_{k=3}^8 (t_k z^{\pm}; q)_{\infty}} \frac{dz}{z},$$

где $\prod_{k=1}^8 t_k = q^2$. Аналогично заменим $g_{1,2} \rightarrow g_{1,2} + \omega_3$ и воспользуемся формулой отражения $G(a + \sum_{m=1}^3 \omega_m; \omega) = 1/G(-a; \omega)$ в определении $v_{\text{mod}}(\underline{g}; \omega)$. После этого предел $\text{Im}(\omega_3) \rightarrow \infty$, взятый так, что одновременно $p, r \rightarrow 0$, дает

$$\begin{aligned} \lim_{\text{Im}(\omega_3) \rightarrow \infty} v_{\text{mod}}(g_1 + \omega_3, g_2 + \omega_3, g_3, \dots, g_8; \omega) = \\ = \int_{\mathbb{L}} \frac{\prod_{k=3}^8 \gamma(g_k \pm u; \omega)}{\gamma(\pm 2u; \omega) \prod_{k=1}^2 \gamma(\sum_{m=1}^2 \omega_m - g_k \pm u; \omega)} \frac{du}{\omega_2}, \end{aligned}$$

где $\sum_{k=1}^8 g_k = 2 \sum_{m=1}^2 \omega_m$, контур $\mathbb{L} = i\omega_2 \mathbb{R}$ и

$$\gamma(u; \omega_1, \omega_2) = \lim_{\text{Im}(\omega_3) \rightarrow \infty} G(u; \omega) = \frac{(\tilde{q} e^{2\pi i u / \omega_1}; \tilde{q})_{\infty}}{(e^{2\pi i u / \omega_2}; q)_{\infty}}.$$

При этом необходимо наложить условие $\text{Re}(\omega_1/\omega_2) > 0$ и считать, что последовательности полюсов подынтегральной функции, уходящие в разные стороны от контура $\mathbb{L}$, не “заезжают” за этот контур, как это требуется в интегральных представлениях типа Меллина–Барнса. После подходящих замен параметров эти две предельные функции определяют два независимых решения следующего q -гипергеометрического уравнения:

$$A(x)(f(qx) - f(x)) + A(x^{-1})(f(q^{-1}x) - f(x)) + \nu f(x) = 0, \quad (16)$$

где

$$A(x) = \frac{(1 - cx/t_8)(1 - cx/(qt_8))(1 - ct_8x)}{x^2(1 - x^2)(1 - qx^2)} \prod_{k=1}^5 \left(1 - \frac{qx}{ct_k}\right),$$

$$\nu = \frac{q^2 t_8^2}{c^2} \left(1 - \frac{c^2}{q}\right) \prod_{k=1}^5 \left(1 - \frac{1}{t_k t_8}\right), \quad t_8 c^2 \prod_{k=1}^5 t_k = q^2,$$

получающегося из уравнения (10) в соответствующем пределе. Первое решение мероморфно по x , а второе является мероморфной функцией переменной u , связанной с аргументом x соотношением $x = e^{2\pi i u/\omega_2}$. Другие (зависимые) решения возникают, например, после перестановки параметров t_j ¹⁾.

С помощью анализа вычетов в эллиптических гипергеометрических интегралах [5] можно редуцировать V -функцию к эллиптическому гипергеометрическому ряду ${}_{12}V_{11}$. При этом возникает условие квантования одного из параметров, приводящее к обрыву этого ряда. В результате получаем решение эллиптического гипергеометрического уравнения в виде обрывающегося ряда, приводящее к биортогональным функциям с непрерывной мерой [6], а при наложении еще одного условия квантования на параметры – к дискретному набору таких функций [9]. Опуская детали рассмотрения, приведенные в работе [6], запишем это решение в явном виде в указанных выше обозначениях:

$$f_1(x) = {}_{12}V_{11}\left(\frac{\varepsilon_6}{\varepsilon_8}; \frac{q}{\varepsilon_1 \varepsilon_8}, \frac{q}{\varepsilon_2 \varepsilon_8}, \frac{q}{\varepsilon_3 \varepsilon_8}, \frac{q}{\varepsilon_4 \varepsilon_8}, \frac{qp^2}{\varepsilon_5 \varepsilon_8}, \varepsilon_6 x, \frac{\varepsilon_6}{x}; q, p\right),$$

где ряд обрывается благодаря условию $\varepsilon_r \varepsilon_8 = q^m$, $m = 1, 2, \dots$, для какого-либо фиксированного $r = 1, \dots, 5$. Благодаря инвариантности этой функции относительно замен $\varepsilon_k \rightarrow p\varepsilon_k$ и эллиптическому аналогу преобразования Бэйли для обрывающихся рядов [10] перестановка параметров не порождает новых решений. Эта функция представляет собой частный случай V -функции и в дальнейшем мы ее не рассматриваем. Напомним только, что общие эллиптические гипергеометрические ${}_{s+1}V_s$ -функции определяются следующим формальным рядом:

$${}_{s+1}V_s(t_0; t_1, \dots, t_{s-4}; q, p; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta(t_0 q^{2n}; p)}{\theta(t_0; p)} \prod_{k=0}^{s-4} \frac{\theta(t_k)_n}{\theta(qt_0/t_k)_n} (qz)^n,$$

где используются эллиптические символы Похгаммера

$$\theta(x)_n = \prod_{j=0}^{n-1} \theta(q^j x; p) = \frac{\Gamma(q^n x; p, q)}{\Gamma(x; p, q)}.$$

При этом должно выполняться условие балансировки

$$\prod_{k=1}^{s-4} t_k = \pm t_0^{(s-5)/2} q^{(s-7)/2},$$

¹⁾После того, как данная статья была принята к печати, обнаружилось, что более детальный анализ предельных переходов от V -функции к q -гипергеометрическим функциям был недавно проведен в работе [8].

где для нечетных s необходимо брать положительный знак, что обеспечивает инвариантность $_{s+1}V_s$ -функции относительно замен $t_j \rightarrow pt_j$, $j = 0, \dots, s-5$ [3]. Если значение аргумента $z = 1$, в обозначениях рядов он опускается.

Рассмотрим теперь эллиптические гипергеометрические функции в рамках квантовых моделей типа Калоджеро–Сазерленда с эллиптическим взаимодействием [3]. Обзор нерелятивистских вполне интегрируемых моделей многочастичных систем дан в работе [11], и мы не будем их детально описывать. Конструктивная идея Олшпанецкого и Переломова о связи таких моделей с корневыми системами позволила существенно расширить их количество, однако эта связь не абсолютно однозначна. Это было показано Иноземцевым [12], нашедшим позднее наиболее общую известную модель для системы корней BC_n . Соответствующий гамильтониан имеет вид

$$\mathcal{H} = - \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + g \sum_{1 \leq j < k \leq n} (\mathcal{P}(x_j - x_k) + \mathcal{P}(x_j + x_k)) + \sum_{j=1}^n \sum_{r=0}^3 g_r \mathcal{P}\left(x_j + \frac{\omega_r}{2}\right),$$

где $\mathcal{P}(x)$ – функция Вейерштрасса с периодами ω_1, ω_2 ; $\omega_0 = 0$; $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$; $g, g_0, \dots, g_3$ – произвольные константы взаимодействия. При $n = 1$ задача поиска собственных значений для этого оператора эквивалентна уравнению Гойна, т.е. модель Иноземцева описывает многомерный аналог этого уравнения.

Релятивистское обобщение вполне интегрируемых квантовых n -частичных моделей было предложено Руджинарсом [13]. Конкретная модель, рассмотренная им, связана с системой корней A_{n-1} и задачей поиска собственных значений для некоторой системы n конечно-разностных операторов с тета-функциональными коэффициентами, содержащими один свободный параметр. В работе [14] ван Диехен предложил релятивистскую модель, объединяющую модели Руджинарса и Иноземцева и содержащую большое число свободных параметров. Ее интегрируемость была установлена Комори и Хиками [15]. Гамильтониан этой модели имеет вид (в терминах укороченной тета-функции, используемой нами)

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^n (A_j(\underline{z})T_j + A_j(\underline{z}^{-1})T_j^{-1}) + f(\underline{z}),$$

где $f(\underline{z})$ – некоторая сложная явная комбинация тета-функций,

$$T_j \psi(z_1, \dots, z_j, \dots, z_n) = \psi(z_1, \dots, qz_j, \dots, z_n),$$

$$A_j(\underline{z}) = \frac{\prod_{m=1}^8 \theta(t_m z_j; p)}{\theta(z_j^2, qz_j^2; p)} \prod_{k=1 \neq j}^n \frac{\theta(tz_j z_k, tz_j z_k^{-1}; p)}{\theta(z_j z_k, z_j z_k^{-1}; p)}.$$

Наложим линейное ограничение на параметры $t^{2n-2} \prod_{m=1}^8 t_m = p^2 q^2$. В результате $A_j(\underline{z})$ становятся эллиптическими функциями z_j , сам оператор $\mathcal{H}$ сильно упрощается [14], [16] и с точностью до аддитивной постоянной, не зависящей от z_j , принимает вид

$$\mathcal{D}_{\Pi} = \sum_{j=1}^n (A_j(\underline{z})(T_j - 1) + A_j(\underline{z}^{-1})(T_j^{-1} - 1)). \quad (17)$$

Стандартная задача для собственных значений

$$\mathcal{D}_{\Pi}\psi(z) = \lambda\psi(z)$$

для одночастичной модели ($n = 1$) приводит к следующему разностному уравнению второго порядка:

$$\frac{\prod_{j=1}^8 \theta(t_j z; p)}{\theta(z^2, qz^2; p)} (\psi(qz) - \psi(z)) + \frac{\prod_{j=1}^8 \theta(t_j z^{-1}; p)}{\theta(z^{-2}, qz^{-2}; p)} (\psi(q^{-1}z) - \psi(z)) = \lambda\psi(z).$$

Сравнивая его с эллиптическим гипергеометрическим уравнением вида (10), (12), мы видим, что они совпадают при отождествлении $t_j = \varepsilon_j$ и наложении двух дополнительных ограничений на переменные: $t_7 = t_8/q$ и $\lambda = -\nu$ (согласно частному сообщению Руджинарса аналогичное наблюдение было сделано Комори). Таким образом, общее решение эллиптического гипергеометрического уравнения, найденное в работе [3],

$$\psi(z) = \frac{V(q/ct_1, \dots, q/ct_5, cz, c/z, c/t_8; p, q)}{\Gamma(t_8 z^{\pm}, c^2 z^{\pm}/t_8; p, q)},$$

где $c = \sqrt{t_6 t_8}/p^2$, является собственной функцией при $n = 1$ гамильтониана (17) при одном ограничении на параметры и специальном выборе собственного значения λ как функции параметров.

Однако связь с моделями типа Калоджеро–Сазерленда шире, чем указанное наблюдение [3]. Введем специальное обозначение для C_n -аналога постоянной κ ,

$$\kappa_n = \frac{(p; p)_{\infty}^n (q; q)_{\infty}^n}{(2\pi i)^n 2^n n!},$$

и определим скалярное произведение

$$\langle \varphi, \psi \rangle^{\text{I}, \Pi} = \kappa_n \int_{\mathbb{T}^n} \Delta^{\text{I}, \Pi}(z, \underline{t}) \varphi(z) \psi(z) \frac{dz}{z}, \quad \frac{dz}{z} = \frac{dz_1}{z_1} \dots \frac{dz_n}{z_n},$$

для двух типов весовых функций. Начнем рассмотрение с функции типа II:

$$\Delta^{\text{II}}(z, \underline{t}) = \prod_{1 \leq j < k \leq n} \frac{\Gamma(tz_j^{\pm} z_k^{\pm}; p, q)}{\Gamma(z_j^{\pm} z_k^{\pm}; p, q)} \prod_{j=1}^n \frac{\prod_{k=1}^8 \Gamma(t_k z_j^{\pm}; p, q)}{\Gamma(z_j^{\pm 2}; p, q)},$$

где

$$|t|, |t_j| < 1, \quad t^{2n-2} \prod_{k=1}^8 t_j = p^2 q^2.$$

Она является положительно определенной для $z_j \in \mathbb{T}$, действительных p, q или $p = q^*$ и при ограничениях $t, t_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, 8$, или $t \in \mathbb{R}$, $t_{5,6,7,8} = t_{1,2,3,4}^*$. Потребуем, чтобы полюсы ядра $\Delta^{\text{II}}(z, \underline{t})$ и сингулярности функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ не лежали в n -мерном кольце $|q|^{-1} \leq |z_j| \leq |q|$. Это налагает ограничения на параметры $|t|, |t_j| < |q|$. Тогда оператор $\mathcal{D}_{\Pi}$ (17) эрмитов по отношению к этому скалярному произведению, $\langle \varphi, \mathcal{D}_{\Pi} \psi \rangle^{\text{II}} = \langle \mathcal{D}_{\Pi} \varphi, \psi \rangle^{\text{II}}$.

Очевидно, что функция $\psi(\underline{z}) = 1$ является собственной функцией оператора $\mathcal{D}_{\Pi}$ с собственным значением $\lambda = 0$, т.е. $\mathcal{D}_{\Pi}1 = 0$. Нормировка этой собственной функции

$$\|1\|^2 = V_{\Pi}(\underline{t}; p, q; C_n) = \kappa_n \int_{\mathbb{T}^n} \Delta^{\Pi}(\underline{z}, \underline{t}) \frac{dz}{z} \quad (18)$$

является многомерным обобщением функции $V(t_1, \dots, t_8; p, q)$. Так же, как и в одномерном случае, при $t_7 t_8 = pq$ эта функция перестает зависеть от t_7 и t_8 и сводится к C_n -обобщению эллиптического бета-интеграла (эллиптическому аналогу интеграла Сельберга), предложенному в работе [5]:

$$\begin{aligned} \kappa_n \int_{\mathbb{T}^n} \prod_{1 \leq j < k \leq n} \frac{\Gamma(t z_j^{\pm} z_k^{\pm}; p, q)}{\Gamma(z_j^{\pm} z_k^{\pm}; p, q)} \prod_{j=1}^n \frac{\prod_{m=1}^6 \Gamma(t_m z_j^{\pm}; p, q)}{\Gamma(z_j^{\pm 2}; p, q)} \frac{dz_1}{z_1} \cdots \frac{dz_n}{z_n} = \\ = \prod_{j=1}^n \left(\frac{\Gamma(t^j; p, q)}{\Gamma(t; p, q)} \prod_{1 \leq m < s \leq 6} \Gamma(t^{j-1} t_m t_s; p, q) \right), \end{aligned} \quad (19)$$

где $t^{2n-2} \prod_{m=1}^6 t_m = pq$.

Рассмотрим теперь весовую функцию типа I:

$$\Delta^{\text{I}}(\underline{z}, \underline{t}) = \prod_{1 \leq j < k \leq n} \frac{1}{\Gamma(z_j^{\pm} z_k^{\pm}; p, q)} \prod_{j=1}^n \frac{\prod_{k=1}^{2n+6} \Gamma(t_k z_j^{\pm}; p, q)}{\Gamma(z_j^{\pm 2}; p, q)},$$

где $\prod_{k=1}^{2n+6} t_k = p^2 q^2$, и ассоциируем с ней гамильтониан

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\text{I}} = \sum_{j=1}^n (A_j(z)(T_j - 1) + A_j(z^{-1})(T_j^{-1} - 1)), \\ A_j(z) = \frac{\prod_{k=1}^{2n+6} \theta(t_k z_j; p)}{\theta(z_j^2, q z_j^2; p)} \prod_{k=1 \neq j}^n \frac{1}{\theta(z_j z_k^{\pm}; p)} \end{aligned}$$

(при $n = 1$ этот оператор совпадает с $\mathcal{D}_{\Pi}$). Функция $\Delta^{\text{I}}(\underline{z}, \underline{t})$ является положительно определенной для $z_j \in \mathbb{T}$, действительных p, q или $p = q^*$ и при ограничениях $t_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, 2n + 6$, или $t_{2j} = t_{2j+1}^*$, $j = 1, \dots, n + 3$.

Потребуем, чтобы полюсы ядра $\Delta^{\text{I}}(\underline{z}, \underline{t})$ и сингулярности функций $\varphi(\underline{z})$ и $\psi(\underline{z})$ не лежали в n -мерном кольце $|q|^{-1} \leq |z_j| \leq |q|$, что налагает ограничения $|t_j| < |q|$, $j = 1, \dots, 2n + 6$. Тогда оператор $\mathcal{D}_{\text{I}}$ эрмитов по отношению к выбранному скалярному произведению, $\langle \varphi, \mathcal{D}_{\text{I}} \psi \rangle^{\text{I}} = \langle \mathcal{D}_{\text{I}} \varphi, \psi \rangle^{\text{I}}$. Опять получаем, что функция $\psi(\underline{z}) = 1$ является собственной функцией оператора $\mathcal{D}_{\text{I}}$ для собственного значения $\lambda = 0$. Ее нормировка

$$\|1\|^2 = V_{\text{I}}(\underline{t}; p, q; C_n) = \kappa_n \int_{\mathbb{T}^n} \Delta^{\text{I}}(\underline{z}, \underline{t}) \frac{dz}{z} \quad (20)$$

определяет многомерную эллиптическую гипергеометрическую функцию типа I на системе корней C_n . При $t_{2n+5}t_{2n+6} = pq$ параметры t_{2n+5}, t_{2n+6} выпадают, и возникает эллиптический бета-интеграл типа I для системы корней C_n , который вычисляется точно [3], [7], [17]:

$$\begin{aligned} \kappa_n \int_{\mathbb{T}^n} \prod_{1 \leq j < k \leq n} \frac{1}{\Gamma(z_j^\pm z_k^\pm; p, q)} \prod_{j=1}^n \frac{\prod_{m=1}^{2n+4} \Gamma(t_m z_j^\pm; p, q)}{\Gamma(z_j^{\pm 2}; p, q)} \frac{dz_1}{z_1} \dots \frac{dz_n}{z_n} = \\ = \prod_{1 \leq m < s \leq 2n+4} \Gamma(t_m t_s; p, q). \end{aligned} \quad (21)$$

Отметим, однако, что приведенная интерпретация нормировок волновой функции $\psi(\underline{z}) = 1$ неоднозначна. Действительно, в терминах переменных $u_j = \omega_2 \ln z_j / (2\pi i)$ в качестве собственной функции при $\lambda = 0$ мы можем взять произвольную ω_1 -периодическую функцию $\varphi(\dots, u_j + \omega_1, \dots) = \varphi(\dots, u_j, \dots)$, и при $\varphi \neq \text{const}$ указанная связь с функциями $V_{I,II}$ неверна. Так же, как это было в случае биортгональных функций [6], мы можем потребовать, чтобы собственные функции операторов $\mathcal{D}_{I,II} := \mathcal{D}_{I,II}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ были и собственными функциями операторов $\mathcal{D}_{I,II}(\omega_3, \omega_2, \omega_1)$, соответственно (т.е. операторов, получающихся из $\mathcal{D}_{I,II}$ перестановкой p и q). Это сводит свободу в определении волновых функций к множителю, являющемуся эллиптической функцией с периодами ω_1 и ω_3 . Дополнительное требование мероморфности по переменным $z_j = e^{2\pi i u_j / \omega_2}$ однозначно фиксирует волновые функции, так как не существует трижды периодических функций (мы подразумеваем, что ω_j попарно несоизмеримы).

Функции $V_{I,II}(t; p, q; C_n)$ впервые появились в работе Рэйнса [7], где были найдены следующие нетривиальные симметрии:

$$\begin{aligned} V_I(t_1, \dots, t_{2n+6}; p, q; C_n) = \prod_{1 \leq j < k \leq 2n+6} \Gamma(t_j t_k; p, q) \times \\ \times \frac{(p; p)_\infty (q; q)_\infty}{4\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{\prod_{j=1}^{2n+6} \Gamma(\sqrt{pq} t_j^{-1} z^\pm; p, q)}{\Gamma(z^{\pm 2}; p, q)} \frac{dz}{z}, \end{aligned}$$

где $\sqrt{|pq|} < |t_j| < 1$;

$$\begin{aligned} V_{II}(t, t_1, \dots, t_8; p, q; C_n) = \prod_{1 \leq j < k \leq 4} \prod_{l=0}^{n-1} \Gamma(t_j t_k t^l, t_{j+4} t_{k+4} t^l; p, q) \times \\ \times V_{II}(t, s_1, \dots, s_8; p, q; C_n), \end{aligned}$$

где $|t|, |t_j|, |s_j| < 1$ и

$$\begin{cases} s_j = \varepsilon^{-1} t_j, & j = 1, 2, 3, 4, \\ s_j = \varepsilon t_j, & j = 5, 6, 7, 8, \end{cases} \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{t_1 t_2 t_3 t_4}{p q t^{1-n}}} = \sqrt{\frac{p q t^{1-n}}{t_5 t_6 t_7 t_8}}.$$

Нетрудно построить партнеры функций $V_{I,II}(t; p, q; C_n)$, хорошо определенные при $|q| = 1$. Для этого достаточно заменить функции $\Gamma(e^{2\pi i u / \omega_2}; p, q)$ в их определении на модифицированные эллиптические гамма-функции $G(u; \omega)$. При этом предел $\text{Im}(\omega_3) \rightarrow \infty$ приводит к q -гипергеометрическим интегралам типа Меллина–Барнса с некомпактным контуром интегрирования, как это описано выше в случае

$n = 1$. Эти модифицированные функции описывают нормировки волновых функций $\varphi(\underline{u}) = \text{const}$, являющихся одновременно при $\lambda = 0$ собственными функциями операторов $\mathcal{D}_{I,II}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ и $\mathcal{D}_{I,II}(\omega_2, \omega_1, \omega_3)$, соответственно, что следует из свойства $G(u; \omega_1, \omega_2, \omega_3) = G(u; \omega_2, \omega_1, \omega_3)$.

Построенная n -частичная модель типа I содержит большое число свободных параметров (а именно $2n + 5$), но ключевой параметр парного взаимодействия фиксирован, и в этом смысле такая модель является сильно вырожденной. Интересно выяснить, является ли она вполне интегрируемой, как это было для модели типа II. Описанные проявления эллиптических гипергеометрических функций в релятивистском обобщении эллиптических моделей Калоджеро–Сазерленда–Иноземцева позволяют предположить, что и эти, и тета-гипергеометрические функции [3], [6] будут играть важную роль в полном решении соответствующих задач для собственных значений.

Благодарности. Работа частично поддержана РФФИ (грант № 05-01-01086)

Список литературы

- [1] G. E. Andrews, R. Askey, R. Roy, *Special Functions*, Encyclopedia Math. Appl., **71**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.
- [2] G. Gasper, M. Rahman, *Basic Hypergeometric Series*, Encyclopedia Math. Appl., **96**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.
- [3] В. П. Спиридонов, *Эллиптические гипергеометрические функции*, Дисс. ... докт. физ.-матем. наук, ЛТФ ОИЯИ, Дубна, 2004.
- [4] В. П. Спиридонов, *УМН*, **56**:1 (2001), 181–182.
- [5] J. F. van Diejen, V. P. Spiridonov, *Math. Res. Lett.*, **7** (2000), 729–746.
- [6] В. П. Спиридонов, *Алгебра и анализ*, **15**:6 (2003), 161–215.
- [7] E. M. Rains, *Transformations of elliptic hypergeometric integrals*, [math.QA/0309252](#).
- [8] F. J. van de Bult, E. M. Rains, J. V. Stokman, *Properties of generalized univariate hypergeometric functions*, [math.CA/0607250](#).
- [9] V. P. Spiridonov, A. S. Zhedanov, *Comm. Math. Phys.*, **210** (2000), 49–83.
- [10] I. B. Frenkel, V. G. Turaev, “Elliptic solutions of the Yang–Baxter equation and modular hypergeometric functions”, *The Arnold–Gelfand Mathematical Seminars, Geometry and Singularity Theory*, eds. V. I. Arnold, M. I. Gelfand, V. S. Retakh, M. Smirnov, Birkhäuser, Boston, MA, 1997, 171–204.
- [11] M. A. Olshanetsky, A. M. Perelomov, *Phys. Rep.*, **94**:6 (1983), 313–404.
- [12] V. I. Inozemtsev, *Lett. Math. Phys.*, **17** (1989), 11–17.
- [13] S. N. M. Ruijsenaars, *Comm. Math. Phys.*, **110** (1987), 191–213.
- [14] J. F. van Diejen, *J. Math. Phys.*, **35** (1994), 2983–3004; *Families of commuting difference operators*, Ph. D. thesis, Univ. van Amsterdam, Amsterdam, 1994.
- [15] Y. Komori, K. Hikami, *J. Phys. A*, **30** (1997), 4341–4364.
- [16] S. N. M. Ruijsenaars, “Integrable BC_N analytic difference operators: hidden parameter symmetries and eigenfunctions”, *New Trends in Integrability and Partial Solvability*, Proc. NATO Adv. Res. Workshop (Cadiz, Spain, 2002), NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., **132**, eds. A. B. Shabat, A. González-López, M. Mañas, L. Martínez-Alonso, M. A. Rodríguez, Kluwer, Dordrecht, 2004, 217–261.
- [17] J. F. van Diejen, V. P. Spiridonov, *Int. Math. Res. Not.*, 2001, № 20, 1083–1110.