Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Силантьев, Функция перехода для цепочки Тоды,
ТМФ, 2007, том 150, номер 3, 371–390

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf5985>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 15:39:39

© 2007 г.

А. В. Силантьев*

ФУНКЦИЯ ПЕРЕХОДА ДЛЯ ЦЕПОЧКИ ТОДЫ

К задаче нахождения собственных функций открытой цепочки Тоды применен метод Λ -операторов, развитый Деркачовым, Корчемским и Манашовым. С помощью диаграммной техники, развитой для этих Λ -операторов, воспроизведена мера Складина и изучены свойства Λ -операторов. Данный подход к построению собственных функций открытой цепочки Тоды воспроизводит представление Гаусса–Гивенталья для этих функций.

Ключевые слова: цепочка Тоды, разделение переменных, Q -операторы.

1. ВВЕДЕНИЕ

Эта работа была инспирирована статьей [1], посвященной методу разделения переменных для ХХХ-модели. Ключевая идея метода разделения переменных состоит в том, чтобы подобрать такое интегральное преобразование, которое переводит собственные функции квантовых интегралов движения рассматриваемой модели в произведение функций от одной переменной [2]. Если каждая из этих функций удовлетворяет уравнению Бакстера, то исходная функция будет собственной. Ядро, задающее это преобразование, называется функцией перехода. Она может быть построена последовательным применением некоторых операторов $\Lambda_k(u)$: $\Lambda_N(\gamma_1)\Lambda_{N-1}(\gamma_2)\cdots\Lambda_1(\gamma_N)$. Каждый оператор $\Lambda_k(u)$ представляет собой преобразование функций от $k-1$ переменных в функции от k переменных. Свойства функции перехода можно перенести на алгебраические свойства этих операторов (см. раздел 5).

Функция перехода для N -частичной периодической цепочки Тоды была найдена в работах [2]–[5]. Там было показано, что в этом случае она пропорциональна собственной функции $(N-1)$ -частичной открытой цепочки Тоды с коэффициентом пропорциональности, зависящим от координаты N -й частицы. Мы применяем метод, предложенный в работе [1], для получения этих собственных функций в виде произведения Λ -операторов, воспроизводя тем самым представление Гаусса–Гивенталья [6], [7] для функций перехода цепочки Тоды.

*Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия;
Département de Mathématiques, Université d'Angers, 49045 Angers, France.
E-mail: silant@thsun1.jinr.ru, silant@tonton.univ-angers.fr

Интегральное представление для собственных функций открытой цепочки Тоды, которое получается в описанном ниже подходе, впервые было получено в работе [7] на основе другого метода. Недавно в работе [6] была предложена теоретико-групповая интерпретация этого представления, которая опирается на разложение Гаусса для группы $GL(N, \mathbb{R})$. Этим оправдано название такого представления функций перехода.

В статье [1] использовался метод триангуляции оператора Лакса [4]. Триангуляция осуществляется калибровочным преобразованием, зависящим от параметров $y_0, \dots, y_N$. В периодическом случае налагается условие $y_0 = y_N$, и тогда конструкция, описанная в работе [4], приводит к Q -операторам Бакстера [8] для периодической цепочки Тоды. Для построения Λ -операторов мы налагаем другие граничные условия: $y_0 \rightarrow -\infty$, $y_N \rightarrow +\infty$, похожие на те, что использованы в работе [1]. Таким образом, Λ -операторы и Q -операторы Бакстера соответствуют различному выбору граничных условий для параметров триангуляции.

Описывая конструкцию собственных функций открытой цепочки Тоды, мы вводим диаграммную технику, подобную той, что развита в работе [1]. Это позволяет свести громоздкие вычисления с ядрами Λ -операторов к простому манипулированию диаграммами.

Статья построена следующим образом. В разделе 2 мы напоминаем определение рассматриваемой модели, следуя работе [2]. Раздел 3 посвящен описанию собственных функций этой модели как произведений Λ -операторов и формулировке диаграммной техники [1], необходимой для доказательства основной теоремы, сформулированной и доказанной в этом разделе. В разделе 4 мы используем эту технику, чтобы проверить взаимную ортогональность полученных собственных функций. Как показывают вычисления, нормировка этих функций задается мерой Склянина. Раздел 5 посвящен алгебраическим свойствам Λ -операторов.

2. ОТКРЫТАЯ ЦЕПОЧКА ТОДЫ

Квантовая N -частичная открытая цепочка Тоды – одномерная модель с экспоненциальным взаимодействием между соседними частицами, которые расположены на прямой. Гамильтониан этой системы определяется равенством

$$H = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N p_n^2 + \sum_{n=1}^{N-1} e^{x_n - x_{n+1}}, \quad (2.1)$$

где $p_n = -i\hbar \partial / \partial x_n$ – оператор импульса n -й частицы. Благодаря трансляционной инвариантности гамильтониана (2.1) полный импульс системы

$$P = \sum_{n=1}^N p_n \quad (2.2)$$

коммутирует с гамильтонианом, т.е. является интегралом движения. У этой системы имеется N независимых интегралов движения. Их удобно описывать в терминах

R -матричного формализма. Введем L -оператор для цепочки Тоды

$$L_n(u) = \begin{pmatrix} u - p_n & e^{-x_n} \\ -e^{x_n} & 0 \end{pmatrix}, \quad n = 1, \dots, N, \quad (2.3)$$

и матрицу монодромии для N -частичной цепочки Тоды

$$T_N(u) = L_N(u) \dots L_1(u) = \begin{pmatrix} A_N(u) & B_N(u) \\ C_N(u) & D_N(u) \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

где u – спектральный параметр. Элементы матрицы монодромии $A_N(u)$, $B_N(u)$, $C_N(u)$, $D_N(u)$ суть эрмитовы операторы, полиномиально зависящие от u .

Далее нам понадобятся следующие рекуррентные формулы, непосредственно следующие из (2.3) и (2.4):

$$A_N(u) = (u - p_N)A_{N-1}(u) + e^{-x_N}C_{N-1}(u), \quad (2.5)$$

$$C_N(u) = -e^{x_N}A_{N-1}(u), \quad (2.6)$$

$$A_N(u) = (u - p_N)A_{N-1}(u) - e^{x_{N-1}-x_N}A_{N-2}(u). \quad (2.7)$$

Эти соотношения показывают, что элементы матрицы монодромии $A_N(u)$ и $C_N(u)$ являются полиномами u степени N и $N - 1$, соответственно. Аналогично можно показать, что $B_N(u)$ и $D_N(u)$ имеют степени $N - 1$ и $N - 2$.

Матрица монодромии удовлетворяет квантовому RTT -соотношению

$$R(u - v)(T_N(u) \otimes I)(I \otimes T_N(v)) = (I \otimes T_N(v))(T_N(u) \otimes I)R(u - v) \quad (2.8)$$

с рациональной R -матрицей

$$R(u) = I \otimes I + \frac{i\hbar}{u} \mathcal{P}, \quad (2.9)$$

где $\mathcal{P}$ – матрица перестановки: $\mathcal{P}_{ij,kl} = \delta_{il}\delta_{jk}$.

Записывая (2.8) поэлементно, получаем RTT -соотношения в терминах элементов матрицы монодромии, в частности

$$A_N(u)A_N(v) = A_N(v)A_N(u). \quad (2.10)$$

Последнее означает, что $A_N(u)$ является производящей функцией интегралов движения для интегрируемой системы с N степенями свободы. Явные вычисления двух первых интегралов показывают, что это не что иное, как интегралы движения для открытой цепочки Тоды:

$$A_N(u) = \sum_{k=0}^N (-1)^k u^{N-k} H_k, \quad (2.11)$$

$$H_0 = 1, \quad H_1 = P, \quad H_2 = \frac{1}{2}P^2 - H, \quad (2.12)$$

$$[H_k, H_j] = 0. \quad (2.13)$$

Вследствие (2.13) существуют общие собственные функции интегралов H_k , соответствующих собственным значениям E_k , которые определяются уравнениями

$$A_N(u)\psi_E(x) = a_N(u; E)\psi_E(x), \quad (2.14)$$

где

$$a_N(u; E) = \sum_{k=0}^N (-1)^k u^{N-k} E_k,$$

$E_0 = 1$, $E = (E_1, \dots, E_N)$, $x = (x_1, \dots, x_N)$. Записывая собственные значения E_k в форме симметрических комбинаций новых вещественных переменных $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_N)$:

$$E_k = \sum_{j_1 < \dots < j_k} \gamma_{j_1} \dots \gamma_{j_k}, \quad (2.15)$$

можно переписать уравнение (2.14) в следующем виде:

$$A_N(u)\psi_\gamma(x) = \prod_{j=1}^N (u - \gamma_j)\psi_\gamma(x). \quad (2.16)$$

Потребуем дополнительно, чтобы решения уравнения (2.16) быстро убывали в области $x_i \gg x_{i+1}$. Выбор данного требования для асимптотических свойств решений соответствует тому, что i -я частица располагается левее, чем $(i+1)$ -я.

3. СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ДЛЯ ОТКРЫТОЙ ЦЕПОЧКИ ТОДЫ

В этом разделе будут найдены собственные функции, определенные в предыдущем разделе с помощью уравнения (2.16), которое равносильно системе из N уравнений

$$A_N(\gamma_j)\psi_\gamma(x) = 0, \quad j = 1, \dots, N. \quad (3.1)$$

Собственные значения (2.15) инвариантны относительно перестановок переменных $\gamma_1, \dots, \gamma_N$, поэтому будет уместно потребовать вейль-инвариантности собственных функций

$$\psi_{\sigma(\gamma)}(x) = \psi_\gamma(x) \quad (3.2)$$

для всех $\sigma \in S_N$, где S_N обозначает группу перестановок N элементов и $\sigma(\gamma) = (\gamma_{\sigma(1)}, \dots, \gamma_{\sigma(N)})$.

Чтобы решить уравнение (2.16), достаточно найти вейль-инвариантное решение одного из этих уравнений, например, уравнения

$$A_N(\gamma_1)\psi_\gamma(x) = 0. \quad (3.3)$$

Для этого рассмотрим следующее калибровочное преобразование матриц Лакса:

$$\tilde{L}_n(u) = M_n L_n(u) M_n^{-1}, \quad n = 1, \dots, N, \quad (3.4)$$

выполняемое с помощью невырожденных матриц

$$M_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ie^{y_n} & 1 \end{pmatrix}, \quad n = 0, \dots, N. \quad (3.5)$$

Тогда деформированная N -частичная матрица монодромии примет вид

$$\tilde{T}_N(u) \equiv \begin{pmatrix} \tilde{A}_N(u) & \tilde{B}_N(u) \\ \tilde{C}_N(u) & \tilde{D}_N(u) \end{pmatrix} = \tilde{L}_N(u) \cdots \tilde{L}_1(u) = M_N T_N(u) M_0^{-1}. \quad (3.6)$$

В частности,

$$\tilde{L}_n(u)_{21} = ie^{y_n}(u - p_n - ie^{y_{n-1}-x_n} + ie^{x_n-y_n}), \quad (3.7)$$

$$\tilde{C}_N(u) = ie^{y_N} A_N(u) + e^{y_N+y_0} B_N(u) + C_N(u) - ie^{y_0} D_N(u). \quad (3.8)$$

Здесь через $\tilde{L}_n(u)_{21}$ обозначен нижний недиагональный элемент матрицы $\tilde{L}_n(u)$.

Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$\tilde{L}_n(u)_{21} w_n(u) = 0. \quad (3.9)$$

Оно имеет решение

$$w_n(u) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}u(x_n - y_{n-1}) - \frac{1}{\hbar}e^{y_{n-1}-x_n} - \frac{1}{\hbar}e^{x_n-y_n}\right). \quad (3.10)$$

Очевидно, что функция

$$W_u(x; y) = \prod_{n=1}^N w_n(u) = \exp \sum_{n=1}^N \left(\frac{i}{\hbar}u(x_n - y_{n-1}) - \frac{1}{\hbar}e^{y_{n-1}-x_n} - \frac{1}{\hbar}e^{x_n-y_n} \right) \quad (3.11)$$

удовлетворяет уравнению

$$\tilde{C}_N(u) W_u(x; y) = 0. \quad (3.12)$$

В пределе $y_0 \rightarrow -\infty$, $y_N \rightarrow +\infty$ формула (3.8) превращается в равенство

$$A_N(u) = -i \lim_{\substack{y_0 \rightarrow -\infty \\ y_N \rightarrow +\infty}} e^{-y_N} \tilde{C}_N(u). \quad (3.13)$$

Следовательно, умножая уравнение (3.12) на $-ie^{-y_N} e^{(i/\hbar)u(y_0+y_N)}$, беря тот же предел, что и в (3.13), и полагая $u = \gamma_1$, мы приходим к уравнению (3.3) с решением $\psi_\gamma(x) = \Lambda_{\gamma_1}(x; y)$, где

$$\begin{aligned} \Lambda_u(x; y) &= \Lambda_u(x_1, \dots, x_N; y_1, \dots, y_{N-1}) = \lim_{\substack{y_0 \rightarrow -\infty \\ y_N \rightarrow +\infty}} e^{(i/\hbar)u(y_0+y_N)} W_u(x; y) = \\ &= \exp\left(\frac{i}{\hbar}u\left(\sum_{n=1}^N x_n - \sum_{n=1}^{N-1} y_n\right) - \frac{1}{\hbar} \sum_{n=1}^{N-1} (e^{y_n-x_{n+1}} + e^{x_n-y_n})\right). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Обозначим через $\Lambda_N(u)$ интегральный оператор с ядром $\Lambda_u(x_1, \dots, x_N; y_1, \dots, y_{N-1})$:

$$(\Lambda_N(u) \cdot f)(x) = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} dy \Lambda_u(x_1, \dots, x_N; y_1, \dots, y_{N-1}) f(y). \quad (3.15)$$

Поскольку модуль ядра $|\Lambda_u(x; y)|$ быстро убывает при $y_i \rightarrow \pm\infty$, интеграл в правой части (3.15) сходится абсолютно для функций $f(y)$, достаточно медленно растущих на бесконечности. Полагая $u = \gamma_1$ в (3.15), мы получаем решение уравнения (3.3). Поскольку модуль ядра $|\Lambda_u(x; y)|$ быстро убывает в области $x_i \gg x_{i+1}$, то это решение имеет требуемые асимптотические свойства.

ТЕОРЕМА 1. *Решение уравнения (3.3)*

$$\psi_\gamma(x) = (\Lambda_N(\gamma_1) \dots \Lambda_2(\gamma_{N-1}) \Lambda_1(\gamma_N) \cdot 1)(x_1, \dots, x_N), \quad (3.16)$$

где $(\Lambda_1(\gamma_N) \cdot 1)(x_1) = e^{(i/\hbar)\gamma_N x_1}$, веиль-инвариантно, т.е. удовлетворяет условию (3.2), и, следовательно, является решением уравнения (2.16), быстро убывающим в области $x_i \gg x_{i+1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства достаточно установить инвариантность относительно элементарных перестановок, т.е. проверить равенство

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{N-n+1}} dy \Lambda_{\gamma_{n-1}}(x_1, \dots, x_{N-n+2}; y_1, \dots, y_{N-n+1}) \Lambda_{\gamma_n}(y_1, \dots, y_{N-n+1}; z_1, \dots, z_{N-n}) = \\ = \int_{\mathbb{R}^{N-n+1}} dy \Lambda_{\gamma_n}(x_1, \dots, x_{N-n+2}; y_1, \dots, y_{N-n+1}) \Lambda_{\gamma_{n-1}}(y_1, \dots, y_{N-n+1}; z_1, \dots, z_{N-n}) \end{aligned} \quad (3.17)$$

для $n = 2, \dots, N$.

Рис. 1

Для этого мы будем использовать метод диаграмм, введенный в работе [1]. На рис. 1 изображены следующие функции:

рис. 1а –

$$I(x_k, y_k) = e^{-(1/\hbar)e^{x_k - y_k}},$$

рис. 1б –

$$J_u(x_{k+1}, y_k) = e^{(i/\hbar)u(x_{k+1} - y_k) - (1/\hbar)e^{y_k - x_{k+1}}},$$

рис. 1в –

$$Z_u(x_k) = e^{(i/\hbar)ux_k},$$

рис. 1г –

$$Z_u^{-1}(x_k) = e^{-(i/\hbar)ux_k},$$

рис. 1д –

$$Y_u(x_{k+1}, z_k) = (1 + e^{x_{k+1} - z_k})(i/\hbar)u.$$

Функция (3.16) может быть теперь представлена в графическом виде. Для случая $N = 5$ она изображена на рис. 2, где под точками понимается интегрирование по соответствующим переменным.

Рис. 2

ЛЕММА 1. Справедливы равенства, изображенные на рис. 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интегрирование по y_k в левой части рис. 3а дает

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{+\infty} dy_k I(x_k, y_k) J_{\gamma_{n-1}}(x_{k+1}, y_k) I(y_k, z_k) J_{\gamma_n}(y_k, z_{k-1}) = e^{(i/\hbar)(\gamma_{n-1}x_{k+1} - \gamma_n z_{k-1})} \times \\
 & \quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} dy_k \exp\left(\frac{i}{\hbar}(\gamma_n - \gamma_{n-1})y_k - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{\hbar}(e^{-x_{k+1}} + e^{-z_k})e^{y_k} - \frac{1}{\hbar}(e^{x_k} + e^{z_{k-1}})e^{-y_k}\right) = \\
 & = 2e^{(i/\hbar)(\gamma_{n-1}x_{k+1} - \gamma_n z_{k-1})} \left(\frac{e^{x_k} + e^{z_{k-1}}}{e^{-x_{k+1}} + e^{-z_k}}\right)^{(i(\gamma_n - \gamma_{n-1}))/(2\hbar)} \times \\
 & \quad \times K_{(i/\hbar)(\gamma_n - \gamma_{n-1})}\left(\frac{2}{\hbar}\sqrt{(e^{x_k} + e^{z_{k-1}})(e^{-x_{k+1}} + e^{-z_k})}\right), \tag{3.18}
 \end{aligned}$$

Рис. 3

где $K_\nu(z)$ – функция Макдональда [9]. Меняя местами γ_{n-1} и γ_n в (3.18), мы получаем выражение для интеграла в правой части рис. 3а:

$$2e^{(i/\hbar)(\gamma_n x_{k+1} - \gamma_{n-1} z_{k-1})} \left(\frac{e^{x_k} + e^{z_{k-1}}}{e^{-x_{k+1}} + e^{-z_k}} \right)^{-(i(\gamma_n - \gamma_{n-1}))/2\hbar} \times \\ \times K_{(i/\hbar)(\gamma_n - \gamma_{n-1})} \left(\frac{2}{\hbar} \sqrt{(e^{x_k} + e^{z_{k-1}})(e^{-x_{k+1}} + e^{-z_k})} \right). \quad (3.19)$$

Отношение (3.18) к (3.19) в точности равно $Y_{\gamma_{n-1} - \gamma_n}(x_{k+1}, z_k) Y_{\gamma_{n-1} - \gamma_n}^{-1}(x_k, z_{k-1})$.

Равенства, изображенные на рис. 3б, в, доказываются аналогично.

Продолжение доказательства теоремы 1 изображено на рис. 4. Здесь показана левая часть равенства (3.17) после применения рис. 3в. Далее, используя рис. 3а, можно перемещать вертикальную линию, изображающую функцию $Y_{\gamma_{n-1} - \gamma_n}(x_j, z_{j-1})$, направо, как это указано на диаграмме. Когда эта линия достигнет правого края диаграммы, можно применить рис. 3б. В результате γ_{n-1} и γ_n окажутся переставленными, и мы получим правую часть равенства (3.17).

Рис. 4

Подставляя явное выражение (3.14) для ядра одного из операторов вида (3.15) в правую часть равенства (3.16), мы получаем рекуррентную формулу для функции (3.16)

$$\psi_{\gamma_1, \dots, \gamma_N}(x_1, \dots, x_N) = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} dy_1 \dots dy_{N-1} \psi_{\gamma_1, \dots, \gamma_{N-1}}(y_1, \dots, y_{N-1}) \times \\ \times \exp \left(\frac{i}{\hbar} \gamma_N \left(\sum_{n=1}^N x_n - \sum_{n=1}^{N-1} y_n \right) - \frac{1}{\hbar} \sum_{n=1}^{N-1} (e^{y_n - x_{n+1}} + e^{x_n - y_n}) \right), \quad (3.20)$$

которая приводит к следующему интегральному представлению для собственных функций открытой цепочки Тоды:

$$\begin{aligned} \psi_\gamma(z_{N1}, \dots, z_{NN}) = \\ = \int_{\mathbb{R}^{\frac{N(N-1)}{2}}} \prod_{n=1}^{N-1} \prod_{j=1}^n dz_{nj} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \left[\gamma_N \sum_{j=1}^N z_{Nj} + \sum_{n=1}^{N-1} (\gamma_n - \gamma_{n+1}) \sum_{j=1}^n z_{nj} \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{\hbar} \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^{n-1} (e^{z_{nj} - z_{n-1,j}} + e^{z_{n-1,j} - z_{n,j+1}}) \right). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Оно называется представлением Гаусса–Гивенталья [6], [7] для функции перехода в цепочке Тоды.

4. МЕРА ИНТЕГРИРОВАНИЯ

В этом разделе мы проверим ортогональность полученных собственных функций, используя диаграммную технику. Возникающая при этом нормировочная функция совпадает с мерой Склянина, которая использовалась в методе разделения переменных для периодической цепочки Тоды [2], [3], [10], [11].

ТЕОРЕМА 2. *Функция $\psi_\gamma(x)$, определяемая формулой (3.16), удовлетворяет условию ортогональности*

$$\int_{\mathbb{R}^N} dx \overline{\psi_\gamma(x)} \psi_{\gamma'}(x) = \mu^{-1}(\gamma) \delta_{\text{SYM}}(\gamma', \gamma), \quad (4.1)$$

где

$$\delta_{\text{SYM}}(\gamma', \gamma) = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in S_N} \prod_{i=1}^N \delta(\gamma'_i - \gamma_{\sigma(i)})$$

– симметризованная δ -функция и $\mu(\gamma)$ – мера Склянина:

$$\mu(\gamma) = \frac{(2\pi\hbar)^{-N}}{N!} \prod_{k < m} \left[\Gamma\left(\frac{\gamma_m - \gamma_k}{i\hbar}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma_k - \gamma_m}{i\hbar}\right) \right]^{-1}. \quad (4.2)$$

Левая часть равенства (4.1) здесь понимается как обобщенная функция с аргументами $\gamma'_1, \dots, \gamma'_N$, зависящая от попарно различных параметров $\gamma_1, \dots, \gamma_N$.

Ввиду эрмитовости операторов H_k их собственные функции $\psi_\gamma(x)$ образуют полный набор [12]. Это означает, что любая функция $f(x)$, лежащая в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R}^N)$, может быть представлена в виде интеграла

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \psi_\gamma(x) g(\gamma) \mu(\gamma) d\gamma \quad (4.3)$$

для некоторой суммируемой функции $g(\gamma)$. Как следствие, мы имеем условие полноты

$$\int_{\mathbb{R}^N} d\gamma \mu(\gamma) \overline{\psi_\gamma(x)} \psi_\gamma(x') = \prod_{i=1}^N \delta(x_i - x'_i). \quad (4.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Прежде всего нам понадобится диаграммное представление функции $\overline{\psi_\gamma(x)}$, чтобы вычислить интеграл, стоящий в левой части (4.1), используя диаграммную технику. Для этого рассмотрим диаграмму для $\psi_\gamma(x)$, которая изображена на рис. 2 для $N = 5$ или на рис. 5а для $N = 3$. Выполним следующие шаги.

Рис. 5

Шаг 1. Мнимая единица входит лишь в функции J и Z . Для того чтобы свести комплексное сопряжение функции $\psi_\gamma(x)$ к сопряжению функций Z , разложим $J_u(x_{k+1}, y_k)$ в произведение $Z_u^{-1}(y_k)I(y_k, x_{k+1})Z_u(x_{k+1})$ (рис. 6а). Это соответствует переходу от рис. 5а к рис. 5б.

Шаг 2. Заменяем все $Z_u(x_k)$ на $Z_u^{-1}(x_k)$ (рис. 6б) выполняя тем самым комплексное сопряжение. Мы приходим к диаграмме на рис. 5в, которая изображает функцию $\overline{\psi_\gamma(x)}$.

Шаг 3. Поскольку линия, изображающая функцию $Z_u^{-1}(x_k)$, прикреплена лишь к одной точке (а именно к x_k), можно ее повернуть, как это показано на рис. 6в, г. Диаграммное представление функции $\overline{\psi_\gamma(x)}$ после выполнения этого шага представлено на рис. 5г.

Рис. 6

Рис. 7

Шаг 4. Заменим все произведения вида $Z_u^{-1}(x_k)I(x_k, y_k)Z_u(y_k)$ на $J_u(y_k, x_k)$ (рис. 6д), т.е. получим рис. 5д.

Шаг 5. Наконец, перевернем диаграмму, приведенную на рис. 5д, вверх ногами и получим рис. 5е.

Интеграл в формуле (4.1) соответствует присоединению диаграммы, изображенной рис. 5е для $\psi_\gamma(x)$, к диаграмме, показанной на рис. 5а для функции $\psi_\gamma(x)$, в точках $x_1, \dots, x_N$ и интегрированию по этим переменным. Ниже (на рис. 8а) изображено представление для этого интеграла в случае $N = 4$. Эту диаграмму можно последовательно упрощать, используя равенства, представленные на рис. 7.

ЛЕММА 2. Если $\gamma'_j \neq \gamma_k$, то справедливы равенства, изображенные на рис. 7а, б.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Диаграммами на рис. 7а, б представлены равенства, которые следуют из интегрального представления для гамма-функций:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} dx Z_{\gamma_k}(x) I(x, y) J_{\gamma'_j}(y', x) \times \\ & \quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp \left(\frac{i}{\hbar} [(\gamma_k - \gamma'_j)x + \gamma'_j y'] - \frac{1}{\hbar} (e^{x-y} + e^{x-y'}) \right) = \\ & = e^{(i/\hbar)\gamma'_j y'} \left(\frac{\hbar}{e^{-y} + e^{-y'}} \right)^{(i/\hbar)(\gamma_k - \gamma'_j)} \Gamma \left(\frac{\gamma'_j - \gamma_k}{i\hbar} \right) \hbar^{(\gamma'_j - \gamma_k)/(i\hbar)} \times \\ & \quad \times \Gamma \left(\frac{\gamma'_j - \gamma_k}{i\hbar} \right) Z_{\gamma_k}(y') Y_{\gamma'_j - \gamma_k}(y', y), \\ & \int_{-\infty}^{+\infty} dx J_{\gamma_k}(x, y) I(y', x) Z_{\gamma'_j}^{-1}(x) \times \\ & \quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp \left(\frac{i}{\hbar} [(\gamma_k - \gamma'_j)x - \gamma_k y] - \frac{1}{\hbar} (e^{y-x} + e^{y'-x}) \right) = \\ & = e^{-(i/\hbar)\gamma_k y} \left(\frac{\hbar}{e^y + e^{y'}} \right)^{(i/\hbar)(\gamma'_j - \gamma_k)} \Gamma \left(\frac{\gamma_k - \gamma'_j}{i\hbar} \right) \hbar^{(\gamma_k - \gamma'_j)/(i\hbar)} \times \\ & \quad \times \Gamma \left(\frac{\gamma_k - \gamma'_j}{i\hbar} \right) Y_{\gamma_k - \gamma'_j}(y', y) Z_{\gamma'_j}(y). \end{aligned}$$

Полюсами гамма-функции являются неположительные целые числа. Поскольку переменные γ'_j и γ_k не равны и принимают вещественные значения, то правые части рис. 7а, б корректно определены.

Покажем, что для доказательства теоремы 2 достаточно вычислить интеграл, представленный на рис. 8а, в области значений $\gamma'_i \neq \gamma_j$ при $i + j \neq N + 1$. Для этого нам необходимо построить гладкое разбиение единицы, симметричное по γ , одна из компонент которого равна нулю в некоторой области множества $\gamma'_i = \gamma_j$, $i + j \neq N + 1$. Так как переменные γ_i попарно различны, то существует такое $\epsilon > 0$, что $6\epsilon < \min_{i,j} |\gamma_i - \gamma_j|$. Пусть $\eta_\epsilon(x)$ – бесконечно дифференцируемая функция одной переменной такая, что $0 \leq \eta_\epsilon(x) \leq 1$ при $x \in \mathbb{R}$, $\eta_\epsilon(x) = 1$ при $|x| < \epsilon$, $\eta_\epsilon(x) = 0$ при

Рис. 8

$|x| \geq 3\epsilon$ (см. книгу [13]). Для каждого $\sigma \in S_N$ положим

$$\tilde{\phi}_\sigma(\gamma'; \gamma) = \prod_{\substack{i,j=1 \\ i+j \neq N+1}}^N (1 - \eta_\epsilon(\gamma'_i - \gamma_{\sigma(j)})).$$

Так как по построению функции $\tilde{\phi}_\sigma(\gamma'; \gamma)$ неотрицательны и в любой точке хотя бы одна из них отлична от нуля, то можно осуществить гладкое разбиение единицы функциями

$$\phi_\sigma(\gamma'; \gamma) = \frac{\tilde{\phi}_\sigma(\gamma'; \gamma)}{\sum_{\sigma' \in S_N} \tilde{\phi}_{\sigma'}(\gamma'; \gamma)}, \quad (4.5)$$

имеющими следующие свойства:

- 1) $\sum_{\sigma \in S_N} \phi_\sigma(\gamma'; \gamma) = 1$;
- 2) $\phi_\sigma(\gamma'; \gamma) = \phi_1(\gamma'; \sigma\gamma)$, где $\sigma\gamma = (\gamma_{\sigma(1)}, \dots, \gamma_{\sigma(N)})$;
- 3) если $i + j \neq N + 1$, то $\phi_1(\gamma'; \gamma) = 0$ при $|\gamma'_i - \gamma_j| < \epsilon$;
- 4) $\phi_1(\gamma'; \gamma) = 1$ при $|\gamma'_i - \gamma_{N+1-i}| < \epsilon$ для всех $i = 1, \dots, N$.

Благодаря свойству 1 искомый интеграл может быть записан в виде

$$\int_{\mathbb{R}^N} dx \overline{\psi_\gamma(x)} \psi_{\gamma'}(x) = \sum_{\sigma \in S_N} \mathcal{I}_\sigma(\gamma'; \gamma),$$

где

$$\mathcal{I}_\sigma(\gamma'; \gamma) \phi_\sigma(\gamma'; \gamma) = \int_{\mathbb{R}^N} dx \overline{\psi_\gamma(x)} \psi_{\gamma'}(x).$$

Благодаря его симметрии по переменным γ и свойству 2, находим

$$\int_{\mathbb{R}^N} dx \overline{\psi_\gamma(x)} \psi_{\gamma'}(x) = \sum_{\sigma \in S_N} \mathcal{I}_1(\gamma'; \sigma\gamma).$$

Поэтому для доказательства теоремы достаточно получить равенство

$$\mathcal{I}_1(\gamma'; \gamma) = \mu^{-1}(\gamma) \frac{1}{N!} \prod_{i=1}^N \delta(\gamma'_i - \gamma_{N+1-i}). \quad (4.6)$$

Свойство 3 означает, что при вычислении $\mathcal{I}_1(\gamma'; \gamma)$ можно использовать лемму 2 при $i + j \neq N + 1$, так как полюсы гамма-функций будут зануляться функцией $\phi_1(\gamma'; \gamma)$.

Выражение $\mathcal{I}_1(\gamma'; \gamma)$, которое представляет собой интеграл, показанный на рис. 8а, умноженный на $\phi_1(\gamma'; \gamma)$, может быть вычислено по индукции. Сначала мы последовательно проинтегрируем по граничным точкам диаграммы, связанным с параметрами γ_1, γ'_1 . Первое интегрирование ведется по самой левой и самой правой точкам, т.е. по x_1 и x_N . Используя рис. 7, находим рис. 8б. Далее,двигаем вправо вертикальную линию, возникающую в левой части диаграммы (так же как на рис. 4) до тех пор, пока она не сократится с линией, возникающей справа. При этом параметры γ_1 и γ'_1 меняются местами. После интегрирования возникает множитель

$$\Gamma\left(\frac{\gamma'_1 - \gamma_1}{i\hbar}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma_1 - \gamma'_1}{i\hbar}\right), \quad (4.7)$$

и мы получаем диаграмму, представленную на рис. 8в, на которой γ_1 и γ'_1 связаны уже с другими граничными точками (граничными в смысле рис. 8а). Теперь мы интегрируем по этим точкам. На k -м шаге ($k = 2, \dots, N - 1$) γ_1 меняется с γ'_k , а γ'_1 с γ_k и появляется множитель

$$\Gamma\left(\frac{\gamma'_1 - \gamma_k}{i\hbar}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma_k - \gamma'_1}{i\hbar}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma'_k - \gamma_1}{i\hbar}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma_1 - \gamma'_k}{i\hbar}\right). \quad (4.8)$$

На N -м шаге имеем множитель

$$(2\pi\hbar)\delta(\gamma'_1 - \gamma_N) \cdot (2\pi\hbar)\delta(\gamma'_N - \gamma_1). \quad (4.9)$$

После этого параметры $\gamma_1, \gamma'_1, \gamma_N$ и γ'_N полностью исчезают из диаграммы – они уходят в множители (4.7), (4.8) и (4.9). Оставшаяся диаграмма (средняя часть диаграммы рис. 8д) есть в точности начальная диаграмма, но для $N - 2$, которая зависит от параметров $\gamma_2, \dots, \gamma_{N-1}, \gamma'_2, \dots, \gamma'_{N-1}$. Тем самым получается рекуррентная формула

$$\begin{aligned} \phi_1(\gamma'; \gamma) \int dx_1 \dots dx_N \overline{\psi_{\gamma_1, \dots, \gamma_N}(x_1, \dots, x_N)} \psi_{\gamma'_1, \dots, \gamma'_N}(x_1, \dots, x_N) = \\ = \Gamma\left(\frac{\gamma'_1 - \gamma_1}{i\hbar}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma_1 - \gamma'_1}{i\hbar}\right) \times \\ \times \prod_{k=2}^{N-1} \Gamma\left(\frac{\gamma'_1 - \gamma_k}{i\hbar}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma_k - \gamma'_1}{i\hbar}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma'_k - \gamma_1}{i\hbar}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma_1 - \gamma'_k}{i\hbar}\right) 2\pi\hbar\delta(\gamma'_1 - \gamma_N) \times \\ \times 2\pi\hbar\delta(\gamma'_N - \gamma_1) \phi_1(\gamma'; \gamma) \times \\ \times \int dx_2 \dots dx_{N-1} \overline{\psi_{\gamma_2, \dots, \gamma_{N-1}}(x_2, \dots, x_{N-1})} \psi_{\gamma'_2, \dots, \gamma'_{N-1}}(x_2, \dots, x_{N-1}), \end{aligned}$$

с помощью которой получаем

$$\mathcal{I}_1(\gamma'; \gamma) = \phi_1(\gamma'; \gamma) = \prod_{\substack{k,j=1 \\ k+j \leq N}}^{N-1} \left[\Gamma\left(\frac{\gamma'_j - \gamma_k}{i\hbar}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma_k - \gamma'_j}{i\hbar}\right) \right] \prod_{j=1}^N (2\pi\hbar) \delta(\gamma'_j - \gamma_{N+1-j}). \quad (4.10)$$

Носитель обобщенной функции $\prod_{j=1}^N (2\pi\hbar) \delta(\gamma'_j - \gamma_{N+1-j})$ лежит в области $|\gamma'_i - \gamma_{N+1-i}| < \epsilon$, $i = 1, \dots, N$, в которой $\phi_1(\gamma'; \gamma) = 1$. После подстановки $\gamma'_j = \gamma_{N+1-j}$ в произведение гамма-функций, стоящее в правой части формулы (4.10), учитывая свойство 4 функций $\phi_1(\gamma'; \gamma)$, мы получаем (4.6) с выражением (4.2) для меры Скланина.

5. СВОЙСТВА Λ -ОПЕРАТОРОВ

Q -операторы Бакстера $\widehat{Q}_N(u)$ для периодической цепочки Тоды, описанные в работе [4], удовлетворяют следующим свойствам:

- а) эти операторы коммутируют для различных значений спектрального параметра: $[\widehat{Q}_N(u), \widehat{Q}_N(v)] = 0$;
- б) они коммутируют с трансфер-матрицей $\hat{t}_N(u) = A_N(u) + D_N(u)$ периодической цепочки Тоды: $[\widehat{Q}_N(u), \hat{t}_N(v)] = 0$;
- в) Q -операторы удовлетворяют уравнению Бакстера

$$\hat{t}_N(u) \widehat{Q}_N(u) = i^{-N} \widehat{Q}_N(u - i\hbar) + i^N \widehat{Q}_N(u + i\hbar).$$

В этом разделе мы установим подобные свойства для операторов $\Lambda_N(u)$, введенных в разделе 3.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Λ -операторы имеют следующие свойства:*

- I) $\Lambda_N(u) \Lambda_{N-1}(v) = \Lambda_N(v) \Lambda_{N-1}(u)$;
- II) $A_N(u) \Lambda_N(v) = (u - v) \Lambda_N(v) A_{N-1}(u)$;
- III) $C_N(u) \Lambda_N(u) = i^{-N-1} \Lambda_N(u - i\hbar)$;
- IV) $B_N(u) \Lambda_N(u) = i^{N-1} \Lambda_N(u + i\hbar)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойство I было доказано в теореме 1. Соотношение II было доказано в работе [7] прямым вычислением. Ниже будет приведено упрощенное доказательство этого свойства. Заметим, что оно выполняется на $(N - 1)$ -частичных собственных функциях $\psi_{\gamma_1, \dots, \gamma_{N-1}}(y_1, \dots, y_{N-1})$. В самом деле, благодаря уравнению (2.16) левая часть соотношения II имеет вид

$$\begin{aligned} A_N(u) (\Lambda_N(v) \psi_{\gamma_1, \dots, \gamma_{N-1}})(x_1, \dots, x_N) &= A_N(u) \psi_{\gamma_1, \dots, \gamma_{N-1}, v}(x_1, \dots, x_N) = \\ &= (u - v) \prod_{k=1}^{N-1} (u - \gamma_k) \psi_{\gamma_1, \dots, \gamma_{N-1}, v}(x_1, \dots, x_N), \end{aligned} \quad (5.1)$$

при этом правая часть есть

$$\begin{aligned}
 (u-v)(\Lambda_N(v)A_{N-1}(u)\psi_{\gamma_1,\dots,\gamma_{N-1}})(x_1,\dots,x_N) &= \\
 &= (u-v) \prod_{k=1}^{N-1} (u-\gamma_k)(\Lambda_N(v)\psi_{\gamma_1,\dots,\gamma_{N-1}})(x_1,\dots,x_N) = \\
 &= (u-v) \prod_{k=1}^{N-1} (u-\gamma_k)\psi_{\gamma_1,\dots,\gamma_{N-1},v}(x_1,\dots,x_N). \tag{5.2}
 \end{aligned}$$

Сравнивая (5.1) и (5.2), получаем, что равенство II справедливо на функциях $\psi_\gamma(x)$. В силу полноты множества этих функций любая функция, принадлежащая области определения операторов $A_{N-1}(u)$ и $\Lambda_N(u)$, представима в виде (4.3). Следовательно, свойство II выполняется на всех функциях от $N-1$ переменных, на которых определено действие операторов $A_{N-1}(u)$ и $\Lambda_N(v)$.

Для доказательства свойства III нам потребуется следующая формула для действия операторов $A_m(u)$ на ядре оператора $\Lambda_N(u)$:

$$\begin{aligned}
 A_m(u)\Lambda_u(x_1,\dots,x_N;y_1,\dots,y_{N-1}) &= \\
 &= (-i)^m \exp\left(\sum_{j=1}^m (x_j - y_j)\right) \Lambda_u(x_1,\dots,x_N;y_1,\dots,y_{N-1}), \tag{5.3}
 \end{aligned}$$

где $m = 0, \dots, N-1$ (предполагается, что $A_0(u) = 1$). Для случаев $m = 0$ и $m = 1$ эта формула проверяется тривиально. Для $m = 2, \dots, N-1$ она может быть доказана по индукции. В самом деле, используя соотношение (2.7), имеем

$$\begin{aligned}
 A_m(u)\Lambda_u(x;y) &= (u + i\hbar\partial_{x_m})A_{m-1}(u)\Lambda_u(x;y) - e^{x_{m-1}-x_m}A_{m-2}(u)\Lambda_u(x;y) = \\
 &= \left[(-i)^m \exp\left(\sum_{j=1}^{m-1} (x_j - y_j)\right)(e^{x_m-y_m} - e^{y_{m-1}-x_m}) - \right. \\
 &\quad \left. - (-i)^{m-2}e^{x_{m-1}-x_m} \exp\left(\sum_{j=1}^{m-2} (x_j - y_j)\right)\right] \Lambda_u(x;y) = \\
 &= (-i)^m \exp\left(\sum_{j=1}^m (x_j - y_j)\right) \Lambda_u(x;y). \tag{5.4}
 \end{aligned}$$

Формула (5.3) для $m = N-1$ и соотношение (2.6) дают

$$\begin{aligned}
 C_N(u)\Lambda_u(x;y) &= -e^{x_N}A_{N-1}(u)\Lambda_u(x;y) = \\
 &= -(-i)^{N-1} \exp\left(x_N + \sum_{j=1}^{N-1} (x_j - y_j)\right) \Lambda_u(x;y) = (-i)^{N+1} \Lambda_{u-i\hbar}(x;y),
 \end{aligned}$$

что в свою очередь означает равенство III.

Заметим, что если положить $m = N$ в (5.4), то член, содержащий $e^{x_m-y_m}$, не возникает и, следовательно, в правой части мы получаем нуль. Таким образом мы

доказываем, что ядро $\Lambda_u(x; y)$ удовлетворяет уравнению (3.1), посредством прямого вычисления.

Доказательство свойства IV аналогично. Используя соотношение

$$B_N(u) = (u - p_N)B_{N-1}(u) - e^{x_{N-1}-x_N}B_{N-2}(u) \quad (5.5)$$

и формулу для действия оператора $B_m(u)$ на ядро оператора $\Lambda_N(u)$

$$B_m(u)\Lambda_u(x; y) = e^{-x_1}(-i)^{m-1} \sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} \prod_{j=2}^k e^{y_{j-1}-x_j} \prod_{s=k+1}^m e^{x_s-y_s} \Lambda_u(x; y) \quad (5.6)$$

(где $m = 0, 1, \dots, N-1$), которая также доказывается с помощью индукции, получаем

$$\begin{aligned} B_N(u)\Lambda_u(x; y) &= \\ &= e^{-x_1}(-i)^{N-1} \sum_{k=1}^{N-1} (-1)^{k+1} \prod_{j=2}^k e^{y_{j-1}-x_j} \prod_{s=k+1}^{N-1} e^{x_s-y_s} (-e^{y_{N-1}-x_N}) \Lambda_u(x; y) - \\ &\quad - e^{-x_1}(-i)^{N-3} \sum_{k=1}^{N-2} (-1)^{k+1} \prod_{j=2}^k e^{y_{j-1}-x_j} \prod_{s=k+1}^{N-2} e^{x_s-y_s} e^{x_{N-1}-x_N} \Lambda_u(x; y) = \\ &= -e^{-x_1}(-i)^{N-1}(-1)^N \prod_{j=2}^N e^{y_{j-1}-x_j} \Lambda_u(x; y) = i^{N-1} \Lambda_{u+i\hbar}(x; y). \end{aligned}$$

Формула (5.6) здесь использована для $m = N-1, N-2$.

Отметим, что с точностью до множителей $(-i)^{\mp N-1}$ свойства III и IV могут быть получены из RTT -соотношения (2.8) и свойства II (см., например, работы [3], [10], [11]). Свойства III и IV ведут к уравнению Бакстера для оператора $\Lambda_{N-1}(u)$. Действительно, учитывая свойство II для $u = v$, получаем

$$\hat{t}_N(u)\Lambda_{N-1}(u) = i^{-N}e^{-x_N}\Lambda_{N-1}(u - i\hbar) + i^Ne^{x_N}\Lambda_{N-1}(u + i\hbar). \quad (5.7)$$

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Задача о нахождении собственных функций открытой цепочки Тоды может быть рассмотрена как первый шаг задачи о разделении переменных для периодической цепочки Тоды. Как уже было сказано во введении, разделение переменных достигается специальным выбором функции перехода к новым переменным. В случае цепочки Тоды эта функция должна быть выбрана следующим образом [3]:

$$U_{\varepsilon, \gamma_1, \dots, \gamma_{N-1}}(x_1, \dots, x_N) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\left(\varepsilon - \sum_{j=1}^{N-1} \gamma_j\right)x_N\right) \psi_{\gamma_1, \dots, \gamma_{N-1}}(x_1, \dots, x_{N-1}). \quad (6.1)$$

Тогда собственные функции интегралов движения периодической цепочки Тоды, определяемых как коэффициенты разложения оператора $\hat{t}_N(u)$ по степеням u , записываются в виде

$$\Psi_E(x_1, \dots, x_N) = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} U_{E_1, \gamma_1, \dots, \gamma_{N-1}}(x_1, \dots, x_N) \Phi_E(\gamma_1, \dots, \gamma_{N-1}) \mu(\gamma) d\gamma.$$

Функция (6.1) может быть получена по индукции: имея выражение для функции перехода $(N - 1)$ -частичной цепочки, можно получить функцию перехода для N -частичной. Этот метод был предложен в работе [10], где авторы получают рекуррентную формулу, интегрируя по переменным γ_j :

$$\psi_{\lambda_1, \dots, \lambda_N}(x_1, \dots, x_N) = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} U_{\varepsilon, \gamma_1, \dots, \gamma_{N-1}}(x_1, \dots, x_N) K(\lambda; \gamma) \mu(\gamma) d\gamma, \quad (6.2)$$

где $\varepsilon = \sum_{k=1}^N \lambda_k$, $\mu(\gamma)$ – мера Складина, описанная в разделе 4, а $K(\lambda; \gamma)$ – некоторое ядро. Эта формула приводит к представлению Меллина–Барнса для функции перехода.

В данной статье показано, что рекуррентное интегрирование может быть реализовано по координатам x_n (см. уравнение (3.20)). Это, в свою очередь, ведет к представлению Гивенталья–Гаусса (3.21), полученному ранее в работах [6], [7] из соображений другого сорта. Интегрирование по координатам в формуле (3.20) фактически означает действие оператора $\Lambda_N(\gamma_N)$ на $(N - 1)$ -частичную собственную функцию. Функция (6.1), таким образом, может быть записана через произведение Λ -операторов, присутствующее в (3.16). Это приводит к тому, что свойства Λ -операторов, обсуждаемые в разделе 5, наследуются функцией (6.1). Свойство I, например, означает вейль-инвариантность функции перехода. Благодаря свойствам III и IV справедливо уравнение (5.7), а значит, функция перехода (6.1) удовлетворяет уравнению Бакстера

$$\hat{t}_N(\gamma_k) U_{\varepsilon, \gamma}(x) = i^{-N} U_{\varepsilon, \gamma - i\hbar \delta_k}(x) + i^N U_{\varepsilon, \gamma + i\hbar \delta_k}(x), \quad (6.3)$$

где $\delta_k = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ – k -й базисный вектор. Благодаря тому, что мера Складина $\mu(\gamma)$ обладает необходимыми трансляционными свойствами по переменным γ_i , уравнение для собственных значений

$$\hat{t}_N(u) \Psi_E(x) = t_N(u; E) \Psi_E(x),$$

где

$$t_N(u; E) = \sum_{k=0}^N (-1)^k u^{N-k} E_k,$$

эквивалентно тому, что функции $\Phi_\varepsilon(\gamma)$ удовлетворяют уравнению Бакстера

$$t_N(\gamma_k; E) \Phi_\varepsilon(\gamma) = i^N \Phi_\varepsilon(\gamma + i\hbar \delta_k) + i^{-N} \Phi_\varepsilon(\gamma - i\hbar \delta_k). \quad (6.4)$$

Это, в свою очередь, ведет к возможности представления этих функций в виде

$$\Phi_\varepsilon(\gamma_1, \dots, \gamma_{N-1}) = \prod_{j=1}^{N-1} c_\varepsilon(\gamma_j),$$

т.е. к разделению переменных (см. работу [3]).

Наличие двух видов рекуррентных формул – типа (6.2) и (3.20) – объясняется тем, что функция $\psi_\gamma(x)$ может, с одной стороны, рассматриваться как функция от x_n ,

удовлетворяющая дифференциальным уравнениям (2.16), а с другой – как функция от γ_j , определяемая некоторой системой разностных уравнений по γ_j [14], т.е. как волновая функция некоторой дуальной модели. Эта же дуальность появляется и в теории представлений. Бесконечномерное представление Гельфанда–Цейтлина алгебры Ли $\mathfrak{gl}(N)$ операторами сдвига по переменным γ_j позволяет получить интегральное представление Меллина–Барнса [15], в то время как представление Гаусса той же алгебры Ли операторами дифференцирования по x_n ведет к представлению Гаусса–Гивентали [6].

Отметим, что метод, предложенный для XXX-модели в работе [1] и развиваемый здесь для случая цепочки Тоды (включая использование диаграммной техники), может быть использован для других более сложных интегрируемых систем.

Благодарности. Автор благодарит Лабораторию теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова (ОИЯИ) и Department de Mathématiques, Université d’Angers, France за благоприятные условия для работы. Он также признателен Программе франко-русского сотрудничества по теоретической физике, в частности, профессору Ж.-М. Майе за финансовую поддержку данных исследований. Автор выражает свою благодарность С. З. Пакуляку, В. Н. Рубцову и С. М. Харчеву за полезные советы и замечания.

Список литературы

- [1] S. Derkachov, G. Korchemsky, A. Manashov, *JHEP*, **07** (2003), 047.
- [2] E. K. Sklyanin, “The quantum Toda chain”, *Nonlinear Equations in Classical and Quantum Field Theory*, Proc. Semin. (Mendon and Paris, 1983–1984), Lecture Notes in Phys., **226**, eds. N. Sanchez, H. DeVega, Springer, Berlin, 1985, 196–233.
- [3] S. Kharchev, D. Lebedev, *Lett. Math. Phys.*, **50** (1999), 53–77.
- [4] V. Pasquier, M. Gaudin, *J. Phys. A*, **25** (1992), 5243–5252.
- [5] M. Gutzwiller, *Ann. Phys.*, **133** (1981), 304–331.
- [6] A. Gerasimov, S. Kharchev, D. Lebedev, S. Oblezin, *Int. Math. Res. Notices*, **2006** (2006), Article ID 96489; [math.RT/0505310](#).
- [7] A. Givental, “Stationary phase integrals, quantum Toda lattices, flag manifolds and the mirror conjecture”, *Topics in Singularity Theory*, Dedicated to V.I. Arnold on the occasion of his 60th birthday, Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2, **180**, eds. A. Khovanskii, A. Varchenko, V. Vassiliev, AMS, Providence, RI, 1997, 103–115.
- [8] Р. Бэкстер, *Точно решаемые модели в статистической механике*, Мир, М., 1985.
- [9] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции. Т. 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены*, Наука, М., 1974.
- [10] С. М. Харчев, Д. Р. Лебедев, *Письма в ЖЭТФ*, **71**:6 (2000), 338–343.
- [11] S. Kharchev, D. Lebedev, *J. Phys. A*, **34** (2001), 2247–2258.
- [12] И. М. Гельфанд, Н. Я. Виленкин, *Обобщенные функции. Вып. 4. Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства*, Физматгиз, М., 1961.
- [13] В. С. Владимиров, *Обобщенные функции в математической физике*, Наука, М., 1976.
- [14] O. Babelon, *Lett. Math. Phys.*, **65**:3 (2003), 229–246.
- [15] A. Gerasimov, S. Kharchev, D. Lebedev, *Int. Math. Res. Not.*, **17** (2004), 823–854.

Поступила в редакцию 13.03.2006
после доработки 8.07.2006