Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. П. Самородницкий, М. Григориу, Характеристические функции стационарных состояний одномерной динамической системы с шумом Леви, *ТМФ*, 2007, том 150, номер 3, 391–408

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf5986>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 14:44:21

© 2007 г.

Г. Самородницкий*, М. Григориу*

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ СТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЙ ОДНОМЕРНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ШУМОМ ЛЕВИ

Разработан эффективный метод вычисления характеристических функций диффузионных процессов, управляемых белым шумом Леви. В основе метода лежат формула Ито для полумартингалов, дифференциальное уравнение, полученное для характеристических функций диффузионных процессов, управляемых пуассоновским белым шумом со скачками, который может не обладать конечными моментами, и приближенные представления для белого шума Леви. Численные результаты показывают, что предложенный метод является весьма точным и согласуется с предыдущими теоретическими изысканиями.

Ключевые слова: диффузия со скачками, белый шум Леви, характеристическая функция, стационарное решение, формула Ито.

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнение Фоккера–Планка – это уравнение в частных производных для плотности состояния динамической системы, управляемой гауссовым белым шумом, которое включает временную первого порядка и пространственные производные первого порядка и первого и второго порядков. Обобщения уравнения Фоккера–Планка на случай динамических систем под управлением негауссова белого шума являются более сложными. Так, например, уравнение Фоккера–Планка для плотности состояния динамической системы, управляемой пуассоновским белым шумом, содержит бесконечное число членов, состоящих из пространственных производных порядка от первого до бесконечности, и определено в том случае, если скачки соответствующего пуассоновского процесса (пуассоновского белого шума) обладают моментами любого порядка ([1], раздел 7.3.1.3; [2]). Если управляющий белый шум отвечает симметричному α -устойчивому процессу, плотность состояния системы удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных, аналогичному клас-

*Cornell University, Ithaca NY, USA. E-mail: gs18@cornell.edu, mdg12@cornell.edu

сическому уравнению Фоккера–Планка, за исключением того, что член, включающий пространственную производную второго порядка плотности состояния в классическом уравнении, заменяется членом, включающим дробную пространственную производную плотности состояния порядка α [3], [4]. Использование обобщенных вариантов классического уравнения Фоккера–Планка может быть связано с дополнительной, помимо сложности самих уравнений, трудностью. Использование данных уравнений возможно лишь для процессов диффузии, управляемых таким белым шумом Пуассона и/или Леви, который имеет плотность. Чтобы преодолеть эту трудность, мы будем работать с характеристическими функциями диффузионных процессов. Мы будем трактовать гауссов, пуассоновский и α -устойчивый белый шум как формальные производные по времени от броуновского, составного пуассоновского и симметричного α -устойчивого процесса, соответственно.

Нашей главной целью является разработка эффективного метода для вычисления характеристической функции диффузионных процессов, управляемых процессами из класса белого шума Леви; последние определяются как формальная производная симметричного α -устойчивого процесса движения Леви L_α . Метод основан на формуле Ито для полумартингалов, дифференциальном уравнении, полученном для характеристических функций диффузионных процессов, управляемых пуассоновским белым шумом со скачками, который может не обладать конечными моментами, и приближенном представлении для процесса L_α , которое состоит из больших скачков L_α или больших скачков L_α , наложенных на масштабированное броуновское движение.

Показано, что решение дифференциального уравнения для характеристической функции требует, помимо граничных условий, вытекающих из определяющих свойств самой характеристической функции, также некоторых других граничных условий типа предложенных в работе [4]. Показано также, что дифференциальные уравнения для характеристической функции диффузионных процессов, управляемых гауссовым белым шумом и белым шумом Леви, могут быть получены как предел дифференциальных уравнений для характеристических функций диффузионных процессов, управляемых пуассоновским белым шумом. Полученное в работе дифференциальное уравнение для характеристической функции диффузионных процессов, управляемых белым шумом Леви, совпадает с аналогичным уравнением в работе [3]. Предложенный приближенный метод анализа диффузионных процессов, управляемых белым шумом Леви, весьма точный и согласуется с предшествующими теоретическими изысканиями [5].

2. ФОРМУЛА ИТО ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

Пусть $X(t)$, $t \geq 0$, – вещественнозначный полумартингал. Рассмотрим отображение $X(t) \mapsto e^{iuX(t)}$ для некоторого $u \in \mathbb{R}$. Поскольку вторая производная функции $e^{iuX(t)}$ по $X(t)$ непрерывна, то к этой функции во временном интервале $[t, t']$, $0 \leq t < t'$, можно применить лемму Ито, что дает ([1], раздел 4.6.1)

$$e^{iuX(t')} - e^{iuX(t)} = \int_{t+}^{t'} iue^{iuX(s-)} dX(s) + \frac{1}{2} \int_{t+}^{t'} (iu)^2 e^{iuX(s-)} d[X, X]^c(s) +$$

$$+ \sum_{t < s \leq t'} (e^{iuX(s)} - e^{iuX(s-)} - iue^{iuX(s-)} \Delta X(s)), \quad (1)$$

где $\Delta X(s) = X(s) - X(s-)$ – скачок X в момент времени s , $[X, X]^c$ – непрерывная часть процесса квадратичной вариации $[X, X]$.

Формула (1) используется ниже при выводе уравнений для характеристической функции $\varphi(u; t) = E[e^{iuX(t)}]$ процесса $X(t)$, определяемого уравнением

$$dX(t) = -X(t-)^{2m+1} dt + dV(t), \quad t \geq 0, \quad (2)$$

где V обозначает управляющий процесс и $m \geq 0$ – целое число. Ниже в качестве процесса V мы будем рассматривать составной пуассоновский процесс, симметричный α -устойчивый процесс движения Леви L_α , процесс броуновского движения, сумму броуновского движения и составного пуассоновского процесса. Отметим, что уравнение (2) имеет строго единственное решение, поскольку его коэффициент сноса $a(x) = -x^{2m+1}$ удовлетворяет условию Липшица на компактных интервалах, $a(0) = 0$ и $a(x)$ есть убывающая функция [5]. Единственное решение X уравнения (2) есть полумартингал.

3. ПУАССОНОВСКИЙ БЕЛЫЙ ШУМ

Пусть V – составной пуассоновский процесс

$$C(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k, \quad t \geq 0, \quad (3)$$

где N – однородный пуассоновский считающий процесс с интенсивностью $\lambda > 0$, $\{Y_k\}$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, не связанные с N . Моменты скачков $\{Y_k\}$ процесса $C(t)$ могут не существовать.

Пусть $n \geq 1$ – целое число, $Y_{n,k} = Y_k 1(|Y_k| \leq n)^1$, и

$$C_n(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} Y_{n,k}, \quad t \geq 0, \quad (4)$$

– составной пуассоновский процесс, полученный из процесса $C(t)$ изменением его скачков. Обозначим через $X_n(t)$ решение уравнения (2) с $V(t) = C_n(t)$. Пусть $\Delta t > 0$ – малое приращение времени. Обозначим через $\varphi_n(u; t) = E[e^{iuX_n(t)}]$ характеристическую функцию процесса $X_n(t)$. Математическое ожидание равенства (1) для момента времени $t' = t + \Delta t$ и процесса X_n , определяемого уравнением (2) с $V = C_n$, есть

$$\begin{aligned} \varphi_n(u; t + \Delta t) - \varphi_n(u; t) = & -iuE \left[\int_{t+}^{t+\Delta t} X_n(s-)^{2m+1} e^{iuX_n(s-)} ds \right] + \\ & + E \left[\sum_{t < s \leq t+\Delta t} e^{iuX_n(s-)} (e^{iu\Delta X_n(s)} - 1) \right], \end{aligned} \quad (5)$$

¹⁾Здесь и ниже $1(A)$ – функция-индикатор: $1(A) = 1$, если A выполняется, и $1(A) = 0$ в противном случае.

поскольку $[X_n, X_n]^c(s) = 0$ и X имеет конечное число скачков на любом ограниченном временном интервале почти наверное.

Предположим, что начальный закон распределения $X_n(0)$ в уравнении (2) таков, что $E[|X_n(0)|^{2m+1}] < \infty$. Поскольку для всех $t > 0$

$$|X_n(t)| \leq |X_n(0)| + \sum_{k=1}^{N(t)} |Y_{n,k}|,$$

можно использовать теорему Фубини для изменения порядка взятия математического ожидания и интегрирования в первом члене правой части равенства (5). Поскольку $E[X_n(s-)^{2m+1} e^{iuX_n(s-)}]$ – непрерывная функция переменной s , математическое ожидание интеграла в правой части соотношения (5) равно

$$E[X_n(t)^{2m+1} e^{iuX_n(t)}] \Delta t + o(\Delta t),$$

и в силу конечности момента порядка $2m+1$ от X имеем

$$E[X_n(t)^{2m+1} e^{iuX_n(t)}] i^{-(2m+1)} \frac{\partial^{2m+1} \varphi_n(u; t)}{\partial u^{2m+1}}.$$

Второй член в правой части (5) исследуется следующим образом. Скачки X_n совпадают со скачками C_n , т.е. $\Delta X_n(s) = \Delta C_n(s)$, и C_n имеет 0, 1 и ≥ 2 скачков в интервале $(t, t + \Delta t]$ с вероятностями $P(N(\Delta t) = 0) \simeq 1 - \lambda \Delta t$, $P(N(\Delta t) = 1) \simeq \lambda \Delta t$ и $P(N(\Delta t) \geq 2) \simeq o(\Delta t)$, соответственно, в предположении $\lambda \Delta t \ll 1$. Заметим, что сумма в правой части формулы (5) мажорируется удвоенным числом скачков процесса N на интервале $(t, t + \Delta t]$. Эта сумма равна нулю, если N не имеет скачков на интервале $(t, t + \Delta t]$, т.е. $N(\Delta t) = 0$, а ее математическое ожидание на событие $\{N(\Delta t) > 1\}$ равно $o(\Delta t)$. Поэтому мы имеем

$$E\left[\sum_{t < s \leq t + \Delta t} e^{iuX_n(s-)} (e^{iu\Delta X_n(s)} - 1)\right] = \lambda \Delta t \varphi_n(u; t) (E[e^{iuY_{n,1}}] - 1) + o(\Delta t).$$

Приведенные рассмотрения показывают, что формула (5) принимает вид

$$\varphi_n(u; t + \Delta t) - \varphi_n(u; t) = \left(-iu \frac{\partial^{2m+1} \varphi_n(u; t)}{\partial u^{2m+1}} + h_n(u) \varphi_n(u; t)\right) \Delta t + o(\Delta t), \quad (6)$$

где $h_n(u) = \lambda (E[e^{iuY_{n,1}}] - 1)$. Разделив на Δt и переходя к пределу $\Delta t \rightarrow 0$ в полученном выражении, имеем

$$\frac{\partial \varphi_n(u; t)}{\partial t} = (-1)^{m+1} u \frac{\partial^{2m+1} \varphi_n(u; t)}{\partial u^{2m+1}} + h_n(u) \varphi_n(u; t), \quad n = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Уравнение (2) допускает единственное стационарное решение, которое обладает конечными моментами для $V = C_n$. Этот результат для $m = 0$ получается непосредственно, поскольку решение в этом случае может быть выписано явно, а для $m > 0$ – с помощью доводов, приведенных в работе [5]. В случае стационарного решения функция $\varphi_n(u; t)$ не зависит от t и обозначается $\varphi_{n,s}(u)$. Эта функция удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(-1)^{m+1} u \frac{d^{2m+1} \varphi_{n,s}(u)}{du^{2m+1}} + h_n(u) \varphi_{n,s}(u) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8)$$

Если скачки C_n симметричны относительно нуля, то $\varphi_{n,s}$ является вещественнозначной четной функцией, поскольку если X – решение уравнения (2) с $V = C$, то $-X$ – также решение этого уравнения с $V = -C \stackrel{d}{=} C$, где знак $\stackrel{d}{=}$ означает равенство по распределению. Следовательно, достаточно решить уравнение (7) в диапазоне $[0, \infty)$.

Рассмотрим теперь решение X уравнения (2), управляемого составным пуассоновским шумом $V = C$ вида (3). Пусть $\varphi(u; t) = E[e^{iuX(t)}]$ – характеристическая функция процесса $X(t)$. Из теоремы 5.4 работы [6] следует, что если выбрать начальные законы для последовательности решений $\{X_n, n \geq 1\}$ уравнения (2) так, что $\varphi_n(u; 0) \rightarrow \varphi(u; 0)$ для всех вещественных u при $n \rightarrow \infty$, то $\varphi_n(u; t) \rightarrow \varphi(u; t)$ для всех положительных t . Замечая также, что $h_n(u) \rightarrow h(u) = \lambda(E[e^{iuY_1}] - 1)$ при $n \rightarrow \infty$, естественно ожидать, что предельная характеристическая функция φ является решением уравнения

$$\frac{\partial \varphi(u; t)}{\partial t} = (-1)^{m+1} u \frac{\partial^{2m+1} \varphi(u; t)}{\partial u^{2m+1}} + h(u) \varphi(u; t). \quad (9)$$

Из сказанного ранее в этом разделе нам известно также, что уравнение (2) с $V = C$ допускает единственное стационарное распределение. Мы ожидаем, что характеристическая функция φ_s этого решения удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(-1)^{m+1} u \frac{d^{2m+1} \varphi_s(u)}{du^{2m+1}} + h(u) \varphi_s(u) = 0. \quad (10)$$

Докажем, что это уравнение действительно выполняется для всех $u \neq 0$. Используя аргументацию, связанную с плотностью, из раздела 4 работы [5] совместно с единственностью стационарного распределения, мы видим, что стационарное распределение решения уравнения (2) с $V = C_n$ слабо сходится к аналогичному решению уравнения (2) с $V = C$. Поэтому $\varphi_{n,s}(u) \rightarrow \varphi_s(u)$ для всех вещественных u при $n \rightarrow \infty$. Рассмотрим произвольный интервал (a_1, a_2) , $0 < a_1 < a_2 < \infty$. Тогда последовательность производных $d^{2m+1} \varphi_{n,s}(u)/du^{2m+1}$ равномерно сходится на интервале (a_1, a_2) в силу (8). Поскольку $\varphi_{n,s}(u) \rightarrow \varphi_s(u)$, мы приходим к заключению, что функция $\varphi_s(u)$ $2m + 1$ раз дифференцируема на интервале (a_1, a_2) и выписанная выше последовательность производных сходится к соответствующей производной функции $\varphi_s(u)$. Тогда уравнение (10) выполнено на интервале (a_1, a_2) , а в силу произвольности выбора этого интервала дифференциальное уравнение выполняется для всех $u \neq 0$. Мы предполагаем, что уравнение в частных производных (9) также справедливо.

Решения уравнений (7) и (8) требуют начальных и граничных и только граничных условий, соответственно. Начальное условие для уравнения (7) вытекает из распределения вероятностей для начального состояния $X_n(0)$ и имеет вид $\varphi_n(u; 0) = E[e^{iuX_n(0)}]$. Граничные условия для уравнений (7) и (8) могут быть поделены на две группы. Граничные условия первой группы следуют из определения характеристической функции и имеют следующий вид: 1) $\varphi_n(0; t) = 1$, $t \geq 0$, или $\varphi_{n,s}(0) = 1$; 2) $|\varphi_n(u; t)| \leq 1$ или $|\varphi_{n,s}(u)| \leq 1$ для всех $t \geq 0$ и $u \in \mathbb{R}$. Во всех случаях, за исключением случая $m = 0$ в уравнении (2), этих граничных условий

недостаточно для решения уравнений (7) и (8). Граничные условия второй группы связаны со свойствами $X_n(t)$. Например, функция $\varphi_n(u; t)$ имеет производную любого порядка при $u = 0$ для любого $t \geq 0$, поскольку $X_n(t)$ обладает конечными моментами любого порядка.

Выполнения аналогичных начальных и граничных условий, за исключением граничных условий второй группы, можно потребовать для уравнений (9) и (10). Эти граничные условия вытекают из результатов работы [5]. Пусть $X(t)$ – стационарное решение уравнения (2) с $V = C$, T – время последнего скачка процесса C до момента t и $U = t - T$. Тогда

$$|X(t)| = \frac{1}{(|X(T)|^{-2m} + 2m(t-T))^{1/(2m)}} \leq \frac{1}{(2mU)^{1/(2m)}}, \quad (11)$$

поскольку X есть решение уравнения $\dot{X} = -X^{2m+1}$ в интервале времени $(T, t]$. Поскольку U является экспоненциальной случайной величиной с математическим ожиданием $1/\lambda$, имеем

$$P(|X(t)| > x) \leq P\left(U \leq \frac{1}{2mx^{2m}}\right) = 1 - e^{-\lambda x^{-2m}/(2m)} \leq \frac{\lambda}{2m} x^{-2m}, \quad x > 0, \quad (12)$$

так что верхний хвост стационарного распределения $X(t)$ убывает, по крайней мере, как x^{-2m} . Соответственно, стационарное состояние X имеет конечные моменты вплоть до порядка $2m - 1$, так что его характеристическая функция удовлетворяет условиям $|\varphi^{(k)}(0)| < \infty$, $k = 1, 2, \dots, 2m - 1$, где $\varphi^{(k)}(u) = d^k \varphi(u)/du^k$. Если скачки процесса C симметричны относительно нуля, т.е. $Y_1 \stackrel{d}{=} -Y_1$, то мы имеем также $X(t) \stackrel{d}{=} -X(t)$ и

$$\varphi_s^{(1)}(0) = \varphi_s^{(3)}(0) = \dots = \varphi_s^{(2m-1)}(0) = 0. \quad (13)$$

Аналитические решения уравнений (7)–(10) могут быть получены только в специальных случаях, однако эти уравнения могут быть решены численно. Например, предположим, что процесс C имеет симметричные скачки и в уравнении (2) $m = 1$. Пусть $\bar{u} > 0$ достаточно велико, $\Delta u = \bar{u}/n$, $u_r = r \Delta u$, $\varphi_r = \varphi_s(u_r)$ и

$$\xi_r = \frac{2\lambda(\Delta u)^2}{r} (E[e^{iu_r Y_1}] - 1). \quad (14)$$

Конечно-разностная аппроксимация уравнения (10) имеет вид

$$-\varphi_{r-2} + 2\varphi_{r-1} + \xi_r \varphi_r - 2\varphi_{r+1} + \varphi_{r+2} = 0, \quad r = 1, 2, \dots, n, \quad (15)$$

и получается при использовании центральных конечных разностей для аппроксимации третьей производной функции φ_s в (10). Присоединяемые к уравнению (15) граничные условия суть $\varphi_0 = 1$, $\varphi_1 = \varphi_{-1}$ и $\varphi_{n+k} = 0$, $k \geq 1$. Первое условие – неотъемлемое свойство характеристической функции. Второе условие имеет место, поскольку характеристическая функция является вещественнозначной четной функцией. Оно также следует из конечно-разностной аппроксимации условия $\varphi'_s(0) = 0$. Третье граничное условие следует из того, что X обладает плотностью (см. приложение), что влечет за собой $\varphi_s(u) \rightarrow 0$ при $u \rightarrow \infty$.

Ниже в п. 3.1–3.3 исследуются случаи, когда управляющий шум $V = C$ имеет симметричные α -устойчивые скачки, $V = C$ имеет скачки в пространстве L_2 с нулевым средним и дисперсией, убывающей с интенсивностью пуассоновского процесса N в определении C и $V = \sigma B + C$, где σ – константа, а B – процесс обычного броуновского движения.

3.1. Пуассоновский белый шум с α -устойчивыми скачками. Предположим, что $Y_1 \sim S_\alpha(1, 0, 0)$ – симметричная α -устойчивая случайная величина с формообразующим параметром α и масштабом 1. Аргументы, использованные при выводе уравнений (7) и (8), остаются справедливыми при условии, что функция $h_n(u)$ определена подходящим образом. Тогда характеристическая функция φ_s стационарного решения уравнения (2), управляемого составным пуассоновским процессом с α -устойчивыми скачками, дается уравнением (10) с

$$h(u) = \lambda (e^{-|u|^\alpha} - 1). \quad (16)$$

Ожидается, что характеристическая функция φ переходного решения уравнения (2) удовлетворяет уравнению (9) с функцией $h(u)$, заданной формулой (16).

Уравнения, получающиеся в результате модификации уравнений (9) и (10), могут быть решены численно, например с использованием конечно-разностной формулировки (15) с $E[e^{iuY_1}] = e^{-|u|^\alpha}$. Для решения можно использовать граничные условия (13) и приведенные перед формулой (11).

3.2. Гауссов белый шум. Пусть

$$C^{(n)}(t) = \sum_{k=1}^{N^{(n)}(t)} Y_k^{(n)}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (17)$$

– последовательность составных пуассоновских процессов и пусть λ_n – интенсивность считающего пуассоновского процесса $N^{(n)}$. Характеристические функции обычного броуновского движения $B(t)$ и процесса $C^{(n)}(t)$ в (17) суть

$$\varphi_B(u; t) = E[e^{iuB(t)}] = e^{-u^2 t/2} \quad (18)$$

и ([7], раздел 3.3)

$$\varphi^{(n)}(u; t) = \exp\{\lambda_n t (E[e^{iuY_1^{(n)}}] - 1)\}. \quad (19)$$

Покажем сначала, что $\varphi^{(n)}$ в (19) сходится к φ_B в (18) при $n \rightarrow \infty$, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{(n)}(u; t) = \varphi_B(u; t) \quad \text{для всех } t \geq 0 \text{ и } u \in \mathbb{R},$$

при выполнении следующих условий: 1) скачки $Y_k^{(n)}$ процессов $C^{(n)}$ принадлежат пространству L_2 и $E[Y_k^{(n)}] = 0$, $\lambda_n E[(Y_k^{(n)})^2] = 1$ для всех $n = 1, 2, \dots$; 2) семейство случайных величин $\{Z_{n,k}^2\}$ равномерно интегрируемо, где $Z_{n,k} = \lambda_n^{1/2} Y_k^{(n)}$; 3) $\lambda_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Напомним, что семейство $\mathcal{U}$ случайных величин называется равномерно интегрируемым, если $\sup_{U \in \mathcal{U}} E[|U| 1(|U| > \xi)] \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$.

Прежде чем доказывать это утверждение, заметим, что, во-первых, управляющий шум $C^{(n)}$ имеет второй момент с теми же свойствами, что и броуновское движение

B для любого n , поскольку $E[C^{(n)}(t)] = 0$ и $E[C^{(n)}(t)C^{(n)}(s)] = t \wedge s$, во-вторых, $Z_{n,k}$ – квадратично-интегрируемая случайная величина с $E[Z_{n,k}] = 0$ и $E[Z_{n,k}^2] = 1$ для всех $n \geq 1$, в-третьих, из сходимости $\varphi^{(n)} \rightarrow \varphi_B$ следует сходимость конечномерных распределений для $C^{(n)}$ к распределениям для B , поскольку эти процессы имеют стационарные независимые приращения, и, в-четвертых, достаточно показать, что последовательность

$$C^{(n)}(t) = \sum_{k=1}^{N^{(n)}(t)} Y_k^{(n)} = \lambda_n^{-1/2} \sum_{k=1}^{N^{(n)}(t)} Z_{n,k}$$

сходится к $B(t)$ по распределению, т.е. $C^{(n)}(t)$ сходится по распределению к гауссовой случайной величине $N(0, t)$ с нулевым средним и дисперсией t . Сходимость

$$\lambda_n^{-1/2} \sum_{k=1}^{[\lambda_n t]} Z_{n,k} \xrightarrow{d} N(0, t) \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty$$

вытекает из центральной предельной теоремы Ляпунова [8], где $[\xi]$ означает наибольшее целое число, меньшее ξ . Рассмотрим последовательность случайных величин

$$W_n = \lambda_n^{-1/2} \left(\sum_{k=1}^{N_n(t)} Z_{n,k} - \sum_{k=1}^{[\lambda_n t]} Z_{n,k} \right), \quad n = 1, 2, \dots,$$

и заметим, что $E[W_n^2] = \lambda_n^{-1} E[|N_n(t) - [\lambda_n t]|] E[Z_{n,1}^2]$. Так как $\sup_{n \geq 1} E[Z_{n,1}^2] < \infty$ в силу предполагаемой равномерной интегрируемости, имеем $E[W_n^2] \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, так что $W_n \xrightarrow{\text{pr}} 0$ в силу неравенства Чебышева. Проведенное рассмотрение показывает, что последовательность

$$\lambda_n^{-1/2} \sum_{k=1}^{N_n(t)} Z_{n,k} = W_n + \sum_{k=1}^{[\lambda_n t]} Z_{n,k}$$

сходится по распределению к $N(0, t)$ при $n \rightarrow \infty$.

Рассмотрим уравнения (9) и (10), в которых функция $h(u) = \lambda(E[e^{iuY_1}] - 1)$ заменена на $\lambda_n(E[e^{iuY_1^{(n)}}] - 1)$. Решения φ_{X_n} этих уравнений суть характеристические функции для любого n . Чтобы показать, что пределы данных модификаций уравнений (9) и (10) при $n \rightarrow \infty$ дают дифференциальные уравнения для $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{X_n}$, можно использовать те же аргументы, что и в предыдущем разделе. Например, уравнение (10) дает

$$(-1)^{m+1} u \frac{d^{2m+1} \varphi_s(u)}{du^{2m+1}} - \frac{u^2}{2} \varphi_s(u) = 0 \quad (20)$$

при $n \rightarrow \infty$. Если управляющий шум $C^{(n)}$ заменяется на $\sigma C^{(n)}$, то коэффициент $-u^2/2$ функции φ_s в уравнении (20) превращается в $-(\sigma u)^2/2$. В этом случае $\sigma C^{(n)}$ сходится к масштабированному броуновскому движению σB при $n \rightarrow \infty$.

Отметим, что дифференциальные уравнения для характеристической функции процесса X в уравнении (2) с $V = B$ или $V = \sigma B$ могут быть получены непосредственно путем усреднения формулы Ито (1), соответствующего данному управляющему шуму.

3.3. Пуассоновский и гауссов белый шум. Предположим, что $V = \sigma B + C$, где B – процесс броуновского движения и $\sigma \in \mathbb{R}$ – константа. Переходная и стационарная характеристические функции процесса X в уравнении (2), управляемом процессом V , суть решения уравнений

$$\frac{\partial \varphi(u; t)}{\partial t} = (-1)^{m+1} u \frac{\partial^{2m+1} \varphi(u; t)}{\partial u^{2m+1}} - \frac{(\sigma u)^2}{2} \varphi(u; t) + \lambda (E[e^{iuY_1}] - 1) \varphi(u; t) \quad (21)$$

и

$$(-1)^{m+1} u \frac{d^{2m+1} \varphi_s(u)}{du^{2m+1}} - \frac{(\sigma u)^2}{2} \varphi_s(u) + \lambda (E[e^{iuY_1}] - 1) \varphi_s(u) = 0, \quad (22)$$

соответственно. Отметим, что скачки процесса C могут быть случайными величинами любого типа. Например, Y_1 может быть случайной величиной с нулевым средним в пространстве L_2 или α -устойчивой случайной величиной, определяемой формулой (16).

4. ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ БЕЛОГО ШУМА ЛЕВИ

Пусть X – решение уравнения (2) с управляющим процессом $V = L_\alpha$, и $\alpha \in (0, 2)$, как рассматривалось в предыдущем разделе. Целью этого раздела является построение некоторого приближения для L_α и разработка метода вычисления характеристической функции процесса X на основе этого приближения.

Составные пуассоновские процессы и α -устойчивые процессы обладают примечательными сходными чертами и различиями. Пусть $\mathcal{M}(dt, dy)$ – случайная мера, определяющая число скачков процесса в области $(t, t + \Delta t] \times (y, y + dy]$. Математическое ожидание меры $\mathcal{M}(dt, dy)$ есть $\lambda dt dF(y)$ для составного пуассоновского процесса C вида (3) и $\lambda_L(dy) dt$ для α -устойчивого процесса L_α , где F обозначает распределение скачков $\{Y_k\}$ процесса C ,

$$\lambda_L(dy) = \frac{\alpha c_\alpha}{2} |y|^{-(\alpha+1)} dy, \quad y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (23)$$

и ([9], свойство 1.2.15)

$$c_\alpha = \begin{cases} \frac{1-\alpha}{\Gamma(2-\alpha) \cos(\pi\alpha/2)}, & \alpha \neq 1, \\ \frac{2}{\pi}, & \alpha = 1. \end{cases} \quad (24)$$

Пусть Λ – произвольное борелевское множество в пространстве $\mathbb{R}$. Интеграл

$$\frac{1}{dt} \int_{\Lambda} \mathcal{M}(dt, dy) dy$$

дает среднее число скачков в множестве Λ в единицу времени. Это число равно

$$\lambda \int_{\Lambda} dF(y) \leq \lambda < \infty$$

для процесса C , но может быть конечным или бесконечным для процесса L_α в зависимости от Λ . Например, если $\Lambda = (-a, a)^c$ для некоторого $0 < a < \infty$, то

$$\begin{aligned} \frac{1}{dt} \int_{(-a, a)^c} \mathcal{M}(dt, dy) dy &= 2 \int_a^\infty \lambda_L(dy) = \frac{c_\alpha}{a^\alpha} < \infty, \\ \frac{1}{dt} \int_{(-a, a)} \mathcal{M}(dt, dy) dy &= 2 \int_{0+}^a \lambda_L(dy) = \infty, \end{aligned} \quad (25)$$

т.е. среднее число скачков процесса L_α , больших или меньших $a > 0$, конечно или бесконечно, соответственно.

4.1. Большие скачки L_α . Пусть $\{Y_{a,k}\}$ – скачки процесса L_α величины, большей $a > 0$. Рассмотрим составной пуассоновский процесс (3)

$$C_{\alpha,a}(t) = \sum_{k=1}^{N_a(t)} Y_{a,k}, \quad (26)$$

где N_a – пуассоновский считающий процесс с интенсивностью $\lambda_a = c_\alpha/a^\alpha$ и $\{Y_{a,k}\}$ – независимые одинаково распределенные случайные величины. Распределение $F_a(y)$ случайной величины $Y_{a,1}$ есть условная вероятность $P(A_y | A_a) = P(A_a \cap A_y) / P(A_a)$, где $A_a = \{|Y_{a,1}| < a\}$ и $A_y = \{Y_{a,1} < y\}$, $y \in \mathbb{R}$, или

$$\begin{aligned} F_a(y) &= \int_{(-a,a)^c \cap (-\infty, y)} \lambda_L(dz) / \int_{(-a,a)^c} \lambda_L(dz) = \frac{\alpha a^\alpha}{2} \int_{(-a,a)^c \cap (-\infty, y)} z^{-(\alpha+1)} dz = \\ &= \frac{\alpha a^\alpha}{2} \left[\frac{1}{\alpha |y|^\alpha} 1(y < -a) + \frac{1}{\alpha a^\alpha} 1(y \geq -a) + \frac{1 - (a/y)^\alpha}{\alpha a^\alpha} 1(y \geq a) \right], \quad y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (27)$$

Функция плотности и характеристическая функция для $Y_{a,1}$ суть

$$f_a(y) = \frac{\alpha a^\alpha}{2} [|y|^{-(\alpha+1)} 1(y < -a) + y^{-(\alpha+1)} 1(y \geq a)], \quad y \in \mathbb{R}, \quad (28)$$

$$\varphi_a(u) = \alpha a^\alpha \int_a^\infty \cos(uy) y^{-(\alpha+1)} dy, \quad u \in \mathbb{R}. \quad (29)$$

Асимптотическое поведение функций распределения и плотности в (27) и (28) при $y \rightarrow \infty$ есть $y^{-\alpha}$ и $y^{-(\alpha+1)}$, соответственно.

Предположим, что управляющий шум $V = L_\alpha$ в уравнении (2) аппроксимируется составным пуассоновским процессом $C_{\alpha,a}$ (26), и пусть X_a обозначает соответствующий диффузионный процесс. Характеристическая функция диффузионного процесса X_a удовлетворяет уравнению (9) или (10) с $(\lambda_a, Y_{a,1})$ вместо (λ, Y_1) , т.е. с $h_a(u) = \lambda_a(1 - E[e^{iuY_{a,1}}])$ вместо $h(u) = \lambda(1 - E[e^{iuY_1}])$. Функция $h_a(u)$ может быть вычислена из выражения

$$h_a(u) \alpha c_\alpha \int_a^\infty (1 - \cos(uy)) y^{-(\alpha+1)} dy = \alpha c_\alpha u^\alpha \int_{ua}^\infty (1 - \cos(\xi)) \xi^{-(\alpha+1)} d\xi \quad (30)$$

для $u > 0$ и сходится к

$$c_\alpha u^\alpha \int_0^\infty \xi^{-\alpha} \sin \xi d\xi$$

при $a \rightarrow 0$. Аналогичные вычисления дают $\lim_{a \rightarrow 0} h_a(u) = |u|^\alpha$.

Рассуждения и доводы, аналогичные использованным при написании уравнений (9) и (10), могут быть применены для получения дифференциальных уравнений для характеристических функций φ , φ_s диффузионного процесса X в уравнении (2) с $V = L_\alpha$. Эти уравнения получаются предельным переходом $a \rightarrow 0$ в уравнениях (9) и (10) с $h_a(u)$ вместо $h(u)$ и имеют вид

$$\frac{\partial \varphi(u; t)}{\partial t} = (-1)^{m+1} u \frac{\partial^{2m+1} \varphi(u; t)}{\partial u^{2m+1}} - \varphi(u; t) |u|^\alpha \quad (31)$$

и

$$(-1)^{m+1} u \frac{d^{2m+1} \varphi_s(u)}{du^{2m+1}} - \varphi_s(u) |u|^\alpha = 0, \quad (32)$$

где $\varphi_s(u) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(u; t)$, как и ранее.

4.2. Малые скачки L_α . Пусть $L_{\alpha,a}$ – стохастический процесс, полученный из L_α исключением скачков L_α , величина которых больше некоторого $a > 0$, т.е. процесс

$$L_{\alpha,a}(t) = L_\alpha(t) - C_{\alpha,a}(t) \quad (33)$$

с $C_{\alpha,a}$ из (26). Процессы $L_{\alpha,a}$ и $C_{\alpha,a}$ обладают следующими замечательными свойствами:

- 1) процессы $L_{\alpha,a}$ и $C_{\alpha,a}$ являются независимыми процессами Леви ([10], теорема 39);
- 2) процесс $L_{\alpha,a}$ имеет конечные абсолютные моменты любого порядка, поскольку является процессом Леви с ограниченными скачками ([10], теорема 34);
- 3) процесс $L_{\alpha,a}$ имеет нулевое среднее, поскольку его плотность является четной функцией;
- 4) дисперсия процесса $L_{\alpha,a}(t)$ линейна по t , поскольку $L_{\alpha,a}(t)$ имеет стационарные независимые приращения ([1], раздел 3.6.4);
- 5) процесс $L_{\alpha,a}(t)$ может быть аппроксимирован следующим образом [11]:

$$L_{\alpha,a}(t) \simeq \sigma(\alpha, a) B(t), \quad t > 0, \quad (34)$$

где B – обычное броуновское движение и

$$(\sigma(\alpha, a))^2 = E[(L_{\alpha,a}(1))^2] = \int_{-a}^a y^2 \lambda_L(dy) = \frac{\alpha}{2-\alpha} c_\alpha a^{2-\alpha}. \quad (35)$$

Формула (34) показывает, что, во-первых, симметричный α -устойчивый процесс Леви L_α может быть приближенно представлен в виде

$$L_\alpha(t) \simeq \sigma(\alpha, a) B(t) + C_{\alpha,a}(t), \quad (36)$$

т.е. процесс L_α может рассматриваться как сумма не зависящих друг от друга процессов масштабированного броуновского движения $\sigma(\alpha, a)B$ и составного пуассоновского процесса $C_{\alpha,a}$, и, во-вторых, характеристическая функция процесса X в уравнении (2) с $V = L_\alpha$ может быть вычислена из уравнения (21) или (22) с $\sigma(\alpha, a)$ и $Y_{\alpha,1}$ вместо σ и Y_1 , соответственно, т.е. из дифференциальных уравнений в частных производных для характеристических функций процессов диффузии, управляемых процессами вида суммы гауссова и пуассоновского белого шума.

5. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

В этом разделе представлены два примера, иллюстрирующие применение и точность методов, которые используются для вычисления характеристической функции класса диффузионных процессов, определяемых уравнением (2) с $V = L_\alpha$. В первом примере $m = 0$, так что характеристическая функция процесса X может быть выписана непосредственно, поскольку уравнение (2) имеет линейный коэффициент

сноса. Во втором примере $m = 1$. Стационарная характеристическая функция процесса X вычисляется аналитически из уравнения (32) и численно, посредством метода конечных разностей, из уравнения (10) с функцией $h_a(u)$ (30) вместо $h(u)$ и из уравнения (22) с $\sigma(\alpha, a)B + C_{\alpha, a}$ (36) вместо $\sigma B + C$. Аналитические и численные результаты сравниваются с оценками для характеристических функций процесса X , полученными по отсчетам этого процесса.

ПРИМЕР 1. Пусть $m = 0$ и $\alpha = 1$, так что уравнение (32) принимает вид

$$\varphi'_s(u) + \varphi_s(u) = 0 \quad \text{для } u \geq 0.$$

Для решения этого уравнения требуется лишь граничное условие $\varphi_s(0) = 1$; решение имеет вид $\varphi_s(u) = e^{-u}$, $u \geq 0$. Поскольку φ_s – четная функция, имеем $\varphi_s(u) = e^{-|u|}$, $u \in \mathbb{R}$.

Это правильный результат, поскольку процесс X удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению $dX(t) = -X(t-)dt + dL_\alpha(t)$, так что случайная величина $X(t)$ является симметричной α -устойчивой величиной с масштабом, возведение которого в степень α дает $(1 - e^{-\alpha t})/\alpha$ ([7], пример 3.27), и характеристической функцией

$$\varphi(u; t) = e^{-|u|^\alpha(1 - e^{-\alpha t})/\alpha} \rightarrow \varphi_s(u) = e^{-|u|^\alpha/\alpha}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (37)$$

ПРИМЕР 2. Пусть $m = 1$ и $\alpha = 1$, так что уравнение (32) принимает вид

$$\varphi'''_s(u) - \varphi_s(u) = 0 \quad \text{для } u \geq 0.$$

Общее решение этого уравнения есть

$$\varphi_s(u) = c_1 e^u + e^{-u/2} \left(c_2 \cos \frac{\sqrt{3}u}{2} + c_3 \sin \frac{\sqrt{3}|u|}{2} \right), \quad u \geq 0, \quad (38)$$

где c_1, c_2, c_3 – некоторые константы. Из граничных условий $\varphi_s(0) = 1$ и $|\varphi_s(u)| \leq 1$ следует $c_1 = 0$ и $c_2 = 1$. Вместо предложенного в работе [4] граничного условия $\varphi_s(\infty) = 0$, используем условие $|\varphi_s(u)| \leq 1$. Граничное условие $\varphi'_s(0) = 0$ в (13) дает $c_3 = 1/\sqrt{3}$, так что

$$\varphi_s(u) = e^{-|u|/2} \left(\cos \frac{\sqrt{3}u}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}|u|}{2} \right), \quad u \in \mathbb{R}. \quad (39)$$

Это выражение для характеристической функции процесса $X(t)$ совпадает с соответствующим выражением в работе [4].

Преобразование Фурье

$$f_s(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-iux} \varphi_s(u) du = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos(ux) \varphi_s(u) du \quad (40)$$

функции φ_s , т.е. стационарная плотность f_s процесса X , имеет вид

$$f_s(x) = \frac{1}{2\pi^2(a_1^2 + 1/4)(a_2^2 + 1/4)}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (41)$$

Рис. 1. Оценка (сплошная линия) и аналитическое выражение (39) (штриховая линия) функции φ_s .

где $a_1 = x + \sqrt{3}/2$ и $a_2 = -x + \sqrt{3}/2$. Следовательно, для стационарной плотности процесса X имеем $f_s(x) \sim O(x^{-4})$ при $|x| \rightarrow \infty$, что согласуется с полученными в работе [5] результатами.

На рис. 1 представлены оценка функции φ_s и сама функция (39). Оценка была получена по 1000 независимым отсчетам $X(t)$ в момент времени $t = 10$. Наблюдается очень хорошее согласие между оцененной и вычисленной характеристическими функциями.

Для генерации отсчетов X и получения оценки функции φ_s на рис. 1 была использована следующая конечно-разностная аппроксимация вперед

$$X(t + \Delta t) = X(t) - X(t)^3 \Delta t + Z \Delta t, \quad (42)$$

где $\Delta t > 0$ — шаг по времени, а Z обозначает случайную величину $S_1(1, 0, 0)$. Отсчеты Z при $\alpha = 1$ генерировались из отсчетов случайной величины U , равномерно распределенной в интервале $(-\pi/2, \pi/2)$, с помощью преобразования $Z = \operatorname{tg} U$. В процессе вычислений открытый интервал $(-\pi/2, \pi/2)$, определяющий диапазон значений U , был заменен замкнутым интервалом $[-\pi/2 + \varepsilon, \pi/2 - \varepsilon]$ с некоторым значением $\varepsilon > 0$. Для получения надежных оценок функции φ_s при моделировании нужно использовать относительно малые значения Δt и ε . Численные эксперименты показали, что оценки функции φ_s становятся устойчивыми при значениях $\Delta t \leq 10^{-5}$ и $\varepsilon \leq 10^{-8}$. Результаты, приведенные на рис. 1, получены для значений $\Delta t = 5 \cdot 10^{-6}$ и $\varepsilon = 10^{-8}$.

На рис. 2 исследуется точность приближения для процесса L_α , которое состоит из больших скачков этого процесса, т.е. приближения $L_\alpha \simeq C_{\alpha,a}$ с $C_{\alpha,a}$ из (26). На

Рис. 2. Оценка функции φ_s (жирная сплошная линия) и конечно-разностные решения φ_s для диффузионных процессов, управляемых процессом $V = C_{\alpha,a}$ с $\alpha = 1$ и $a = 0.1$ (тонкая сплошная линия), $a = 0.5$ (пунктирная линия) и $a = 1$ (штриховая линия).

рисунке представлены оценка характеристической функции φ_s (рис. 1) и конечно-разностные решения φ_s для стационарной характеристической функции процесса X_a (2) с $V = C_{\alpha,a}$, $\alpha = 1$ и $m = 1$. Конечно-разностные результаты были получены из уравнения (15) с $\lambda = \lambda_a$, $E[e^{iuY_1}] = \varphi_a(u)$, $\bar{u} = 20$, $n = 12000$ и граничных условий $\varphi_0 = 1$, $\varphi_1 = \varphi_{-1}$ и $\varphi_{n+k} = 0$, $k \geq 1$. Графики показывают, что конечно-разностные решения для характеристической функции φ_s , во-первых, не зависят от a в малой окрестности точки $u = 0$, во-вторых, не отличаются от оценки функции φ_s около точки $u = 0$, в-третьих, отличаются от оценки функции φ_s и между собой вдали от точки $u = 0$ для относительно больших значений a , и, в-четвертых, приближаются к оценке функции φ_s при $a \rightarrow 0$.

На рис. 3 в логарифмическом масштабе представлены верхние хвосты плотностей f_s , полученные из конечно-разностных решений для характеристических функций φ_s , приведенных на рис. 2, посредством преобразования Фурье, и функция x^{-4} , представляющая асимптотическое поведение f_s (41). Верхний хвост плотности f_s слабо зависит от значения a и демонстрирует приблизительно степенное x^{-4} поведение. Сходимость верхних хвостов плотности процесса X_a согласуется с теоретическими результатами работы [5].

На рис. 4 исследуется точность приближения для процесса L_α , которое состоит из больших скачков этого процесса, наложенных на масштабированное броуновское движение, т.е. приближения $L_\alpha \simeq \sigma(\alpha, a)B + C_{\alpha,a}$ (36). На рисунке представлены характеристические функции для диффузионных процессов, определяемых уравнением (2) с $V = C_{\alpha,a}$ и $V = \sigma(\alpha, a)B + C_{\alpha,a}$ и $a = 1$, а также оценка характеристической

Рис. 3. Верхний хвост плотности f_s , соответствующий конечно-разностным решениям для характеристических функций φ_s , приведенных на рис. 2 (обозначения те же), и функция x^{-4} (жирная сплошная линия).

функции процесса $X(t)$ (2) с $V = L_\alpha$. Согласование между характеристическими функциями диффузионного процесса под управлением процесса $\sigma(\alpha, a)B + C_{\alpha, a}$ и процесса L_α впечатляет. Масштаб $\sigma(\alpha, a)$ броуновского движения получен из формулы (35) с $\alpha = 1$, $a = 1$ и c_α из (24) и равен $\sigma(1, 1) = \sqrt{2/\pi}$.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан эффективный метод вычисления характеристических функций диффузионных процессов, управляемых процессами типа белого шума Леви, которые определяются как формальная производная симметричных α -устойчивых процессов движения Леви L_α . Метод основан на формуле Ито для полумартингалов, дифференциальном уравнении, полученном для характеристических функций диффузионных процессов, управляемых процессами, которые представляют собой сумму составного пуассоновского процесса и броуновского движения, и приближенном представлении для процесса L_α , которое состоит из больших скачков L_α или больших скачков L_α , наложенных на масштабированные процессы броуновского движения. Численные результаты показывают, что предложенный метод является весьма точным и согласуется с предыдущими теоретическими изысканиями [5].

Примечательным результатом работы является получение дифференциального уравнения для характеристической функции диффузионных процессов, управляемых составными пуассоновскими процессами со скачками, которые могут не обладать конечными моментами. Этот результат был использован при получении дифференциальных уравнений в частных производных для характеристической функции диффузионных процессов, управляемых гауссовым белым шумом или белым

Рис. 4. Оценка функции φ_s (тонкая сплошная линия) и конечно-разностные решения φ_s для диффузионных процессов, управляемых процессами $C_{\alpha,a}$ (жирная сплошная линия) и $\sigma(\alpha,a)B + C_{\alpha,a}$ с $a = 1$, $\alpha = 1$ и $\sigma(\alpha,a) = \sqrt{2/\pi}$ (штриховая линия).

шумом Леви, как предела дифференциальных уравнений в частных производных для диффузионных процессов, управляемых пуассоновским белым шумом. Эти уравнения и приближения для симметричных α -устойчивых процессов движения Леви были использованы для разработки эффективного метода анализа диффузионных процессов, управляемых белым шумом Леви. Полученное в работе дифференциальное уравнение для характеристической функции диффузионного процесса, управляемого белым шумом Леви, совпадает с уравнением, представленным в работе [4].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Существование плотности

Покажем, что стационарный вариант диффузионного процесса $X(t)$ (2) с составным пуассоновским управляющим шумом $V = C$ (3) имеет плотность. Наша аргументация не может быть применена к диффузионным процессам, управляемым общими α -устойчивыми процессами движения Леви. Существование плотности решений уравнения (2), управляемых α -устойчивыми процессами движения Леви с $0 < \alpha < 1$, для любого положительного момента времени может быть выведено при использовании подходящей техники обрезания и обращении к теореме 1.2 работы [12]. Мы полагаем, что стационарное решение имеет плотность для всех $0 < \alpha < 2$.

Существование плотности для стационарного решения в случае составного пуассоновского управляющего шума вытекает из следующих двух утверждений. Как

было сказано выше, процесс $X(t)$, $t \geq 0$, есть стационарный процесс, удовлетворяющий уравнению (2) с $V = C$ вида (3).

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Стационарное решение $X(0)$ имеет плотность в $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы должны показать, что для любого $\varepsilon > 0$ $X(0)$ имеет плотность на множестве $\{x: |x| \geq \varepsilon\}$. Для упрощения обозначений рассмотрим положительные x и $\varepsilon = 1$. Существование конечной плотности будет доказано, как только мы докажем, что существует конечная константа $c > 0$ такая, что для любого интервала $(a, b]$ с $1 \leq a < b$ имеет место неравенство

$$P(a < X(t) \leq b) \leq c(b - a). \quad (\text{П.1})$$

Обозначим $p = P(X(0) \in (a, b])$. Предположим, что последний скачок X имеет место до момента времени $T = 0$ и X не имеет скачков вплоть до момента времени $t > 0$. Тогда в силу (11)

$$|X(t)| = (|X(0)|^{-2m} + 2mt)^{-1/(2m)}, \quad (\text{П.2})$$

так что

$$|X(t_1)| = (|X(0)|^{-2m} + a^{-2m} - b^{-2m})^{-1/(2m)} \quad (\text{П.3})$$

в момент времени $t_1 = (a^{-2m} - b^{-2m})/(2m)$ при условии, что X не имеет скачков в интервале $(0, t_1)$. Если $X(0) \in (a, b]$, имеем $X(t_1) \in (a_1, a)$, $a_1 = (2a^{-2m} - b^{-2m})^{-1/(2m)}$, и в силу стационарности

$$P(X(0) \in (a_1, a]) = P(X(t_1) \in (a_1, a]) \geq pe^{-\lambda t_1}. \quad (\text{П.4})$$

Интервалы $(a_1, a]$ и $(a, b]$ являются непересекающимися.

Предположим теперь, что $X(0) \in (a_1, a]$, и рассмотрим момент времени $t_2 = (a_1^{-2m} - a^{-2m})/(2m) = t_1$. Тогда $X(t_2) = X(t_1)$ принимает значения в интервале $(a_2, a_1]$ с $a_2 = (2a_1^{-2m} - a^{-2m})^{-1/(2m)}$. Интервалы $(a_2, a_1]$ и $(a_1, a]$ не пересекаются, и в силу стационарности и неравенства (П.4) имеем

$$\begin{aligned} P(X(0) \in (a_2, a_1)) &= P(X(t_1) \in (a_2, a_1)) \geq \\ &\geq P(X(0) \in (a_1, a)) e^{-\lambda t_1} \geq pe^{-2\lambda t_1}. \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

Продолжая в том же духе, мы строим непересекающиеся интервалы $I_j = (a_j, b_j]$ для $j = 0, 1, 2, \dots$ и $a_0 = a$, $b_0 = b$ с $P(X(0) \in I_j) \geq pe^{-j\lambda t_1}$ для всех j . Поскольку интервалы I_j не пересекаются, мы должны иметь $P(\bigcup_{j=1}^{\infty} \{X(0) \in I_j\}) \leq 1$, так что

$$\begin{aligned} 1 &\geq \sum_{j=0}^{\infty} P(X(0) \in I_j) \geq \sum_{j=0}^{\infty} pe^{-j\lambda t_1} = p \frac{1}{1 - e^{-\lambda t_1}}, \\ p &= P(X(0) \in (a, b]) \leq 1 - e^{-\lambda t_1} \leq \lambda t_1 \leq \lambda(b - a), \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

т.е. заявленное свойство для $P(X(0) \in (a, b])$. Чтобы установить окончательную верхнюю границу для p , используем неравенство $a^{-2m} - b^{-2m} \leq 2m(b - a)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Стационарное решение $X(0)$ не имеет атома в точке 0.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть T_1 обозначает первый скачок C . Вероятность события $\{X(t) = 0\}$ для некоторого $t \geq 0$ есть

$$\begin{aligned} P(X(t) = 0) &= P(X(t) = 0, T_1 > t) + P(X(t) = 0, T_1 \leq t) \leq \\ &\leq P(T_1 > t) + P(X(t) = 0, T_1 \leq t) = \\ &= e^{-\lambda t} + P(X(t) = 0, T_1 \leq t). \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

Покажем, что

$$P(X(t) = 0 \text{ для некоторого } t \geq T_1) = 0, \quad (\text{П.8})$$

так что $P(X(t) = 0) \leq e^{-\lambda t}$ влечет $P(X(t) = 0) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Поскольку $P(X(t) = 0) = P(X(0) = 0)$ для любого $t \geq 0$ в силу стационарности, это даст искомое утверждение.

Справедливость (П.8) следует из двух наблюдений. Во-первых, в силу (П.2) процесс $X(t)$ не может попадать в нуль в промежутке времени между скачками управляющего шума. Во-вторых, для моментов времени, отвечающих скачкам управляющего шума, мы имеем рекуррентную формулу (см. (11))

$$|X(T_j)| = (|X(T_{j-1})|^{-2m} + 2mE_j)^{-1/(2m)} + \Delta C(T_j), \quad (\text{П.9})$$

где T_j обозначают времена скачков C , $E_j = T_j - T_{j-1}$ – независимые экспоненциальные случайные величины со средним $1/\lambda$, $\Delta C(T_j)$ – скачки C в моменты времени T_j . Непрерывность экспоненциальных случайных величин E_j в формуле (П.9) показывает, что событие $\{X(T_j) = 0\}$ имеет нулевую вероятность.

Список литературы

- [1] M. Grigoriu, *Stochastic Calculus. Applications in Science and Engineering*, Birkhäuser, Boston, 2002.
- [2] M. Grigoriu, *Probab. Eng. Mech.*, **19** (2004), 449–461.
- [3] А. В. Чечкин, В. Ю. Гончар, *ЖЭТФ*, **118**:3 (2000), 730–748.
- [4] В. Ю. Гончар, Л. В. Танатаров, А. В. Чечкин, *ТМФ*, **131**:1 (2002), 162–176.
- [5] G. Samorodnitsky, M. Grigoriu, *Stoch. Proc. Appl.*, **105**:1 (2003), 69–97.
- [6] T. G. Kurtz, P. Protter, *Ann. Probab.*, **19**:3 (1991), 1035–1070.
- [7] M. Grigoriu, *Applied Non-Gaussian Processes: Examples, Theory, Simulation, Linear Random Vibration, and MATLAB Solutions*, Prentice Hall PTR, Englewoods Cliffs, NJ, 1995.
- [8] Б. В. Гнеденко, *Курс теории вероятностей*, Мир, М., 1988.
- [9] G. Samorodnitsky, M. S. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Random Processes. Stochastic Models with Infinite Variance*, Chapman & Hall, N. Y., 1994.
- [10] P. Protter, *Stochastic Integration and Differential Equations*, Appl. Math. (N. Y.), **21**, Springer, Berlin, 1990.
- [11] S. Asmussen, J. Rosiński, *J. Appl. Probab.*, **38** (2001), 482–493.
- [12] N. Fournier, S. Méléard, *Bernoulli*, **8**:4 (2002), 537–558.

Поступила в редакцию 14.04.2006