Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Тюрин, Универсальный класс Маслова бор-
зоммерфельдова лагранжева вложения в псевдоэйн-
штейново многообразии, *ТМФ*, 2007, том 150, но-
мер 2, 325–337

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf5982>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 16:10:51

© 2007 г.

Н. А. Тюрин*

УНИВЕРСАЛЬНЫЙ КЛАСС МАСЛОВА БОР-ЗОММЕРФЕЛЬДОВА ЛАГРАНЖЕВА ВЛОЖЕНИЯ В ПСЕВДОЭЙНШТЕЙНОВО МНОГООБРАЗИЕ

Показано, что в случае бор-зоммерфельдова лагранжева вложения в псевдоэйнштейново симплектическое многообразие можно определить некоторый универсальный класс 1-когомологий, который является аналогом класса Маслова. В отличие от индекса Маслова, введенный класс непосредственно связан с проблемой минимальности лагранжевых подмногообразий, если объемлющее псевдоэйнштейново многообразие обладает метрикой Кэлера–Эйнштейна. Предложена геометрическая интерпретация введенного класса как некоторого препятствия к продолжению суперциклов размерности 1 с лагранжева подмногообразия на объемлющее симплектическое многообразие.

Ключевые слова: псевдоэйнштейново симплектическое многообразие, согласованная почти комплексная структура, антиканоническое расслоение, связность предквантования, бор-зоммерфельдово лагранжево подмногообразие, индекс Маслова.

ВВЕДЕНИЕ

Мы определяем некоторый универсальный класс одномерных когомологий на лагранжевом подмногообразии $S \subset M$ односвязного компактного симплектического многообразия (M, ω) , удовлетворяющих следующим условиям:

- (M, ω) является псевдоэйнштейновым, т.е.

$$K_\omega = k[\omega] \in H^2(M, \mathbb{Z}),$$

где K_ω – ассоциированный канонический класс симплектической формы ω , k – произвольная константа;

- S является бор-зоммерфельдовым относительно антиканонического класса (определение приведено в разделе 1).

Мы называем этот одномерный класс когомологий универсальным классом Маслова, поскольку, как показано ниже, данный класс является естественным обобщением известного класса Маслова лагранжевых иммерсий в симплектическое векторное пространство [1]. В то же время наша конструкция не следует по стандартному

*Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия; Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ).
E-mail: ntyurin@theor.jinr.ru

для компактного случая пути, использующему понятие индекса мембран, которые ограничены петлями, содержащимися в данном лагранжевом подмногообразии. Индекс мембран, введенный в [2] и используемый во множестве работ, называется индексом Маслова и применяется в чисто симплектическом случае. С другой стороны, Фукаи в [3] заметил, что в исследуемой нами ситуации можно определить некоторый индекс для бор-зоммерфельдовых лагранжевых подмногообразий псевдоэйнштейновых симплектических многообразий относительно интегрируемой комплексной структуры, и такой индекс также обобщает понятие класса Маслова. В нашей конструкции не требуется существование интегрируемой комплексной структуры на симплектическом многообразии M . Настоящая работа является продолжением работы [4], в которой наибольшее внимание уделяется случаю многообразий Кэлера–Эйнштейна, поскольку именно в этом случае имеется связь между построенным в [4] классом Маслова и проблемой минимальности лагранжевых подмногообразий. В то же время очевидно (мы увидим это в разделе 4), что определение универсального класса Маслова, предлагаемое в настоящей работе, согласуется с определением класса Маслова бор-зоммерфельдова лагранжева вложения в многообразие Кэлера–Эйнштейна из [4]. А именно, если данное односвязное псевдоэйнштейново симплектическое многообразие обладает метрикой Кэлера–Эйнштейна, то для бор-зоммерфельдова лагранжева подмногообразия универсальный класс Маслова и класс Маслова, определяемый метрикой Кэлера–Эйнштейна, совпадают. Это может добавить несколько новых фактов к рассуждениям приведенным в работе [4].

В разделе 3 мы сравниваем универсальный класс Маслова и индекс Маслова. Они отличаются, хотя и имеют схожие геометрические интерпретации. Разность равна кратному симплектической площади, которое само по себе является $\mathbb{Z}$ -значной функцией на группе $\pi_2(M, S; \mathbb{Z})$, если S – бор-зоммерфельдово подмногообразие.

1. УСЛОВИЕ БОРА–ЗОММЕРФЕЛЬДА

Пусть (M, ω) – односвязное компактное симплектическое многообразие. Предположим, что его канонический класс K_ω пропорционален классу когомологий симплектической формы:

$$K_\omega = k[\omega] \in H^2(M, \mathbb{Z}).$$

Мы называем такое многообразие псевдоэйнштейновым, следуя [3], хотя в некоторых случаях (если $k < 0$) резонно было бы использовать другой термин – симплектическое многообразие Фано.

Мы будем работать с антиканоническим линейным расслоением $K_\omega^{-1} \rightarrow M$, обозначая его как K^{-1} . Оно реализуется следующим образом: зафиксируем произвольную почти комплексную структуру I , согласованную с ω , тогда пара (ω, I) может быть дополнена до соответствующей эрмитовой тройки (ω, G, I) , где G – соответствующая риманова метрика. Тем самым задана эрмитова структура H на касательном расслоении TM , причем как комплексное расслоение (TM, H) изоморфно голоморфному касательному расслоению $T^{1,0}M$ (которое корректно определено в неинтегрируемом случае, как и в интегрируемом). Детерминантное комплексное

линейное расслоение $\det T^{1,0}M$, снабженное соответствующей эрмитовой структурой, является антиканоническим линейным расслоением K^{-1} . Топологически, как $\mathbb{C}^*$ -расслоение, оно определено своим первым классом Черна $c_1(K^{-1})$, который мы обозначаем тем же символом K^{-1} , следуя алгебро-геометрической традиции.

Итак, для произвольной почти комплексной структуры имеется соответствующая эрмитова структура h на комплексном линейном расслоении K^{-1} и, следовательно, определено пространство эрмитовых связностей $\mathcal{A}_h(K^{-1})$ (все детали теории связностей, кривизн и калибровочных преобразований могут быть найдены, например, в [5]). Калибровочная группа $\mathcal{G}_h$ действует на этом пространстве, и известно, что для абелевых связностей на односвязном многообразии каждый класс калибровочной эквивалентности определяется формой кривизны, принадлежащей $\Omega_M^2(i\mathbb{R})$ [5]. Следовательно, если наложить следующее условие на форму кривизны:

$$F_a = -2\pi i k \cdot \omega, \quad (1)$$

мы получим в точности одну орбиту

$$\mathcal{G}_h(a) = \mathcal{O}_{k \cdot \omega} \subset \mathcal{A}_h,$$

где a – связность, удовлетворяющая (1). Эта орбита содержит все решения (1). Как обычно, для любой пары $a, a_1 \in \mathcal{O}_{k \cdot \omega}$ их разность $a - a_1 \in \Omega_M^1(i\mathbb{R})$ есть чисто мнимая точная 1-форма.

Зафиксируем произвольный элемент a из $\mathcal{O}_{k \cdot \omega}$. Тогда для любого гладкого лагранжева подмногообразия $S \subset M$ можно рассмотреть ограничение пары (K^{-1}, a) на него и получить тривиальное линейное расслоение и плоскую связность. Действительно, поскольку кривизна F_a пропорциональна симплектической форме, a становится плоским после ограничения на любое лагранжево подмногообразие по определению последнего. Таким образом, мы получаем пару $(K^{-1}|_S, a|_S)$, и для плоской связности рассматривается ее характер на фундаментальной группе $\pi_1(S)$.

Мы называем в данной ситуации лагранжево подмногообразие *бор-зоммерфельдовым относительно антиканонического расслоения* (или кратко *бор-зоммерфельдовым*), если этот характер тривиален. Обычно в геометрическом квантовании это понятие используется для расслоения предквантования (см., например, [6] и предлагаемые там ссылки), однако, будучи чисто геометрическим, оно может быть использовано в гораздо более широком смысле: для любого линейного расслоения, первый класс Черна которого пропорционален классу когомологий симплектической формы. Заметим, что мы не требуем здесь целочисленности последнего, так как работаем с антиканоническим расслоением. В то же время в обычной для геометрического квантования ситуации, когда класс симплектической формы является целочисленным, каждое бор-зоммерфельдово в стандартном смысле лагранжево подмногообразие является бор-зоммерфельдовым относительно антиканонического расслоения, поэтому использование того же термина вполне естественно.

На первый взгляд определение бор-зоммерфельдова подмногообразия зависит от выбора определяющей связности $a \in \mathcal{A}_h(K^{-1})$, однако для односвязного псевдоэйнштейнова симплектического многообразия это понятие является универсальным.

В самом деле, если мы изменяем определяющую связность a в классе эквивалентности $\mathcal{O}_{k \cdot \omega}$, то характер должен остаться тем же для любого $S \subset M$, поскольку он является инвариантом действия калибровочной группы. Далее, если на антиканоническом линейном расслоении мы меняем эрмитову структуру h на h' , следуя изменению почти комплексной структуры, то связности $a \in \mathcal{O}_{k \cdot \omega} \subset \mathcal{A}_h(K^{-1})$ и $a' \in \mathcal{O}'_{k \cdot \omega} \subset \mathcal{A}_{h'}(K^{-1})$ принадлежат одному и тому же классу $\mathbb{C}^*$ -эквивалентности в большом пространстве $\mathcal{A}(K^{-1})$ всех $\mathbb{C}^*$ -связностей на K^{-1} , так как они имеют одну и ту же кривизну. Поэтому характеры $a|_S$ и $a'|_S$ обязаны совпадать.

Таким образом, в случае, который исследуется в настоящей работе, понятие бор-зоммерфельдовости относительно антиканонического класса является универсальным.

Как уже неоднократно обсуждалось (см., например, [7]), в то время как обычное условие лагранжевости является статичным, стандартное условие Бора–Зоммерфельда является динамическим, и то же верно для условия Бора–Зоммерфельда относительно антиканонического расслоения. Это означает, что локально пространство бор-зоммерфельдовых лагранжевых подмногообразий порождается строго гамильтоновыми векторными полями, и, следовательно, пространство всех изодрас- тических деформаций данного бор-зоммерфельдова лагранжева подмногообразия исчерпывается инфинитезимальными симплектоморфизмами (M, ω) (и, конечно, каждое S_0 в этом представлении имеет очень большой стабилизатор $\text{Stab } S_0 \subset \text{Sym}(M, \omega)$).

Ниже мы работаем с бор-зоммерфельдовыми относительно антиканонического расслоения лагранжевыми подмногообразиями, опуская для краткости спецификацию.

2. УНИВЕРСАЛЬНЫЙ КЛАСС

Пусть (M, ω) – односвязное псевдоэйнштейново многообразие и S – гладкое лагранжево подмногообразие, удовлетворяющее условию Бора–Зоммерфельда (заметьте, что такое лагранжево подмногообразие обязано быть ориентируемым).

Зафиксируем почти комплексную структуру I , согласованную с ω , и рассмотрим произвольную абелеву связность $a \in \mathcal{O}_{k \cdot \omega} \subset \mathcal{A}_h(K^{-1})$, как это делалось в разделе 1. С другой стороны, выбор I задает изоморфизм

$$K^{-1}|_S = \det TS \otimes \mathbb{C} \quad (2)$$

вместе с отождествлением эрмитовой структуры на $K^{-1}|_S$, индуцируемой I , и комплексификации специальной ортогональной структуры на $\det TS$, задаваемой ограничением на S римановой метрики G , входящей в эрмитову тройку (ω, G, I) . Легко показать (см., например, [4]), что ограничение $K^{-1}|_S$ на ориентируемое лагранжево подмногообразие S обладает канонической тривиализацией, задаваемой ортогональной проекцией старшего поливекторного поля единичной длины в объемлющем пространстве $\Lambda^n T^{1,0}M|_S$. В самом деле, над произвольной точкой $p \in S \subset M$ пространство $\Lambda^n T_p^{\mathbb{C}}M$ содержит

– вещественную прямую $\Lambda^n T_p S$,

- прямую $\Lambda^n T_p^{1,0} M = K^{-1}|_p$ без вещественных точек,
- эрмитово скалярное произведение H .

Локальные вычисления показывают, что ортогональная проекция единичного вектора, направленного вдоль $\Lambda^n T_p S$, на комплексную прямую K_p^{-1} всегда нетривиальна. Если S ориентируемо, то $\Lambda^n TS$ тривиально, и имеются два сечения единичной длины, ортогональные проекции которых на $K^{-1}|_S$ дают две тривиализации; мы называем их каноническими. Поскольку эти тривиализации сопряжены относительно канонического $U(1)$ -действия, мы имеем одну каноническую тривиальную связность на $K^{-1}|_S$, обозначаемую нами как $A_0 \in \mathcal{A}_h(K^{-1}|_S)$, которая уже не зависит от выбора ориентации. Таким образом, при отождествлении (2) мы имеем две плоские связности с тривиальными характеристиками: ограничение определяющей связности a и каноническую связность A_0 . Следовательно, как и в [4], мы можем сравнить две плоские связности с тривиальными характеристиками на $\pi_1(S)$; из совпадения характеров следует, что $a|_S$ и A_0 принадлежат одному и тому же классу калибровочной эквивалентности в $\mathcal{A}_h(K^{-1}|_S)$ и, следовательно, связаны калибровочным преобразованием

$$g(a|_S, A_0) = g_S \in \text{Map}(S, U(1)).$$

Это калибровочное преобразование задает класс одномерных когомологий на S по правилу

$$H^1(S, \mathbb{Z}) \ni m_S = g_S^* h, \quad (3)$$

где $h \in H^1(U(1), \mathbb{Z})$ – образующая в $H^1(U(1), \mathbb{Z})$.

Отсюда мы имеем

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Универсальным классом Маслова* $m_S \in H^1(S, \mathbb{Z})$ бор-зоммерфельдова лагранжева подмногообразия $S \subset M$ называется класс, задаваемый уравнением (3).

ПРИМЕР. Рассмотрим симплектическое векторное пространство V^{2n} с постоянной симплектической формой Ω как односвязное симплектическое многообразие. Тогда универсальный класс Маслова, введенный выше, в точности совпадает с “классическим” классом Маслова из [1]. В самом деле, в этом случае в качестве определяющей связности на антиканоническом линейном расслоении (которое в этом случае тривиально) можно взять детерминантную связность Леви-Чивитта постоянной интегрируемой комплексной структуры I , согласованной с Ω . Тогда универсальный класс (3) может быть вычислен через среднюю кривизну. В плоском случае она всегда замкнута и представляет целочисленный класс когомологий, который и совпадает с “классическим” классом Маслова.

Мы обязаны, однако, подчеркнуть, что на настоящий момент универсальный класс Маслова существует только для гладких вложений $S \subset M$ по определению. Действительно, в случае иммерсии необходимо работать с сингулярными связностями и калибровочными преобразованиями (особенности возникают в точках самопересечений образа иммерсии).

Класс, введенный выше, является универсальным, поскольку имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Определение универсального класса Маслова бор-зоммерфельдова лагранжсева подмногообразия $S \subset M$ односвязного псевдоэйнштейнова симплектического многообразия (M, ω) является корректным, т.е. не зависит от выбора I и a .*

В самом деле, пространство согласованных почти комплексных структур для произвольного симплектического многообразия является стягиваемым. Для каждой почти комплексной структуры, определяющей соответствующую эрмитову структуру h на K^{-1} , орбита $\mathcal{O}_{k \cdot \omega}$ является связным множеством. Топологический тип g_S постоянен на связном пространстве пар (I, a) , а этот тип в точности соответствует m_S .

Более того, нетрудно установить, что справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Универсальный класс Маслова бор-зоммерфельдова лагранжсева подмногообразия односвязного псевдоэйнштейнова симплектического многообразия инвариантен относительно изодрастических деформаций. Универсальный класс Маслова бор-зоммерфельдова лагранжсева подмногообразия односвязного псевдоэйнштейнова симплектического многообразия эквивариантен по действию группы симплектоморфизмов (M, ω) .*

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Нетрудно расширить наши рассуждения до неодносвязного случая. В самом деле, если M имеет нетривиальные первые когомологии

$$b^1(M) > 0,$$

то существуют различные $\mathcal{G}_h$ -орбиты решений уравнения (1), нумеруемые пространством вещественных когомологий $H^1(M, \mathbb{R})$ нашего M (если выбрать начало отсчета в аффинном пространстве $\mathcal{A}_h(K^{-1})$, ассоциированном с векторным пространством Ω_M^1). Для точки $[a] \in H^1(M, \mathbb{R})$ мы обозначаем соответствующую орбиту как $\mathcal{O}_{k \cdot \omega}^{[a]}$. Если ориентируемое лагранжсево подмногообразие $S \subset M$ является бор-зоммерфельдовым относительно орбиты класса $[a]$, то мы можем построить некоторый класс $m_S = m_S(a)$, следуя той же стратегии, что и в односвязном случае. Но на этот раз может случиться так, что $S \subset M$ является бор-зоммерфельдовым для разных орбит; для пары классов $[a_1], [a_2]$, представленных абелевыми связностями $a_1, a_2 \in \mathcal{A}_h(K^{-1})$, получаем, что их разность $a_1 - a_2 \in \Omega_M^1(i\mathbb{R})$ является замкнутой 1-формой. После ограничения на S эта форма должна иметь целые значения на $H_1(S, \mathbb{Z})$, поскольку S является бор-зоммерфельдовым одновременно для a_1 и a_2 . Следовательно, этим определен некоторый элемент из $H^1(S, \mathbb{Z})$, и нетрудно видеть, что этот элемент в точности равен разности

$$m_S(a_2) - m_S(a_1) \in H^1(S, \mathbb{Z}).$$

Поэтому класс, получаемый из нашей конструкции, не является универсальным в общем неодносвязном случае; однако если отображение

$$H^1(M, \mathbb{R}) \times H_1(S, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}$$

тривиально, конструкция работает и дает универсальный класс. В противном случае имеется интересный “туннельный эффект”.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Универсальный класс Маслова может пониматься как некоторое препятствие. Рассмотрим односвязное псевдоэйнштейново симплектическое многообразие (M, ω) вместе с бор-зоммерфельдовым лагранжевым подмногообразием S . Если зафиксировать согласованную почти комплексную структуру, то тем самым выделяется каноническая тривиальная связность $A_0 \in \mathcal{A}_h(K^{-1}|_S)$. Возникает естественный вопрос: может ли эта связность быть продолжена до глобальной связности $a \in \mathcal{A}_h(K^{-1})$ на всем M с формой кривизны, пропорциональной симплектической форме? Если универсальный класс Маслова $m_S \in H^1(S, \mathbb{Z})$ нетривиален, то такого продолжения не существует. С другой стороны, если универсальный класс Маслова тривиален, $m_S = 0$, тогда такое продолжение существует (и далеко не единственно). Таким образом, универсальный класс Маслова является препятствием для существования таких продолжений.

Имеются дополнительные замечания в неориентируемом случае, однако мы оставляем их за рамками настоящей работы.

3. УНИВЕРСАЛЬНЫЙ КЛАСС МАСЛОВА, ИНДЕКС МАСЛОВА И МОНОТОННЫЕ ЛАГРАНЖЕВЫ ПОДМНОГООБРАЗИЯ

В общем случае для лагранжева подмногообразия произвольного симплектического многообразия можно определить индекс петель, который зависит от элементов группы $\pi_2(M, S; \mathbb{Z})$ [2]. Естественно было бы сравнить этот индекс Маслова для петель с универсальным классом Маслова в случае бор-зоммерфельдова вложения в псевдоэйнштейново симплектическое многообразие. Заметим, что в классическом случае (когда $M = V^{2n}$ – симплектическое векторное пространство) они совпадают с “классическим” классом Маслова из [1].

Пусть $S \subset M$ – ориентируемое¹⁾ лагранжево подмногообразие односвязного симплектического многообразия и $\gamma \subset S$ – некоторая гладкая петля. Так как объемлющее симплектическое многообразие односвязно, то существует диск $D \subset M$, граница которого совпадает с γ :

$$\partial D = \gamma.$$

Топологически диски с границами на S представляют собой элементы группы $\pi_2(M, S; \mathbb{Z})$, поэтому для данной фиксированной петли γ пространство таких дисков дискретизировано соответствующими целочисленными данными.

Тогда для любой почти комплексной структуры I , согласованной с ω , можно сравнить две тривиализации антиканонического линейного расслоения K^{-1} , ограниченного на γ , а именно:

- А) каноническую тривиализацию, определенную подробно в разделе 2;
- Б) тривиализацию, взятую над диском D и затем ограниченную на границу этого диска.

¹⁾Конечно, индекс Маслова определен для произвольного лагранжева подмногообразия, но поскольку мы работаем здесь с бор-зоммерфельдовыми лагранжевыми подмногообразиями, которые обязаны быть ориентируемыми, мы используем здесь облегченную версию.

Сравнение тривиализаций над γ индуцирует отображение

$$\phi: \gamma \rightarrow U(1),$$

и степень этого отображения дает некоторый численный индекс, называемый индексом Маслова. Он зависит только от гомотопического типа петли и гомотопического типа диска, закодированных в соответствующем элементе группы $\pi_2(M, S, \mathbb{Z})$, т.е. отображение зависит не только от класса петли самого по себе, но и дополнительно от класса диска с границей, совпадающей с этой петлей. Таким образом, конструкция определяет отображение

$$\mu: \pi_2(M, S; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z},$$

и ключевым является тот факт, что топологический тип этого отображения не зависит от выбора почти комплексной структуры, определяющей тривиализацию A , и является инвариантом лагранжевых деформаций $S \subset M$. Таким образом, получаем симплектический инвариант (см. [2]).

Для сравнения индекса Маслова с универсальным классом Маслова в частном случае, изучаемом в настоящей работе, переведем определение индекса Маслова на язык связностей. При этом тривиализация “А” заменяется на каноническую тривиальную связность $A_0 \in \mathcal{A}_h(K^1|_S)$; вместо тривиализации “Б” рассматривается плоская эрмитова связность $A_f \in \mathcal{A}_h(K^{-1}|_D)$, существующая над D и единственная с точностью до калибровочных преобразований. Таким образом, ограничивая рассмотрение на выбранную петлю $\gamma \subset S$, получаем две тривиальные связности $A_0|_\gamma, A_f|_\gamma \in \mathcal{A}_h(K^{-1}|_\gamma)$ связанные калибровочным преобразованием, и степень этого преобразования дает значение индекса Маслова для пары (γ, D) . Эквивалентным образом это значение выражается формулой

$$\mu([\gamma, D]) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (A_f|_\gamma - A_0|_\gamma) \in \mathbb{Z}.$$

Проиллюстрируем определение следующим утверждением, доказательство которого очевидным образом вытекает из определения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $S \subset M$ – ориентируемое лагранжево подмногообразие односвязного симплектического многообразия, и пара (γ, D) такая, что $\gamma \subset S$, $D \subset M$ и $\partial D = \gamma$, представляет элемент $[\gamma, D] \in \pi_2(M, S, \mathbb{Z})$. Тогда ее индекс Маслова $\mu([\gamma, D])$ тривиален, если и только если для любой согласованной почти комплексной структуры I существует плоская эрмитова связность $A_f \in \mathcal{A}_h(K^{-1}|_D)$ такая, что

$$A_f|_\gamma = A_0|_\gamma,$$

где A_0 – каноническая тривиальная связность, индуцируемая I .

Иными словами, индекс Маслова тривиален, если и только если каноническая тривиальная связность A_0 может быть продолжена с γ до плоской связности на D .

Теперь вернемся к случаю бор-зоммерфельдовых подмногообразий псевдоэйнштейнова симплектического многообразия. Имеет место следующая геометрическая

интерпретация универсального класса Маслова, выглядящая аналогично предыдущему свойству индекса Маслова.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $S \subset M$ – бор-зоммерфельдово лагранжево подмногообразие односвязного псевдоэйнштейнова симплектического многообразия с универсальным классом Маслова $m_S \in H^1(S, \mathbb{Z})$, и пусть $\gamma \in S$ – гладкая петля в S , представляющая класс $[\gamma] \in H_1(S, \mathbb{Z})$. Тогда $m_S([\gamma]) = 0$, если и только если для любого диска $D \subset M$, $\partial D = \gamma$, и любой согласованной почти комплексной структуры I существует связность $A \in \mathcal{A}_h(K^{-1}|_D)$ такая, что $F_A = -2\pi i k \omega|_D$ и $A|_\gamma = A_0|_\gamma$, где $A_0 \in \mathcal{A}_h(K^{-1}|_S)$ – каноническая тривиальная связность на S .

Иными словами, универсальный класс Маслова зануляется на петле $\gamma \subset S$, если, но не только если, эта петля заклеивается диском, и если и только если пара $(\gamma, A_0|_\gamma)$ (часто называемая *суперциклом*) может быть продолжена до пары $(D, A \in \mathcal{A}_h(K^{-1}|_D))$ так, что $F_A = -2\pi i k \omega|_D$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $m_S([\gamma]) = 0$. Это означает, что для любой почти комплексной структуры I найдется определяющая связность $a \in \mathcal{A}_h(K^{-1})$ с кривизной $F_a = -2\pi i k \omega$ такая, что разность

$$a|_\gamma - A_0|_\gamma = 2\pi i \rho$$

есть чисто мнимая замкнутая 1-форма с тривиальным интегралом по γ :

$$\int_\gamma \rho = 0$$

(так как это в точности значение класса Маслова на $[\gamma]$). Отсюда следует, что 1-форма ρ точна, и существует вещественная гладкая функция f такая, что

$$df = \rho.$$

Для любого диска D , лежащего внутри γ , существует продолжение функции f с границы $\partial D = \gamma$, что определяет гладкую функцию F на всем диске D . Тогда требуемая связность A на D доставляется формулой

$$A = a|_D - 2\pi i dF \in \mathcal{A}_h(K^{-1}|_D).$$

В обратную сторону, зафиксируем произвольные I и D и для этой пары рассмотрим связность $A \in \mathcal{A}_h(K^{-1}|_D)$, существующую по условию. В то же время рассмотрим произвольную определяющую связность $a \in \mathcal{A}_h(K^{-1})$ над всем M . Так как диск односвязен, а кривизны $a|_D$ и A совпадают, эти связности калибровочно эквивалентны. Отсюда

$$\rho = \frac{1}{2\pi i}(a|_D - A)$$

задает точную вещественную 1-форму. По условию $A|_\gamma = A_0|_\gamma$, следовательно, значение класса Маслова m_S на цикле $[\gamma]$ может быть вычислено по формуле

$$m_S([\gamma]) = \int_\gamma \rho = \int_\gamma df = 0,$$

что завершает доказательство.

Итак, мы видим разницу между индексом Маслова и универсальным классом Маслова: первый отвечает за продолжение до плоской связности над заданным диском, в то время как второй отвечает за продолжение до связности с “гармонической” формой кривизны. Рассуждения, использованные для доказательства последнего предложения, показывают, что они связаны очень простым соотношением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *В изучаемом случае для произвольной пары (γ, D) имеет место равенство*

$$\mu([\gamma, D]) - m_S([\gamma]) = k \int_D \omega. \quad (4)$$

Особенность условия Бора–Зоммерфельда заключается в том, что для бор–зоммерфельдовых лагранжевых подмногообразий симплектическая площадь, умноженная на k , является целочисленной функцией на $\pi_2(M, S; \mathbb{Z})$. Если k равно нулю, что соответствует случаю топологически тривиального антиканонического класса, то универсальный класс Маслова совпадает с индексом Маслова, а последний, в свою очередь, не зависит от выбора D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем согласованную почти комплексную структуру I и рассмотрим три эрмитовы связности: каноническую тривиальную связность $A_0 \in \mathcal{A}_h(K^{-1}|_S)$, плоскую связность $A_f \in \mathcal{A}_h(K^{-1}|_D)$ и некоторую определяющую связность $a \in \mathcal{O}_{k \cdot \omega} \subset \mathcal{A}_h(K^{-1})$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_D k\omega &= \frac{1}{2\pi i} \int_D d(A_f - a|_D) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (A_f|_\gamma - A_0|_\gamma + A_0|_\gamma - a|_\gamma) = \mu([\gamma, D]) - m_S([\gamma]), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

С другой стороны, формула (4) подсказывает еще одну интерпретацию универсального класса Маслова. Она касается монотонных лагранжевых подмногообразий. Понятие монотонности для лагранжевых подмногообразий было введено в [8] и играет важную роль в исследованиях когомологий Флоера. Лагранжево подмногообразие называется *монотонным*, если индекс Маслова и симплектическая площадь пропорциональны друг другу как классы на $\pi_2(M, S; \mathbb{Z})$:

$$\mu([\gamma, D]) = \lambda \int_D \omega \quad \forall (\gamma, D) \in \{\gamma \subset S, D \subset M, \partial D = \gamma\}$$

с некоторым фиксированным $\lambda \in \mathbb{R}$, называемым *коэффициентом монотонности* [8]. Здесь мы приводим простое

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Бор–зоммерфельдово лагранжево подмногообразие компактного односвязного псевдоэйнштейнова симплектического многообразия является монотонным, если и только если его универсальный класс Маслова тривиален.*

Из соотношения (4) очевидно, что если универсальный класс Маслова m_S тривиален, то S должно быть монотонным.

Предположим теперь, что бор-зоммерфельдово лагранжево подмногообразие является монотонным. Из этого следует, что для любой пары (γ, D) значение универсального класса Маслова на $[\gamma]$ пропорционально симплектической площади D :

$$m_S([\gamma]) = (\lambda - k) \int_D \omega, \quad (5)$$

где λ – коэффициент монотонности, и это должно выполняться для любого D для фиксированной петли γ . Противоречие возникает из-за того, что левая часть (5) не зависит от D . Это означает, что для фиксированной петли γ симплектическая площадь всех дисков с одной и той же границей γ должна быть одинакова. Но в компактном односвязном случае нетрудно найти пару разных дисков D с разными симплектическими площадями. Это возможно вследствие того, что любое компактное симплектическое многообразие имеет нетривиальные вторые когомологии, и класс когомологий симплектического многообразия положителен. Отсюда равенство (5) возможно, если и только если $\lambda = k$ и, эквивалентно, $m_S([\gamma])$ тривиально. Так как те же рассуждения применимы к любой петле, универсальный класс Маслова тривиален.

Таким образом, в компактном случае универсальный класс Маслова является препятствием к монотонности бор-зоммерфельдовых лагранжевых подмногообразий.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если S – односвязное ориентируемое лагранжево подмногообразие компактного односвязного псевдоэйнштейнова симплектического многообразия, то S всегда монотонно.*

В самом деле, любое односвязное ориентируемое лагранжево подмногообразие является бор-зоммерфельдовым, и так как $\pi_1(S)$ тривиальна, то универсальный класс Маслова тоже тривиален.

4. СЛУЧАЙ КЭЛЕРА–ЭЙНШТЕЙНА

Рассмотрим теперь следующую ситуацию: пусть (M, ω) – односвязное псевдоэйнштейново многообразие, $S \subset M$ – бор-зоммерфельдово лагранжево подмногообразие; предположим, что (M, ω) допускает существование метрик Кэлера–Эйнштейна. Это означает, что существуют интегрируемые комплексные структуры, согласованные с нашей симплектической формой ω , и, более того, соответствующие кэлеровы метрики имеют одну и ту же форму Риччи, пропорциональную ω [9]. Случай лагранжевых вложений в кэлеровы многообразия изучался в [4], где было установлено, что классическое определение класса Маслова из [1] может быть непосредственно обобщено на случай лагранжевых вложений, удовлетворяющих некоторому сильному условию: ограничение на $S \subset M$ детерминантной связности Леви-Чивитта a_{LC} является плоским и тривиальным (допускает ковариантно постоянные сечения) [4]. Для такого лагранжева подмногообразия определена фаза

$$g_S: S \rightarrow U(1),$$

которая определяет фазовое преобразование, переводящее $a_{LC}|_S$ в A_0 , и класс Маслова задается формулой

$$H^1(S, \mathbb{Z}) \ni m_S = g_S^* h, \quad h \in H^1(U(1), \mathbb{Z}),$$

детали см. в [4].

Обозначим как $\mathcal{I}$ многообразие модулей метрик Кэлера–Эйнштейна на M и рассмотрим некоторый его элемент I . В этом случае для бор-зоммерфельдова лагранжева подмногообразия $S \subset M$ условия плоскости и тривиальности для детерминантной метрики Леви-Чивитта a_{LC} , индуцируемой I , выполнены автоматически. Нетрудно видеть, что имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Класс Маслова $m_S = m_S(I)$, индуцируемый комплексной структурой I , совпадает с универсальным классом Маслова.*

В самом деле, для метрики Кэлера–Эйнштейна детерминантная связность Леви-Чивитта $a_{LC} \in \mathcal{A}_h(K^{-1})$ принадлежит орбите $\mathcal{O}_{k,\omega}$, определенной в разделе 1, поэтому a_{LC} может рассматриваться как определяющая связность a конструкции раздела 2. Тогда класс одномерных когомологий является одним и тем же по определению.

Но универсальный класс Маслова не зависит от выбора (почти) комплексной структуры, откуда следует, что класс Маслова из [4] один и тот же для всех элементов $\mathcal{I}$. Далее, как было установлено в [4], этот класс в случае Кэлера–Эйнштейна является препятствием к возможности гамильтоновой деформации до минимального лагранжева подмногообразия. В качестве следствия получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Пусть (M, ω) – односвязное псевдоэйнштейново симплектическое многообразие и $S \subset M$ – бор-зоммерфельдово лагранжево подмногообразие с нетривиальным универсальным классом Маслова $H^1(S, \mathbb{Z}) \ni m_S \neq 0$. Тогда на M не существует метрики Кэлера–Эйнштейна такой, что S минимально относительно этой метрики.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого утверждения очевидно.

С другой стороны, формула (4), представленная в разделе 3, может быть переписана для случая Кэлера–Эйнштейна. Для петли $\gamma \subset S \subset M$ на бор-зоммерфельдовом лагранжевом подмногообразии S многообразия Кэлера–Эйнштейна M имеем

$$\mu([\gamma, D]) = \int_{\gamma} v_S + k \int_D \omega, \quad (4')$$

где $D \subset M$ – диск, ограничиваемый γ , и v_S – средняя кривизна S , которая в этом случае является замкнутой формой. Ее класс когомологий совпадает с $m_S(I)$ [4]. Отметим, что последняя формула может быть также выведена из фундаментального соотношения

$$\mu([\gamma, D]) = \int_{\gamma} v_S - \int_D \rho,$$

справедливого для любой кэлеровой метрики с тензором Риччи ρ (см. статью Карасева [10] и библиографию, приведенную в этой статье). Таким образом, можно конкретизировать предложение 6 для случая многообразий Кэлера–Эйнштейна.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Пусть $S \subset M$ – ориентируемое лагранжево подмногообразие многообразия Кэлера–Эйнштейна. Тогда оно монотонно, если и только если его средняя кривизна v_S является точной формой.

Доказательство исходит из равенства (4') и использует те же аргументы, что и доказательство предложения 6. Снова имеем следствие, аналогичное следствию 1 из предыдущего раздела.

СЛЕДСТВИЕ 2. Односвязное ориентируемое лагранжево подмногообразие $S \subset M$ многообразия Кэлера–Эйнштейна является монотонным.

В самом деле, для любого ориентируемого односвязного лагранжева подмногообразия средняя кривизна должна быть точной, так как пространство первых когомологий тривиально. Это уничтожает одно из слагаемых в формуле (4'), после чего она превращается в условие монотонности.

Благодарности. Автор хотел бы поблагодарить Д. Орлова и Д. Уру за полезные обсуждения и замечания. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты № 05-01-01086, 05-01-00455).

Список литературы

- [1] В. И. Арнольд, А. Г. Гивенталь, *Симплектическая геометрия*, УдГУ, Ижевск, 2000.
- [2] М. В. Карасев, В. П. Маслов, *Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование*, Наука, М., 1991.
- [3] K. Fukaya, *Morse homotopy, A^∞ -category and Floer homologies*, MSRI Preprint № 020-94, MSRI, Berkeley, 1994; “Morse homotopy, A^∞ -category and Floer homologies”, *Proc. GARC Workshop on Geometry and Topology'93* (Seoul, Korea, 1993), Lecture Notes Ser. Seoul, **18**, Seoul National Univ., Seoul, 1993, 1–102.
- [4] N. A. Tyurin, *Maslov class of lagrangian embedding to Kahler manifold*, [math.SG/0602330](#).
- [5] S. Donaldson, P. Kronheimer, *The Geometry of Four-Manifolds*, Clarendon Press, Oxford, 1990.
- [6] А. Л. Городенцев, А. Н. Тюрин, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **65**:3 (2001), 15–50.
- [7] Н. А. Тюрин, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:3 (2002), 175–196.
- [8] Y.-G. Oh, *Commun. Pure Appl. Math.*, **46** (1993), 949–993.
- [9] P. Griffiths, J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley, N.Y., 1978.
- [10] M. V. Karasev, *Russ. J. Math. Phys.*, **3**:3 (1995), 393–400.