Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Олшанецкий, Эллиптическая гидродинамика и квадратичные алгебры векторных полей на торе, *ТМФ*, 2007, том 150, номер 3, 355–370

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf5984>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 12:32:33

ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ ГИДРОДИНАМИКА И КВАДРАТИЧНЫЕ АЛГЕБРЫ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ НА ТОРЕ

Построена квадратичная алгебра Пуассона на гамильтоновых функциях на двумерном торе, которая согласована с канонической пуассоновой структурой. Эта алгебра представляет собой бесконечномерное обобщение классических алгебр Складина–Фейгина–Одесского и приводит к интегрируемой модификации двумерной гидродинамики идеальной жидкости на торе. Гамильтониан стандартной двумерной гидродинамики задается оператором Лапласа и потому зависит от метрики. Новый гамильтониан, полученный при замене оператора Лапласа на зависящий от комплексной структуры псевдодифференциальный эллиптический оператор, оказывается представителем коммутативной бигамильтоновой иерархии. В заключение строится биалгеброид Ли векторных полей на торе.

Ключевые слова: уравнение Эйлера гидродинамики идеальной жидкости, квадратичные алгебры Пуассона.

1. ВВЕДЕНИЕ

Гидродинамика идеальной несжимаемой жидкости на двумерной поверхности, как известно, представляет собой неинтегрируемую систему. Даже 4-вихревое приближение динамики идеальной жидкости оказывается неинтегрируемым [1]. В работе [2] нами были описаны интегрируемые версии гидродинамики на двумерном торе. Классическое уравнение Эйлера движения идеальной жидкости имеет вид

$$\partial_t \mathbf{S} = \{\mathbf{S}, \Delta^{-1} \mathbf{S}\},$$

где $\mathbf{S}$ – функция завихренности потока жидкости, $\{\cdot, \cdot\}$ – каноническая скобка Пуассона и Δ – оператор Лапласа. Модифицированная и эллиптическая гидродинамики определены на эллиптической кривой, т.е. на торе с фиксированной комплексной структурой. Соответствующие уравнения записываются как

$$\partial_t \mathbf{S} = \{\mathbf{S}, \bar{\partial}^{-2} \mathbf{S}\}, \quad \partial_t \mathbf{S} = \{\mathbf{S}, \wp(\bar{\partial}) \mathbf{S}\},$$

*Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.
E-mail: olshanet@itep.ru

где $\bar{\partial}$ – оператор, зависящий от комплексной структуры, а $\wp$ – функция Вейерштрасса.

Такая модификация оператора инерции жидкости, в которой оператор Лапласа $\Delta = \partial\bar{\partial}$, зависящий от метрики на T^2 , заменяется на зависящие от комплексной структуры на T^2 операторы $\bar{\partial}^2$ или $\wp(\bar{\partial})^{-1}$, приводит к интегрируемости и даже к бигамильтоновости соответствующей системы. Оказывается, что при этом возникает бесконечное семейство интегралов движения в инволюции относительно двух скобок Пуассона. Одна из скобок представляет собой стандартную линейную скобку Пуассона–Ли на пространстве, дуальном к алгебре бездивергентных векторных полей на T^2 . Другая пуассонова структура есть квадратичная алгебра Пуассона на гамильтонианах векторных полей. Эти две скобки оказываются совместными и задаются одной и той же классической r -матрицей. Квадратичная пуассонова алгебра представляет собой при этом бесконечномерный аналог классической алгебры Складина–Фейгина–Одесского [3]. Более того, существует последовательность коммутирующих гамильтонианов, подчиняющихся этой линейно-квадратичной бигамильтоновой структуре иерархии эллиптической гидродинамики, которая тем самым проявляет интегрируемость в сильнейшей форме.

Согласованные скобки Пуассона приводят к построению биалгеброида Ли [4] над пространством гамильтонианов на торе. Скобки, канонически определенные на сечениях биалгеброида, приводят к квадратичным алгебрам векторных полей на двумерном торе. Можно описать структуру биалгеброида в терминах бесконечномерного аналога классической эллиптической матрицы типа Белафина–Дринфельда [5].

Раздел 3 базируется на результатах, полученных в работе [2]. В этой же работе можно найти доказательства утверждений.

2. ДВУМЕРНАЯ ГИДРОДИНАМИКА ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

2.1. Алгебра Ли векторных полей. Пусть M – двумерная ориентируемая поверхность с заданной на ней два-формой ω . Рассмотрим векторное поле $\mathbf{v} = V^\alpha \partial_\alpha$, $\alpha = 1, 2$, на M и обозначим через $\mathcal{L}_\mathbf{v} = d\iota_\mathbf{v} + \iota_\mathbf{v}d$ производную Ли, где $\iota_\mathbf{v}$ – оператор свертки. Дивергенция $\text{div}(\mathbf{v})$ поля $\mathbf{v}$ представляет собой два-форму $d\iota_\mathbf{v}\omega$, или, локально,

$$\text{div}(\mathbf{v}) = \epsilon^{\gamma\beta} \partial_\gamma V^\alpha \omega_{\alpha\beta}.$$

Векторное поле $\mathbf{v}$ называется бездивергентным, если $\text{div}(\mathbf{v}) = 0$. Поскольку два-форма ω замкнута, $d\omega = 0$, бездивергентность $\mathbf{v}$ означает, что векторное поле сохраняет форму, $\mathcal{L}_\mathbf{v}\omega = 0$. Бездивергентные векторные поля на M образуют алгебру Ли:

$$\text{SVect}(M) = \{\mathbf{v} \mid \mathcal{L}_\mathbf{v}\omega = 0, \quad V^\alpha \in C^\infty(M)\}. \quad (2.1)$$

Из (2.1) следует, что локально существует функция $\psi_\mathbf{v}$ такая, что $\iota_\mathbf{v}\omega = d\psi_\mathbf{v}$ или $V^\alpha \omega_{\alpha\beta} = \partial_\beta \psi$. Функция $\psi_\mathbf{v}$ называется *функцией потока*. Глобально можно добавить к $d\psi_\mathbf{v}$ замкнутую один-форму $\alpha \in H^1(M)$, $d\alpha = 0$, $\alpha \neq df$. Векторное поле называется *гамильтоновым*, если один-форма $\iota_\mathbf{v}\omega$ точна. Обозначим через

$\text{SVect}^h(M)$ подпространство гамильтоновых векторных полей и через $\text{Ham}(M) = \{\psi\}$ – пространство гладких функций потока. Пространства $\text{SVect}(M)$ и $\text{Ham}(M)$ входят в точную последовательность

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \text{Ham}(M) \rightarrow \text{SVect}(M) \rightarrow H^1(M) \rightarrow 0.$$

Пусть $\{\gamma_a, a = 1, \dots, 2g\}$ – базис одномерных гомологий $H_1(M)$. Тогда отображение $\text{SVect}(M) \rightarrow H^1(M)$ задается потоками

$$\mathbf{v} \rightarrow \int_{\gamma_a} \iota_{\mathbf{v}} \omega.$$

Таким образом, $\text{SVect}(M)/\text{SVect}^h(M) \sim H^1(M)$ и $\text{SVect}^h(M) \sim \text{Ham}(M)/\mathbb{C} = \text{Ham}^0(M)$. В дальнейшем рассматривается $\text{Ham}^0(M)$.

Пространства $\text{Ham}(M)$ и $\text{Ham}^0(M)$ являются алгебрами Ли по отношению к скобкам Пуассона

$$\{\psi_{\mathbf{v}}, \psi_{\mathbf{u}}\} = \iota_{\mathbf{u}} \iota_{\mathbf{v}} \omega. \quad (2.2)$$

Имеют место следующие соотношения между алгебрами $\text{SVect}^h(M)$ и $\text{Ham}(M)$:

$$\{\psi_{\mathbf{u}}, \psi_{\mathbf{v}}\} = \psi_{[\mathbf{v}, \mathbf{u}]} + c(\mathbf{v}, \mathbf{u}), \quad (2.3)$$

где $c(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ – центральное расширение $\text{SVect}(M)$. Чтобы доказать это, рассмотрим следующую цепочку тождеств:

$$\iota_{[\mathbf{v}, \mathbf{u}]} \omega = \mathcal{L}_{\mathbf{v}} \iota_{\mathbf{u}} \omega = (\iota_{\mathbf{v}} d + d \iota_{\mathbf{v}}) \iota_{\mathbf{u}} \omega = d \iota_{\mathbf{v}} \iota_{\mathbf{u}} \omega.$$

Отсюда следует, что $d\psi_{[\mathbf{v}, \mathbf{u}]} = d\{\psi_{\mathbf{v}}, \psi_{\mathbf{u}}\}$. Разность $\psi_{[\mathbf{v}, \mathbf{u}]} - \{\psi_{\mathbf{v}}, \psi_{\mathbf{u}}\}$ тем самым равна константе $c(\mathbf{v}, \mathbf{u})$. Условие коцикла следует из тождеств Якоби для алгебры Пуассона и для алгебры Ли векторных полей.

Определим коалгебру Ли обобщенных функций на $\text{Ham}^0(M)$:

$$\text{Ham}^{0*}(M) = \left\{ \mathbf{S} \mid \langle \psi, \mathbf{S} \rangle := \int_M \omega(\psi \mathbf{S}) < \infty \right\}.$$

ЛЕММА. Коприсоединенное действие $\text{Ham}^0(M)$ на $\text{Ham}^{0*}(M)$ имеет вид

$$\text{ad}_{\psi}^* \mathbf{S} = -\{\psi, \mathbf{S}\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С помощью прямых вычислений получим

$$\int_M \{\psi_{\mathbf{v}}, \psi_{\mathbf{u}}\} \mathbf{S} \omega = \int_M U^{\alpha} \partial_{\alpha} \psi_{\mathbf{v}} \mathbf{S} \omega = - \int_M \psi_{\mathbf{v}} U^{\alpha} (\partial_{\alpha} \mathbf{S}) \omega - \int_M \psi_{\mathbf{v}} \mathbf{S} \partial_{\alpha} (U^{\alpha} \omega).$$

Первый член представляет собой искомые скобки Пуассона, а второй член обращается в нуль в силу (2.1).

Коалгебра Ли $\text{Ham}^{0*}(M)$ снабжена стандартными линейными скобками Пуассона–Ли. Пусть $\nabla f(\mathbf{S}) \in \text{Ham}^0(M)$ – градиент функционала f . Тогда скобка Пуассона–Ли принимает вид

$$\{f(\mathbf{S}), g(\mathbf{S})\} = \int_M \omega \{ \nabla f(\mathbf{S}), \nabla g(\mathbf{S}) \} \mathbf{S}. \quad (2.4)$$

Она вырождена на $\text{Ham}^{0*}(M)$ и обладает бесконечным набором функционалов Казимира. Например, в плоском случае

$$C_k = \int_M \omega \mathbf{S}^k. \quad (2.5)$$

Однако на коприсоединенных орбитах группы $\text{SDiff}(M)$ диффеоморфизмов, сохраняющих форму ω , скобка не вырождена.

2.2. Уравнения Эйлера. Пусть $\mathbf{v}$ – бездивергентное векторное поле, а p – давление. В плоском пространстве M уравнение Эйлера для $\mathbf{v}$ имеет следующий вид [6]:

$$\partial_t \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \text{grad } p.$$

Для завихренности $\text{rot } \mathbf{v}$ его можно переписать как

$$\partial_t \text{rot } \mathbf{v} = \text{rot}(\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}). \quad (2.6)$$

В двумерном случае $\mathbf{S} = \text{rot } \mathbf{v} = \partial_1 V^2 - \partial_2 V^1$ представляет собой функцию на M , а выражение (2.6) принимает вид

$$\partial_t \mathbf{S} = \{\mathbf{S}, \psi\},$$

где ψ – функция потока ($\partial_1 \psi = -V^2$, $\partial_2 \psi = V^1$). Из определений полей $\psi_{\mathbf{v}}$ и $\mathbf{S}(\mathbf{v})$ следует, что

$$\mathbf{S} = \Delta \psi, \quad (2.7)$$

где Δ – оператор Лапласа.

Рассмотрим теперь двумерную поверхность M с римановой метрикой

$$g = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta,$$

задающей отображение $\mathcal{C}$ векторных полей $\{\mathbf{v} = V^\alpha \partial_\alpha\}$ на M в пространство один-форм:

$$\mathcal{C}: \Gamma \rightarrow \Omega^1(M), \quad \mathcal{C}(\mathbf{v}) = V^\alpha g_{\alpha\beta} dx^\beta.$$

Пусть $*$ – операция Ходжа на M по отношению к форме объема $\omega = \sqrt{\det g} dx^1 \wedge dx^2$. Операция rot представляет собой отображение

$$\text{rot}: \Gamma \rightarrow C^\infty(M), \quad \mathbf{S} = \text{rot } \mathbf{v} = *d\mathcal{C}(\mathbf{v}) = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \epsilon^{\gamma\beta} \partial_\gamma V^\alpha g_{\alpha\beta}. \quad (2.8)$$

Напомним, что функция потока задается соотношением $d\psi_{\mathbf{v}} = \iota_{\mathbf{v}}\omega$. Из выражения (2.8) следует, что функция потока и завихренность связаны тем же соотношением (2.7) с оператором Δ , замененным на оператор Бельтрами–Лапласа на M :

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \partial_a g^{ab} \sqrt{\det g} \partial_b. \quad (2.9)$$

Из соотношения (2.7) следует, что $\mathbf{S} \in \text{Ham}^{0*}(M)$.

Уравнение Эйлера на произвольном римановом многообразии M имеет вид

$$\partial_t \mathbf{S} = \{\mathbf{S}, \Delta^{-1} \mathbf{S}\} = \frac{1}{\det^{1/2} g} (\partial_1 \mathbf{S} \partial_2 \Delta^{-1} \mathbf{S} - \partial_1 \Delta^{-1} \mathbf{S} \partial_2 \mathbf{S}) \quad (2.10)$$

и, таким образом, определено на коалгебре $\text{Ham}^{0*}(M)$ и зависит от метрики g на M . Оно имеет гамильтонов вид по отношению к скобкам (2.4) на $\text{Ham}^{0*}(M)$ с гамильтонианом

$$H = -\frac{1}{2} \int_M (\Delta^{-1} \mathbf{S}) \mathbf{S} \omega. \quad (2.11)$$

2.3. Волчок Эйлера–Арнольда. Уравнение Эйлера можно привести к общему виду, называемому уравнением волчка Эйлера–Арнольда [6], [7].

Пусть G – группа Ли, а $\mathfrak{g}$ – ее алгебра Ли. Рассмотрим обратимый линейный оператор $\mathbf{J}$, который отображает коалгебру $\mathfrak{g}^*$ в $\mathfrak{g}$. Обратный к нему оператор $\mathbf{J}^{-1}$ называется *тензором инерции*. Волчок Эйлера–Арнольда, отвечающий группе G , представляет собой гамильтонову систему на $\mathfrak{g}^*$ по отношению к линейным скобкам Пуассона–Ли на $\mathfrak{g}^*$ с гамильтонианом, задаваемым квадратичной формой:

$$H = -\frac{1}{2} \langle \mathbf{S}, \mathbf{J}(\mathbf{S}) \rangle, \quad \mathbf{S} \in \mathfrak{g}^*, \quad (2.12)$$

где через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначено спаривание между $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$. Градиент ∇H можно рассматривать, как элемент $\mathfrak{g}$, а соответствующие гамильтоновы уравнения движения принимают при этом вид

$$\partial_t \mathbf{S} = \{H, \mathbf{S}\} := \text{ad}_{\nabla H}^* \mathbf{S}, \quad \nabla H = \mathbf{J}(\mathbf{S}). \quad (2.13)$$

Напомним, что скобки Пуассона–Ли вырождены на $\mathfrak{g}^*$, а их симплектические листы суть коприсоединенные орбиты группы G . Чтобы оказаться на определенной коприсоединенной орбите $\mathcal{O}$, надо зафиксировать значения операторов Казимира для линейной скобки.

В случае двумерной гидродинамики $G \subset \text{SDiff}(M)$, гамильтониан (2.11) представляет собой функционал на коалгебре Ли $\text{Ham}^{0*}(M)$, а тензор инерции задается оператором Бельтрами–Лапласа $\mathbf{J}^{-1} = \Delta: \text{Ham}^0(M) \rightarrow \text{Ham}^{0*}(M)$ (2.9), зависящим от метрики g . Из леммы следует, что правая часть уравнения движения (2.10) принимает вид коприсоединенного действия (см. (2.13)).

3. ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ ГИДРОДИНАМИКА

При специальном выборе $\mathbf{J}$ система Эйлера–Арнольда становится вполне интегрируемой. Зафиксируем комплексную структуру на M .

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ. *Существует мероморфная функция $f(z)$ на M такая, что волчок Эйлера–Арнольда на $\text{SDiff}(M)$ становится интегрированным для обратного оператора инерции $\mathbf{J}$, определенного как псевдодифференциальный оператор $f(\bar{\partial})$:*

$$\psi(x) = \mathbf{J}(\mathbf{S})(x) = f(\bar{\partial})\mathbf{S}(x), \quad x \in M.$$

Докажем эту гипотезу для двумерного тора, выбирая $f(z) = \wp(z)$ – функции Вейерштрасса.

3.1. Алгебра Пуассона–Ли на торе. Рассмотрим двумерный тор

$$M = T^2 = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}), \quad T^2 = \{(x_1, x_2), 0 < x_j \leq 1\}.$$

Пусть

$$\tilde{\mathbb{Z}}^{(2)} = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2), \alpha_j \in \mathbb{Z}, \alpha \neq (0, 0)\} \quad (3.1)$$

– двумерная решетка с выколотым началом отсчета и

$$T_\alpha = \mathbf{e}(\alpha \cdot x) = e^{2\pi i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)}, \quad \alpha \in \tilde{\mathbb{Z}}^{(2)}, \quad (3.2)$$

– базис Фурье в алгебре Ли функций потока:

$$\text{Ham}^0(T^2) = \left\{ \psi(x) = \sum_{\alpha \in \tilde{\mathbb{Z}}^{(2)}} c_\alpha T_\alpha \left| \sup_{\alpha} (1 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2)^k |c_\alpha|^2 < \infty, \quad k \in \mathbb{N} \right. \right\}. \quad (3.3)$$

Скобка Ли представляет собой просто каноническую скобку Пуассона на T^2 . В базисе Фурье она принимает вид

$$[T_\alpha, T_\beta] = (\alpha \times \beta) T_{\alpha+\beta}, \quad (\alpha \times \beta = \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1).$$

Коалгебра $\text{Ham}^{0*}(T^2)$ задается пространством обобщенных функций на $\text{Ham}^0(T^2)$,

$$\text{Ham}^{0*}(T^2) = \left\{ \mathbf{S} \left| \langle \psi, \mathbf{S} \rangle = \int_{T^2} dx_1 dx_2 (\psi \mathbf{S}) < \infty, \quad \psi \in \text{Ham}^0(T^2) \right. \right\}.$$

Структура Пуассона–Ли на $\text{Ham}^{0*}(T^2)$ имеет канонический вид

$$\{\mathbf{S}, \mathbf{S}'\}_1 = \partial_{x_1} \mathbf{S} \partial_{x_2} \mathbf{S}' - \partial_{x_1} \mathbf{S}' \partial_{x_2} \mathbf{S},$$

или

$$\{S_\alpha, S_\beta\}_1 = (\alpha \times \beta) S_{\alpha+\beta}, \quad (3.4)$$

где $\mathbf{S} = \sum_{\alpha \in \tilde{\mathbb{Z}}^{(2)}} \mathbf{S}_\alpha T_\alpha$. Нижний индекс 1 означает, что рассматриваются линейные скобки.

3.2. Эллиптическая модификация двумерной гидродинамики. Введем комплексную структуру на T^2 . Пусть $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2)$, $0 < \epsilon_j < 1$, – два иррациональных числа. Рассмотрим комплексную координату на T^2

$$Z = -\frac{2\pi i}{\tau - \bar{\tau}} \left(\frac{\tau x_1}{\epsilon_1} - \frac{x_2}{\epsilon_2} \right), \quad \bar{Z} = -\frac{2\pi i}{\tau - \bar{\tau}} \left(\frac{\bar{\tau} x_1}{\epsilon_1} - \frac{x_2}{\epsilon_2} \right), \quad (3.5)$$

и соответствующий оператор $\partial_{\bar{Z}} = \bar{\partial}_{\epsilon, \tau}$. Заметим, что он действует на фурье-гармониках как $\bar{\partial}_{\epsilon, \tau} \mathbf{e}(\alpha \cdot x) = (\epsilon_1 \alpha_1 + \epsilon_2 \alpha_2 \tau) \mathbf{e}(\alpha \cdot x)$. Обозначим через E_τ тор T^2 с введенными комплексными координатами.

Определим обратный оператор инерции $\mathbf{J}: \text{Ham}^{0*}(T^2) \rightarrow \text{Ham}^0(T^2)$,

$$\mathbf{J}: S_\alpha \rightarrow \psi_\alpha = \wp_\epsilon(\alpha) S_\alpha, \quad \wp_\epsilon(\alpha) = \wp(\epsilon_1 \alpha_1 + \epsilon_2 \alpha_2 \tau; \tau),$$

где $\alpha \in \tilde{\mathbb{Z}}^{(2)}$ (см. (3.1)) и

$$\wp(u; \tau) = \frac{1}{u^2} + \sum'_{j,k} \left(\frac{1}{(j + k\tau + u)^2} - \frac{1}{(j + k\tau)^2} \right), \quad u \in E_\tau, \quad (3.6)$$

– функция Вейерштрасса на E_τ . Она представляет собой дважды периодическую функцию на E_τ с полюсом второго порядка в точке $u = 0$. Оператор хорошо определен, поскольку периоды ϵ_j иррациональны. Другими словами, оператор $\mathbf{J}$ представляет собой псевдодифференциальный оператор на T^2 :

$$\mathbf{J}: \mathbf{S}(x) \rightarrow \wp(\bar{\partial}_{\epsilon, \tau}) \mathbf{S}(x).$$

Уравнения движения задаются соответствующим квадратичным гамильтонианом (2.12)

$$H = -\frac{1}{2} \int_{T^2} \mathbf{S} \wp(\bar{\partial}_{\epsilon, \tau})(\mathbf{S}) = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \tilde{\mathbb{Z}}^{(2)}} \wp_\epsilon(\alpha) S_\alpha S_{-\alpha}$$

по отношению к линейным скобкам Пуассона на $\text{Ham}^{0*}(T^2)$:

$$\partial_t \mathbf{S} = \{\mathbf{S}, \wp(\bar{\partial}_{\epsilon, \tau}) \mathbf{S}\}_1. \quad (3.7)$$

В фурье-компонентах эти скобки имеют вид

$$\partial_t S_\alpha = \sum_{\gamma \in \tilde{\mathbb{Z}}^{(2)}} S_\gamma \wp_\epsilon(\alpha) S_{\alpha - \gamma}.$$

Будем называть эти уравнения *эллиптической гидродинамикой* на торе T^2 .

3.3. Представление Лакса и r -матрица. Пусть

$$\vartheta(z; \tau) = q^{1/8} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n e^{\pi i (n(n+1)\tau + 2nz)}$$

представляет собой нечетную тета-функцию, определенную эллиптической кривой $\tilde{E}_\tau = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$ ¹⁾. Рассмотрим на $E_\tau \times \tilde{E}_\tau$ функции

$$\begin{aligned}\phi(u, z) &= \frac{\vartheta(u+z)\vartheta'(0)}{\vartheta(u)\vartheta(z)}, \quad u \in E_\tau, \quad z \in \tilde{E}_\tau; \\ \varphi_\epsilon(\alpha, z) &= \mathbf{e}(\alpha_2 z) \phi(\epsilon_1 \alpha_1 + \tau \epsilon_2 \alpha_2, z), \quad \mathbf{e}(\alpha_2 z) = e^{2\pi i(\alpha_2 z)}.\end{aligned}$$

Из свойств $\vartheta(z; \tau)$ следует, что

$$\varphi_\epsilon(\gamma, z+1) = \mathbf{e}(\gamma_2) \varphi_\epsilon(\gamma, z), \quad \varphi_\epsilon(\gamma, z+\tau) = \mathbf{e}(-\gamma_1) \varphi_\epsilon(\gamma, z). \quad (3.8)$$

Определим оператор Лакса $f(x) \rightarrow \{L, f\}$:

$$L(x; z) = - \sum_{\alpha \in \tilde{\mathbb{Z}}^{(2)}} S_\alpha \varphi_\epsilon(\alpha, z) T_\alpha, \quad T_\alpha = \mathbf{e}(\alpha \cdot x) = e^{2\pi i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)}, \quad (3.9)$$

с действием Пуассона на пространстве гладких функций $\{f(x), x \in T^2\}$. Здесь $z \in \tilde{E}_\tau$ – спектральный параметр. На фазовом пространстве $\mathcal{R}^0$ эллиптической гидродинамики (см. ниже (3.14)) оператор $L(x, z)$ хорошо определен при $z \in \tilde{E}_\tau$, $z \neq 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Уравнения движения (3.7) допускают бездисперсионное представление Лакса*

$$L = \{L, M\}_1,$$

где L задается выражением (3.9) и

$$M(x; z) = - \sum_{\alpha \in \tilde{\mathbb{Z}}^{(2)}} S_\alpha f_\epsilon(\alpha, z) \mathbf{e}(\alpha \cdot x), \quad (3.10)$$

при этом

$$f_\epsilon(\alpha, z) = f(\epsilon_1 \alpha_1 + \tau \epsilon_2 \alpha_2, z) = \mathbf{e}(\epsilon_2 \alpha_2) \partial_u \phi(u, z)|_{u=\epsilon_1 \alpha_1 + \tau \epsilon_2 \alpha_2}.$$

Из (3.8) видно, что оператор L удовлетворяет условиям квазипериодичности:

$$L(x_1, x_2; z) = L(x_1 + \epsilon_2, x_2; z+1), \quad (3.11)$$

$$L(x_1, x_2; z) = L(x_1, x_2 - \epsilon_1; z+\tau). \quad (3.12)$$

Отсюда следует, что интегралы моментов $\int_{T^2} (L(x, z))^k$ оказываются дваждыпериодическими функциями на базисной спектральной кривой $\tilde{E}_\tau$. Тем самым они могут быть разложены по базису функции Вейерштрасса и ее производных:

$$\int_{T^2} (L(x, z))^k = I_{0,k} + \sum_{s=2}^k I_{s,k} \wp^{(s-2)}(z). \quad (3.13)$$

¹⁾Здесь $\tilde{E}_\tau$ – базисная спектральная кривая. Не следует ее путать с E_τ .

Фазовое пространство $\mathcal{R}^0$ эллиптической гидродинамики определено как²⁾

$$\mathcal{R}^0 = \left\{ \mathbf{S} \in \text{Ham}^{0*}(T^2) \mid I_{s,j} < \infty, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{I_{s,j+1}(\mathbf{S})}{I_{s,j}(\mathbf{S})} < 1, \quad s \leq j \right\}. \quad (3.14)$$

Определим r -матрицу на $T^2 \otimes T^2$ с помощью соотношения

$$r_{\epsilon,\tau}(x, y; z) = \sum_{\alpha \in \tilde{\mathbb{Z}}^{(2)}} \varphi_{\epsilon}(\alpha, z) \mathbf{e}(\alpha \cdot x) \mathbf{e}(-\alpha \cdot y), \quad z \in \tilde{E}_{\tau}, \quad x, y \in T^2. \quad (3.15)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. 1. r -Матрица (3.15) удовлетворяет “бездисперсионному” уравнению Янга–Бакстера:

$$\begin{aligned} & \{r_{\epsilon,\tau}(x, y; z - w), r_{\epsilon,\tau}(x, v; z)\}_1 + \{r_{\epsilon,\tau}(x, y; z - w), r_{\epsilon,\tau}(y, v; w)\}_1 + \\ & + \{r_{\epsilon,\tau}(x, v; z), r_{\epsilon,\tau}(y, v; w)\}_1 = 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

2. Каноническая скобка на T^2 в терминах оператора Лакса (3.9) принимает вид

$$\{L(x; z), L(y; w)\}_1 = \{r_{\epsilon,\tau}(x, y, z - w), L(x; z)\}_1 + \{r_{\epsilon,\tau}(x, y, z - w) L(y; w)\}_1. \quad (3.17)$$

Форма скобок (3.17) предполагает, что

$$\left\{ \int_{T^2} (L(x, z))^k, \int_{T^2} (L(x, z))^j \right\}_1 = 0.$$

В свою очередь, соотношение (3.13) генерирует бесконечный набор законов сохранения $I_{s,k}$, находящихся в инволюции. Они задают иерархию коммутирующих потоков:

$$\partial_{s,k} \mathbf{S} = \{I_{s,k}, \mathbf{S}\}_1. \quad (3.18)$$

Эти уравнения можно представить в виде бездисперсионных уравнений Лакса с соответствующими операторами $M_{s,k}$.

3.4. Квадратичная алгебра Пуассона и бигамильтонова структура на $\text{SDiff}(T^2)$. Оказывается, что иерархию (3.18) можно описать квадратичной скобкой Пуассона на том же фазовом пространстве. Для этого перейдем сначала от оператора Лакса L алгебры Ли к оператору, содержащему добавочный константный член

$$\tilde{L}(x; z) = -S_0 + L(x; z). \quad (3.19)$$

Зададим квадратичную алгебру Пуассона формулой

$$\{\tilde{L}(x; z), \tilde{L}(y; w)\}_2 = \{r_{\epsilon,\tau}(x, y; z - w), \tilde{L}(x; z) \tilde{L}(y; w)\}_1. \quad (3.20)$$

Свойство Якоби обеспечивается классическим уравнением Янга–Бакстера (3.16). Для построения алгебры следует убрать зависимость от спектрального параметра из формулы (3.20).

²⁾Из этих условий следует существование специальных классов сохраняющихся зарядов, описанных в предложении 3.5 работы [2].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. В терминах фурье-мод алгебра Пуассона (3.20) имеет вид

$$\{S_\alpha, S_0\}_2 = \sum_{\gamma \neq \alpha} S_{\alpha-\gamma} S_\gamma \wp_\epsilon(\gamma) (\alpha \times \gamma), \quad (3.21)$$

$$\{S_\alpha, S_\beta\}_2 = S_0 S_{\alpha+\beta} (\alpha \times \beta) + \sum_{\gamma \neq \alpha, -\beta} S_{\alpha-\gamma} S_{\beta+\gamma} \mathbf{f}_\epsilon(\alpha, \beta, \gamma) (\gamma \times (\alpha - \beta)), \quad (3.22)$$

где

$$\mathbf{f}_\epsilon(\alpha, \beta, \gamma) = -\frac{\vartheta'(0) \vartheta_\epsilon(\alpha) \vartheta_\epsilon(\beta) \vartheta_\epsilon(\beta - \alpha + 2\gamma)}{\vartheta_\epsilon(\alpha - \gamma) \vartheta_\epsilon(\beta + \gamma) \vartheta_\epsilon(\beta - \alpha + \gamma) \vartheta_\epsilon(\gamma)}, \quad (3.23)$$

$$\wp_\epsilon(\gamma) = \wp(\epsilon_1 \gamma_1 + \tau \epsilon_2 \gamma_2), \quad \vartheta_\epsilon(\gamma) = \vartheta(\epsilon_1 \gamma_1 + \tau \epsilon_2 \gamma_2). \quad (3.24)$$

Доказательство предложения основано на спектральных свойствах функций $\varphi_\epsilon(\alpha, z)$.

Важным свойством линейных и квадратичных скобок является их *согласованность*. Она означает, что существует семейство скобок Пуассона, параметризованных $\lambda \in \mathbb{C}P^1$:

$$\{\mathbf{S}, \mathbf{S}\}_\lambda := \lambda_1 \{\mathbf{S}, \mathbf{S}\}_1 + \lambda_2 \{\mathbf{S}, \mathbf{S}\}_2, \quad \lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}. \quad (3.25)$$

Чтобы доказать, что это выражение снова представляет собой скобку Пуассона, произведем замену $S_0 \rightarrow S_0 + \lambda$ в квадратичных скобках (3.21), (3.22). Тогда (3.21) не изменится, в то время как (3.22) приобретет дополнительный линейный член. Тем самым линейная комбинация $\{\mathbf{S}, \mathbf{S}\}_\lambda$ двух скобок может быть получена из квадратичной скобки простым сдвигом S_0 . Результат сдвига, разумеется, по-прежнему удовлетворяет тождеству Якоби, а потому представляет собой скобку Пуассона при любом λ .

Существование семейства скобок Пуассона на $\mathbb{C}P^1$ приводит к бигамильтоновой структуре [8] эллиптической гидродинамики.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Существует бесконечный набор сохраняющихся величин, коммутирующих между собой по отношению к обоим типам скобок,

$$h_{s,j}, \quad j = 0, 2, 3, \dots, \quad s = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.26)$$

задающих бигамильтонову структуру иерархии

$$\{h_{s,j}, \mathbf{S}\}_1 = -\{h_{s+1,j}, \mathbf{S}\}_2. \quad (3.27)$$

Мы не приводим здесь интегралы $h_{s,j}$ в явном виде (см. [2]). Как частное следствие (3.27), поток (3.7) может быть представлен как

$$\partial_t \mathbf{S} = \{S_0, \mathbf{S}\}_2.$$

3.5. Рациональный предел эллиптической гидродинамики. До сих пор рассматривалась только базисная спектральная кривая $\tilde{E}_\tau$, параметризованная двумя полупериодами $\omega_1, \omega_2, \tau = \omega_2/\omega_1$. Заменим наши основные функции на

$$\vartheta_\epsilon(\gamma) = \vartheta(\epsilon_1\gamma_1\omega_1 + \epsilon_2\gamma_2\omega_2; \omega_1, \omega_2), \quad \wp_\epsilon(\gamma) = \wp(\epsilon_1\gamma_1\omega_1 + \epsilon_2\gamma_2\omega_2; \omega_1, \omega_2). \quad (3.28)$$

Теперь задача состоит в том, чтобы рассмотреть рациональный предел $\lim \omega_{1,2} \rightarrow \infty$ для $\tilde{E}_\tau$. Исследуется двойной скейлинговый предел:

$$\lim \epsilon_{1,2} \rightarrow 0, \quad \lim \omega_{1,2} \rightarrow \infty, \quad \lim \epsilon_1\omega_1 = 1, \quad \lim \epsilon_2\omega_2 = \tau.$$

Тогда $\lim \omega_{1,2} \rightarrow \infty$ приводит к рациональному вырождению эллиптических функций (3.28):

$$\begin{aligned} \lim_{\omega_{1,2} \rightarrow \infty} \vartheta_\epsilon(\gamma) &\sim \gamma_\tau, & \lim_{\omega_{1,2} \rightarrow \infty} \wp_\epsilon(\gamma) &\sim \frac{1}{\gamma_\tau^2}, & \gamma_\tau &= \gamma_1 + \gamma_2\tau, \\ \lim_{\omega_{1,2} \rightarrow \infty} \varphi_\epsilon(\alpha, z) &= \left(\frac{1}{\alpha_\tau} + \frac{1}{z} \right), & \lim_{\omega_{1,2} \rightarrow \infty} f_\epsilon(\alpha, z) &= -\frac{1}{\alpha_\tau^2}. \end{aligned}$$

Отсюда, в частности, следует, что обратный тензор инерции принимает вид

$$\mathbf{J}(\mathbf{S}) = \psi(x) = \partial_{\bar{Z}}^{-2} \mathbf{S}(x_1, x_2) = \sum_{\alpha \in \tilde{\mathbb{Z}}^{(2)}} \frac{1}{\alpha_\tau^2} S_{-\alpha} T_\alpha, \quad \bar{Z} = \frac{2\pi i}{\bar{\tau} - \tau} (\bar{\tau}x_1 - x_2), \quad (3.29)$$

где $\alpha_\tau = \alpha_1 + \alpha_2\tau$. Уравнения движения задаются соответствующим квадратичным гамильтонианом

$$H = -\frac{1}{2} \int_{T^2} \mathbf{S} \partial_{\bar{Z}}^{-2} \mathbf{S} = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \tilde{\mathbb{Z}}^{(2)}} \frac{1}{\alpha_\tau^2} S_\alpha S_{-\alpha}$$

по отношению к линейной скобке Пуассона на $\text{Ham}^0(T^2)$

$$\partial_t \mathbf{S} = \{\mathbf{S}, \partial_{\bar{Z}}^{-2} \mathbf{S}\}_1. \quad (3.30)$$

Последняя принимает следующий вид в фурье-компонентах:

$$\partial_t S_\alpha = \sum_{\gamma \in \tilde{\mathbb{Z}}^{(2)}} S_\gamma \frac{1}{\gamma_\tau^2} S_{\alpha-\gamma}.$$

Эти уравнения назовем *модифицированной гидродинамикой* на торе T^2 .

Бездисперсионное уравнение Лакса

$$\partial_t L(x_1, x_2; z) = \{L(x_1, x_2; z), M(x_1, x_2)\}_1,$$

где

$$L(x_1, x_2; z) = -\left(\partial_{\bar{Z}}^{-1} - \frac{1}{z} \right) \mathbf{S}(x_1, x_2), \quad (3.31)$$

$$M(x_1, x_2) = -\partial_{\bar{Z}}^{-2} \mathbf{S}(x_1, x_2), \quad (3.32)$$

эквивалентно уравнениям (3.30).

Бесконечный набор интегралов движения порождается разложением

$$(-1)^k \int_{T^2} L^k(x_1, x_2; z) dx_1 dx_2 = I_{0,k} + \sum_{m=0}^{k-2} I_{m,k} z^{-m-2}.$$

Соответствующая бесконечная иерархия модифицированной гидродинамики $\partial_{s,k} \mathbf{S} = \{I_{s,k}, \mathbf{S}\}_1$ допускает бездисперсионное представление Лакса.

В этом пределе выживает бигамильтонова структура. Имеет место следующая квадратичная алгебра Пуассона на торе T^2 :

$$\{S_\alpha, S_0\}_2 = \sum_{\gamma \neq \alpha} S_{\alpha-\gamma} S_\gamma \frac{(\alpha \times \gamma)}{\gamma_\tau^2}, \quad (3.33)$$

$$\{S_\alpha, S_\beta\}_2 = S_0 S_{\alpha+\beta} (\alpha \times \beta) + \sum_{\gamma \neq \alpha, -\beta} S_{\alpha-\gamma} S_{\beta+\gamma} f(\alpha, \beta, \gamma) (\gamma \times (\alpha - \beta)), \quad (3.34)$$

где

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = \left(\frac{1}{\gamma_\tau} + \frac{1}{\beta_\tau - \alpha_\tau + \gamma_\tau} - \frac{1}{\beta_\tau + \gamma_\tau} + \frac{1}{\alpha_\tau - \gamma_\tau} \right), \quad \gamma_\tau = \gamma_1 + \tau \gamma_2.$$

Иерархия модифицированной гидродинамики при этом снова описывается квадратичной алгеброй.

4. АЛГЕБРОИД ЛИ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ НА ТОРЕ

4.1. Алгеброиды Ли и многообразия Пуассона. Начнем с краткого описания алгеброидов Ли. Детали этой теории содержатся в работах [9].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем называть *алгеброидом Ли* над гладким многообразием M векторное расслоение $\mathcal{A} \rightarrow M$

- со структурой алгебры Ли на пространстве его сечений $\Gamma(\mathcal{A})$, определяемой скобками Ли $[\varepsilon_1, \varepsilon_2]$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \Gamma(\mathcal{A})$;
- с отображением сечения (отображением якоря) $\delta: \Gamma(\mathcal{A}) \rightarrow TM$, удовлетворяющим следующим условиям:

- 1) для каждого $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \Gamma(\mathcal{A})$

$$[\delta_{\varepsilon_1}, \delta_{\varepsilon_2}] = \delta_{[\varepsilon_1, \varepsilon_2]}, \quad (4.1)$$

- 2) для каждого $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \Gamma(\mathcal{A})$ и $f \in C^\infty(M)$

$$[\varepsilon_1, f\varepsilon_2] = f[\varepsilon_1, \varepsilon_2] + (\delta_{\varepsilon_1} f)\varepsilon_2. \quad (4.2)$$

Другими словами, отображение якоря задает представление $\Gamma(\mathcal{A})$ в алгебру Ли векторных полей на M . Второе условие есть правило Лейбница по отношению к умножению сечений на гладкие функции.

Пусть $\{e^j(x)\}$ – базис локальных сечений $\Gamma(\mathcal{A})$. Тогда скобки задаются структурными функциями $f_i^{jk}(x)$ алгеброида:

$$[e^j, e^k] = f_i^{jk}(x)e^i, \quad x \in M. \quad (4.3)$$

Приведем несколько примеров алгеброидов Ли.

1. Если отображение якоря тривиально, то $\mathcal{A}$ просто представляет собой расслоение алгебр Ли.

2. Второй пример менее тривиален (см. работы [4]). Пусть M – многообразие Пуассона с бивектором Пуассона $\pi = \pi(\varepsilon, \varepsilon')$, где $\varepsilon, \varepsilon'$ – сечения расслоения T^*M . Скобка Пуассона задается на пространстве гладких функций $\mathcal{H}(M)$:

$$\{f(x), g(x)\} := \langle df | \pi | dg \rangle = \partial_k f \pi^{kj} \partial_j g, \quad df, dg \in T_x^*M.$$

Бивектор Пуассона задает отображение

$$V^\pi: T^*M \rightarrow TM, \quad V_\varepsilon^\pi = \langle \varepsilon | \pi | \partial \rangle = \varepsilon_k \pi^{kj} \partial_j. \quad (4.4)$$

Соответствующая производная Ли $\mathcal{L}_{V_\varepsilon} := \delta_\varepsilon$ действует по правилу

$$\delta_\varepsilon(x) = \pi(x)|\varepsilon\rangle. \quad (4.5)$$

Таким образом, можно получить отображение из пространства гладких функционалов $\mathcal{H}(M)$ в пространство гамильтоновых векторных полей:

$$f \rightarrow V_f = \langle df | \pi | \partial \rangle. \quad (4.6)$$

Скобка Пуассона теперь может быть переписана в виде $\{f(x), g(x)\} = -i_{V_{df}} dg$.

Можно задать скобку на один-формах $\varepsilon, \varepsilon' \in \Gamma(T^*M)$:

$$[\varepsilon, \varepsilon'] = d\langle \varepsilon | \pi(x) | \varepsilon' \rangle + \langle d\varepsilon | \pi | \varepsilon' \rangle + \langle \varepsilon | \pi | d\varepsilon' \rangle. \quad (4.7)$$

В координатном виде она задается выражением

$$[\varepsilon, \varepsilon']_k = \partial_k(\varepsilon_m \pi^{mn} \varepsilon_n) + \partial_k(\varepsilon_m) \pi^{mn} \varepsilon_n + \varepsilon_m \pi^{mn} \partial_k \varepsilon_n.$$

Из тождества Якоби для π следует, что эта скобка является скобкой Ли. Более того, $[V_\varepsilon, V_{\varepsilon'}] = V_{[\varepsilon, \varepsilon']}$. Таким образом, T^*M наделяется структурой алгеброида Ли $\mathcal{A}_\pi$ над многообразием Пуассона M со скобками Ли (4.7) и отображением якоря (4.4). Структурные функции на T^*M задаются бивектором Пуассона $f_i^{jk}(x) = \partial_i \pi^{jk}(x)$.

Предположим теперь, что на M заданы два совместных бивектора Пуассона π_1 и π_2 ,

$$\pi(\lambda) = \lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2,$$

где (λ_1, λ_2) – однородные координаты на $\mathbb{CP}^1$. Бивектор Пуассона $\pi(\lambda)$ задает биалгеброид Ли $\mathcal{A}_{\pi(\lambda)}$ с помощью скобок (4.7) и соотношения якоря (4.4), зависящего от $\lambda = \lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{CP}^1$.

4.2. Алгеброиды Ли векторных полей на торе. Нами уже определено семейство пуассоновых структур на пространстве $\text{Ham}^{0*}(T^2)$ (3.25):

$$\pi(\lambda) \sim \{\mathbf{S}, \mathbf{S}\}_\lambda = \{\mathbf{S}, \mathbf{S}\}_2 + \lambda \{\mathbf{S}, \mathbf{S}\}_1.$$

Они задают биалгеброид Ли $\mathcal{A}_{\pi(\lambda)}(T^2)$, база которого есть $\text{Ham}^*(T^2)$, а сечения суть элементы $\text{Ham}(T^2)$ ³⁾

$$\varepsilon(x) = \sum_{a \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}} \varepsilon_a T_a, \quad (4.8)$$

где $\{T_a = \mathbf{e}(a \cdot x)\}$ – фурье-базис.

Исходя из формул (4.4) и (4.7), определим биалгеброид Ли:

$$[\varepsilon, \varepsilon']_0 = \sum_{\alpha, \beta \in \tilde{\mathbb{Z}}^2} \varepsilon_\alpha \varepsilon'_\beta S_{\alpha+\beta}(\alpha \times \beta), \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} [\varepsilon, \varepsilon']_\gamma &= \sum_{\alpha \in \tilde{\mathbb{Z}}^2} \varepsilon_\alpha (\varepsilon'_0 S_{\alpha-\gamma} \wp_\epsilon(\gamma) + \lambda \varepsilon'_{\gamma-\alpha})(\alpha \times \gamma) + \\ &+ \sum_{\alpha, \beta \in \tilde{\mathbb{Z}}^2} \varepsilon_\alpha \varepsilon'_\beta S_{\alpha+\beta-\gamma} \mathbf{f}_\epsilon(\alpha, \beta, \alpha - \gamma)(\beta \times \alpha), \end{aligned} \quad (4.10)$$

где функции $\mathbf{f}_\epsilon$, $\wp_\epsilon$ определены в (3.23), (3.24). Заметим, что структурные функции здесь имеют линейную зависимость от точки $\mathbf{S} \in \text{Ham}^{0*}(T^2)$. Постоянная составляющая структурных функций в (4.10) отвечает каноническим скобкам Пуассона на T^2 . Представляется весьма интересным переписать это семейство скобок непосредственно в терминах векторных полей на торе T^2 с помощью соотношений между $\text{Ham}^0(T^2)$ и $\text{SVect}(T^2)$.

Как следует из (4.4), отображение якоря для биалгеброида $\mathcal{A}_{\pi(\lambda)}(T^2)$ имеет вид

$$\delta_{\varepsilon_\alpha} S_0 = \varepsilon_\alpha \left(\sum_{\gamma \neq \alpha} S_{\alpha-\gamma} S_\gamma \wp_\epsilon(\gamma)(\alpha \times \gamma) \right), \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \delta_{\varepsilon_\alpha} S_\beta &= \varepsilon_\alpha \left(S_0 S_{\alpha+\beta}(\alpha \times \beta) + \sum_{\gamma \neq \alpha, -\beta} S_{\alpha-\gamma} S_{\beta+\gamma} \mathbf{f}_\epsilon(\alpha, \beta, \gamma)(\gamma \times (\alpha - \beta)) \right) + \\ &+ \lambda \varepsilon_\alpha S_{\alpha+\beta}(\alpha \times \beta). \end{aligned} \quad (4.12)$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

5.1. Некоммутативный тор. Можно непосредственно перейти от случая T^2 к некоммутативному тору $\mathcal{A}_\theta$. Для этого координаты (x_1, x_2) следует заменить на операторы с коммутационными соотношениями $[x_1, x_2] = -2\pi i\theta$. Некоммутативный тор представляет собой унитарную ассоциативную алгебру с двумя генераторами (U_1, U_2) , удовлетворяющими соотношению

$$U_1 U_2 = \mathbf{e}_\theta^{-1} U_2 U_1, \quad \mathbf{e}_\theta = e^{2\pi i\theta}, \quad \theta \in [0, 1). \quad (5.1)$$

³⁾Так как в определение квадратичной скобки был включен константный член S_0 , можно перейти от $\text{Ham}^{0*}(T^2)$ к $\text{Ham}^*(T^2)$.

Алгебра $\mathcal{A}_\theta$ заменяет собой коммутативную алгебру $C^\infty(T^2)$ с помощью отождествления $U_1 \rightarrow \mathbf{e}(x)$, $U_2 \rightarrow \mathbf{e}(y)$, где умножение в $\mathcal{A}_\theta$ задается умножением Мойала:

$$(f * g)(x, y) := fg + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pi\theta)^n}{n!} \varepsilon_{r_1, s_1} \dots \varepsilon_{r_n, s_n} (\partial_{r_1 \dots r_n}^n f)(\partial_{s_1 \dots s_n}^n g). \quad (5.2)$$

Вместо базиса Фурье (3.2) следует использовать базис

$$T_\alpha = \frac{i}{2\pi\theta} \mathbf{e}_\theta^{\alpha_1 \alpha_2 / 2} U_1^m U_2^n, \quad \alpha \in \tilde{\mathbb{Z}}^{(2)},$$

с коммутаторами

$$[T_\alpha, T_\beta] = \mathbf{C}_\theta(\alpha, \beta) T_{\alpha+\beta}, \quad \mathbf{C}_\theta(\alpha, \beta) = \sin 2\pi\theta(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1), \quad (5.3)$$

которые заменяют скобки Пуассона (4.6). Это приводит к определению бесконечномерной алгебры Ли (sin-алгебры) с коммутационными соотношениями (5.3); sin-алгебра играет роль $\text{Ham}(T^2)$.

Функционал следа $\text{tr } f = f_0$ на $\mathcal{A}_\theta$ удовлетворяет соотношению $\text{tr}(f * g) = \text{tr}(g * f)$, и с его помощью можно определить дуальное пространство $\mathcal{A}_\theta^*$. Завихренность на некоммутативном торе есть элемент $\mathcal{A}_\theta^*$, разложенный по базису T_α :

$$\mathbf{S} = \sum S_\alpha T_\alpha.$$

Структура Пуассона–Ли на $\mathcal{A}_\theta^*$ задается выражением (5.3). Уравнения движения эллиптической гидродинамики на некоммутативном торе принимают вид

$$\partial_t S_\alpha = \sum_{\gamma \in \tilde{\mathbb{Z}}^{(2)}} S_\gamma \wp_{\theta, \epsilon}(\gamma) S_{\alpha-\gamma},$$

где $\wp_{\theta, \epsilon}(\gamma) = \wp((\epsilon_1 \gamma_1 + \epsilon_2 \gamma_2 \tau)\theta)$. Эти уравнения допускают представление Лакса $\partial_t L = [L, M]$, где коммутатор понимается в смысле sin-алгебры,

$$L(x; z) = - \sum_{\alpha \in \tilde{\mathbb{Z}}^{(2)}} S_\alpha \varphi_{\theta, \epsilon}(\gamma) T_\alpha,$$

и $\varphi_{\theta, \epsilon}(\gamma) = \mathbf{e}(\epsilon_2 \gamma_2 z \theta) \phi_{\theta, \epsilon}(\gamma, z)$, $\phi_{\theta, \epsilon}(\gamma, z) = \phi(((\gamma_1 \epsilon_1 + \gamma_2 \epsilon_2 \tau)\theta), z)$. M -оператор должен быть модифицирован соответствующим образом.

Рассмотрим теперь скобки Пуассона на $\mathcal{A}_\theta^*$. Правые части в определениях линейной и квадратичной алгебр Пуассона (3.17) и (3.20) становятся коммутаторами. В итоге квадратичная алгебра Пуассона сохраняет свой вид (3.33), (3.34):

$$\{S_\alpha, S_0\}_2 = \sum_{\gamma \neq \alpha} S_{\alpha-\gamma} S_\gamma (\wp_{\theta, \epsilon}(\gamma) - \wp_{\theta, \epsilon}(\alpha - \gamma)) \mathbf{C}_\theta(\alpha, \gamma), \quad (5.4)$$

$$\{S_\alpha, S_\beta\}_2 = S_0 S_{\alpha+\beta} \mathbf{C}_\theta(\alpha, \beta) + \sum_{\gamma \neq \alpha, -\beta} S_{\alpha-\gamma} S_{\beta+\gamma} \mathbf{f}_{\theta, \epsilon}(\alpha, \beta, \gamma) \mathbf{C}_\theta(\gamma, \alpha - \beta), \quad (5.5)$$

где

$$\mathbf{f}_{\theta, \epsilon}(\alpha, \beta, \gamma) = - \frac{\vartheta'(0) \vartheta_{\theta, \epsilon}(\alpha) \vartheta_{\theta, \epsilon}(\beta) \vartheta_{\theta, \epsilon}(\beta - \alpha + 2\gamma)}{\vartheta_{\theta, \epsilon}(\alpha - \gamma) \vartheta_{\theta, \epsilon}(\beta + \gamma) \vartheta_{\theta, \epsilon}(\beta - \alpha + \gamma) \vartheta_{\theta, \epsilon}(\gamma)} \quad (5.6)$$

и $\vartheta_{\theta,\epsilon} = \vartheta_{\theta,\epsilon}(\gamma) = \vartheta((\epsilon_1\gamma_1 + \epsilon_2\gamma_2\tau)\theta)$.

Линейная и квадратичная скобки Пуассона совместны и задают бигамильтонову иерархию эллиптической гидродинамики на некоммутативном торе. Детали можно найти в работе [2].

5.2. Дальнейшее квантование. Квантование квадратичной алгебры Пуассона (5.4), (5.5) на некоммутативном торе приводит к ассоциативной алгебре с квадратичными соотношениями. Постоянная Планка $\hbar$ принадлежит при этом эллиптической кривой E_τ . Заменяя классические переменные $\mathbf{S}$ на операторы $\hat{\mathbf{S}}$, получим, что

$$\sum_c \hat{S}_{a-c} \hat{S}_{b+c} \mathbf{e}_\theta(c \times (a-b)) \mathbf{f}_{\theta,\epsilon}(a, b, c | \hbar) = 0$$

для любых $a, b \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, где

$$\mathbf{f}_{\theta,\epsilon}(a, b, c | \hbar) = - \frac{\vartheta'(0) \vartheta_{\theta,\epsilon}(a+2\hbar) \vartheta_{\theta,\epsilon}(b) \vartheta_{\theta,\epsilon}(b-a+2c)}{\vartheta_{\theta,\epsilon}(a-c+\hbar) \vartheta_{\theta,\epsilon}(b+c+\hbar) \vartheta_{\theta,\epsilon}(b-a+c+\hbar) \vartheta_{\theta,\epsilon}(c+\hbar)}.$$

Эти квадратичные соотношения представляют собой бесконечномерное обобщение квантовых алгебр Фейгина–Одесского.

Благодарности. Работа была частично поддержана РФФИ (гранты № 06-02-17381 и НШ-8065-2006.2).

Список литературы

- [1] С. Л. Зиглин, *Докл. АН*, **250**:6 (1980), 1296–1300.
- [2] B. Khesin, A. Levin, M. Olshanetsky, *Commun. Math. Phys.*, **250** (2004), 581–612; nlin.SI/0309017.
- [3] Е. К. Склянин, *Функц. анализ и его прилож.*, **16**:4 (1982), 27–34; А. В. Одесский, Б. Л. Фейгин, *Функц. анализ и его прилож.*, **23**:3 (1989), 45–54.
- [4] М. В. Карасев, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **50**:3 (1986), 508–538; B. Fuchssteiner, *Progr. Theoret. Phys.*, **68** (1982), 1082–1104.
- [5] А. В. Белавин, В. Г. Дринфельд, *Функц. анализ и его прилож.*, **16**:3 (1982), 1–29.
- [6] V. I. Arnold, B. A. Khesin, *Topological Methods in Hydrodynamics*, Appl. Math. Sci., **125**, Springer, N. Y., 1998.
- [7] В. И. Арнольд, *УМН*, **24**:3 (1969), 225–226.
- [8] F. Magri, *J. Math. Phys.*, **19** (1978), 1156–1162.
- [9] K. Mackenzie, *Lie Groupoids and Lie Algebroids in Differential Geometry*, London Math. Soc. Lect. Notes Ser., **124**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987; A. Cannas da Silva, A. Weinstein, *Geometric Models for Noncommutative Algebras*, Berkeley Math. Lect. Notes, **10**, Amer. Math. Soc., Providence, RI; Berkeley Center for Pure and Appl. Math., Berkeley, CA, 1999.

Поступила в редакцию 08.06.2006