Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Е. Бурланков, Генерация мод полей на трехмерной
сфере, *ТМФ*, 2007, том 150, номер 3, 417–440

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf5988>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 03:35:27

© 2007 г.

Д. Е. Бурланков*

ГЕНЕРАЦИЯ МОД ПОЛЕЙ НА ТРЕХМЕРНОЙ СФЕРЕ

Метод Ли-генерации тензорных полей, являющийся единым для полей различной тензорной структуры, применяется для построения полной системы скалярных, векторных, симметричных тензорных и спинорных полей на трехмерной сфере. В явном виде построен оператор Паули. Показана роль спина в формировании серий мод.

Ключевые слова: Ли-вариация, трехмерная сфера, поля Киллинга, моды физических полей.

1. ВВЕДЕНИЕ

Мысль о том, что наше трехмерное пространство, возможно, является не плоским, а может представлять из себя трехмерную сферу, высказал еще в XIX веке Риман [1]. В XX веке уже на основе техники общей теории относительности такие модели были рассмотрены де Ситтером и Эйнштейном, а затем Фридманом в эпохальной работе [2]. Космологический феномен “ось зла” (см., например, [3]) также в значительной степени обращает наше внимание на трехмерную сферу. Среди гипотез, выдвигаемых для объяснения этого космологического феномена, существует и гипотеза о малых колебательных модах сферического мира. Чтобы принять или отвергнуть эту гипотезу, нужно сравнить наблюдаемую картину с получаемыми в расчетах конфигурациями мод слабых деформаций сферы.

Однако техника работы с полями на трехмерной сфере еще не достигла необходимого уровня математической строгости. Так, например, в работе [4], рассматривающей электромагнитное поле в трехмерном сферическом пространстве, автор использует не какую-либо стандартную технику, а остроумный эвристический подход, записывая для сферы уравнения электромагнитных волн в евклидовом пространстве с переменной диэлектрической проницаемостью.

В пионерской работе Лифшица [5] о флуктуациях трехмерной сферы, вышедшей 60 лет назад, также ставились задачи более общего характера, и конкретный расчет конфигураций колебательных мод в ней отсутствует. В общей теории относительности помимо работы Лифшица имеется довольно много работ по флуктуациям

*Нижегородский государственный университет, Нижний Новгород, Россия.
E-mail: burlankov@phys.unn.ru

метрики того или иного вида (см., например, [6], [7]), однако в них рассматриваются не сами моды флуктуаций, а проблемы релятивистского описания их динамики, и в явном виде моды не строятся.

В данной работе ставится задача явного описания мод полей различной тензорной структуры, в том числе и геометрических флуктуаций трехмерной сферы, для чего разработан метод *Ли-генерации*. С помощью этого метода также дано систематическое описание мод скалярных, векторных и спинорных полей на трехмерной сфере. Важной особенностью разложения по собственным модам является независимость угловой конфигурации мод от динамики радиуса: в зависимости от постоянства или переменности радиуса меняется амплитуда каждой моды в отдельности, но не угловая конфигурация мод.

Метод Ли-генерации полей различной тензорной структуры на сфере состоит в следующем:

- 1) выбирается система координат для предельно простого описания некоторых структур исследуемого поля (базовых полей);
- 2) строятся уравнения на собственные функции базовых полей и находятся их решения;
- 3) полная система решений находится Ли-вариациями базовых и вновь полученных полей полями Киллинга.

2. МЕТРИКА И ПОЛЯ КИЛЛИНГА

Выберем метрику трехмерной сферы в виде

$$dl^2 = \frac{dx^2}{1-x^2} + x^2 du^2 + (1-x^2) dw^2, \quad (1)$$

в котором явно выделены два вектора Киллинга – сдвиги по u и w .

Основным инструментом в методе Ли-генерации являются векторы Киллинга, количество которых на сфере, инвариантной относительно шестимерной группы вращений $O(4)$, равно шести. Они разбиваются на две коммутирующие группы V и W (см. [8]). Прежде всего, это операторы сдвига по углам u и w (контравариантные компоненты векторов представлены столбцами):

$$V_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad W_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Эти векторы вместе с остальными четырьмя образуют две группы (V и W), каждая из трех векторов:

$$V_1 = \begin{pmatrix} \sin(u+w) \frac{\sqrt{1-x^2}}{2} \\ \cos(u+w) \frac{\sqrt{1-x^2}}{2x} \\ -\cos(u+w) \frac{x}{2\sqrt{1-x^2}} \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} \cos(u+w) \frac{\sqrt{1-x^2}}{2} \\ -\sin(u+w) \frac{\sqrt{1-x^2}}{2x} \\ \sin(u+w) \frac{x}{2\sqrt{1-x^2}} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$W_1 = \begin{pmatrix} \sin(u-w) \frac{\sqrt{1-x^2}}{2} \\ \cos(u-w) \frac{\sqrt{1-x^2}}{2x} \\ \cos(u-w) \frac{x}{2\sqrt{1-x^2}} \end{pmatrix}, \quad W_2 = \begin{pmatrix} \cos(u-w) \frac{\sqrt{1-x^2}}{2} \\ -\sin(u-w) \frac{\sqrt{1-x^2}}{2x} \\ -\sin(u-w) \frac{x}{2\sqrt{1-x^2}} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Любой вектор из группы V коммутирует с любым вектором из группы W (как дифференциальные операторы первого порядка), а внутри групп они коммутируют по правилам коммутации векторов Киллинга трехмерной группы вращений:

$$\begin{aligned} [V_1, V_2] &= V_3, & [V_2, V_3] &= V_1, & [V_3, V_1] &= V_2, \\ [W_1, W_2] &= W_3, & [W_2, W_3] &= W_1, & [W_3, W_1] &= W_2. \end{aligned}$$

Как и на двумерной сфере, более эффективными оказываются комплексные комбинации:

$$V_+ = V_1 - iV_2 = e^{i(u+w)} \begin{pmatrix} -i \frac{\sqrt{1-x^2}}{2} \\ \frac{\sqrt{1-x^2}}{2x} \\ -\frac{x}{2\sqrt{1-x^2}} \end{pmatrix}, \quad V_- = V_1 + iV_2 = \bar{V}_+. \quad (5)$$

$$W_+ = W_1 - iW_2 = e^{i(u-w)} \begin{pmatrix} -i \frac{\sqrt{1-x^2}}{2} \\ \frac{\sqrt{1-x^2}}{2x} \\ \frac{x}{2\sqrt{1-x^2}} \end{pmatrix}, \quad \widehat{W}_- = W_1 + iW_2 = \bar{W}_+. \quad (6)$$

Коммутационные соотношения между ними аналогичны соотношениям на двумерной сфере:

$$\begin{aligned} [V_+, V_-] &= 2iV_3, & [V_3, V_+] &= iV_+, & [V_3, V_-] &= -iV_-, \\ [W_+, W_-] &= 2iW_3, & [W_3, W_+] &= iW_+, & [W_3, W_-] &= -iW_-. \end{aligned} \quad (7)$$

3. ЛИ-ГЕНЕРАЦИЯ МОД

3.1. Ли-преобразования тензорных полей. При бесконечно малом преобразовании координат в n -мерном пространстве $\tilde{x}^i = x^i - \varepsilon \xi^i(x)$ происходит Ли-вариация любого тензорного поля (для примера выбран тензор третьего ранга T_{ij}^m):

$$\delta_\xi T_{ij}^m = -\xi_{,s}^m T_{ij}^s + \xi_{,i}^s T_{sj}^m + \xi_{,j}^s T_{is}^m + \xi^s T_{ij,s}^m \equiv \hat{\xi} T_{ij}^m, \quad i, j, m, s = 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

Это линейный оператор в пространстве тензорных полей T_{ij}^m . Для полей различных тензорных размерностей явный вид этих операторов различен, однако коммутатор операторов, определяемых двумя векторными полями ξ и η , равен Ли-оператору их коммутатора. Этим определяется единство приложения метода к полям произвольной тензорной структуры.

Таким образом, обозначив через $(\widehat{V}_+, \widehat{V}_-, \widehat{V}_3)$, $(\widehat{W}_+, \widehat{W}_-, \widehat{W}_3)$ операторы Ли-вариаций тензорных полей на трехмерной сфере, определяемые соответствующими полями Киллинга, получаем механизм преобразования одних мод в другие при сохранении метрики пространства.

Так как компоненты векторов Киллинга V_3 и W_3 суть константы, то Ли-вариация тензорных полей, определяемых ими, есть просто операторы дифференцирования:

$$\widehat{V}_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial w} \right), \quad \widehat{W}_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial w} \right). \quad (9)$$

Все моды ищутся как собственные векторы операторов $\widehat{V}_3$, $\widehat{W}_3$, так что зависимость тензоров от координат x , u , w определяется как

$$\mathbf{h}^n(x, u, w) = \mathbf{h}_{k,m}^n(x) e^{i(ku + mw)} \equiv \mathbf{h}_{k,m}^n \quad (10)$$

при неопределенной пока зависимости от x . Здесь k и m – это не тензорные индексы, а целые числа, определяющие собственные значения операторов $\widehat{V}_3$, $\widehat{W}_3$:

$$\widehat{V}_3 \mathbf{h}_{k,m}^n = i \frac{k+m}{2} \mathbf{h}_{k,m}^n, \quad \widehat{W}_3 \mathbf{h}_{k,m}^n = i \frac{k-m}{2} \mathbf{h}_{k,m}^n. \quad (11)$$

Индекс n определяет принадлежность данной моды к группе собственных векторов оператора типа лапласиана с собственным значением λ_n .

3.2. Операторы сдвига. Операторы $\widehat{V}_+$, $\widehat{V}_-$, $\widehat{W}_+$, $\widehat{W}_-$ преобразуют моду $\mathbf{h}_{k,m}^n$ в моду с соседними значениями индексов k и m :

$$\begin{aligned} \widehat{V}_+ \mathbf{h}_{k,m}^n &= c_{nkm}^1 \mathbf{h}_{k+1,m+1}^n, & \widehat{V}_- \mathbf{h}_{k,m}^n &= c_{nkm}^2 \mathbf{h}_{k-1,m-1}^n, \\ \widehat{W}_+ \mathbf{h}_{k,m}^n &= c_{nkm}^3 \mathbf{h}_{k+1,m-1}^n, & \widehat{W}_- \mathbf{h}_{k,m}^n &= c_{nkm}^4 \mathbf{h}_{k-1,m+1}^n. \end{aligned} \quad (12)$$

Так как векторы Киллинга не меняют метрики, то собственное значение λ_n оператора, определяемого метрикой, для того или иного поля (оператора Лапласа для скаляров, rot rot для векторного поля, $\delta \widehat{R}$ для тензорного поля) не меняется, т.е. индекс n остается неизменным. Константы c_{nkm}^i связаны с выбранной нормировкой.

3.3. Граничные моды. При заданном n пространство мод является конечным, поэтому если на какую-то моду $\mathbf{h}_{k,m}^n$ многократно действовать, например, оператором $\widehat{V}_+$, то новые моды будут генерироваться не бесконечно, а для какого-то значения пары (k, m) действие этого оператора даст тензор, все компоненты которого нули, т.е. нулевой тензор.

Ненулевую моду, которую оператор $\widehat{V}_+$ обращает в нуль, назовем *верхней граничной модой*. Аналогично ненулевые моды, обращаемые в нуль операторами $\widehat{V}_-$, $\widehat{W}_-$, $\widehat{W}_+$, назовем соответственно *нижней, левой и правой граничными модами*.

Пусть $\mathbf{h}_{k,m}^n$ – верхняя граничная мода, тогда моды $\mathbf{h}_{k+l,m-l}^n$ при любом целом l (положительном или отрицательном) являются либо верхней граничной модой, либо нулем. Действительно, $\mathbf{h}_{k+l,m-l}^n = (\widehat{W}_+)^l \mathbf{h}_{k,m}^n$ (при отрицательном l берется соответствующая степень оператора $\widehat{W}_-$). Но операторы $\widehat{V}$ и $\widehat{W}$ коммутируют, поэтому

$$\widehat{V}_+ \mathbf{h}_{k+l,m-l}^n = c \widehat{V}_+ (\widehat{W}_+)^l \mathbf{h}_{k,m}^n = c (\widehat{W}_+)^l \widehat{V}_+ \mathbf{h}_{k,m}^n = 0.$$

Таким образом, все моды с тем же значением $k+m$ также являются либо верхними граничными, либо нулевыми. Это утверждение справедливо и для нижних граничных мод.

Аналогично для левых и правых граничных мод: если $\mathbf{h}_{k,m}^n$ является граничной, то любая мода с тем же значением $k-m$ либо является граничной, либо равна нулю.

3.4. Классифицирующие операторы. Введем операторы

$$\begin{aligned}\widehat{V}_{+-} &= \widehat{V}_+ \widehat{V}_-, & \widehat{V}_{-+} &= \widehat{V}_- \widehat{V}_+, \\ \widehat{W}_{+-} &= \widehat{W}_+ \widehat{W}_-, & \widehat{W}_{-+} &= \widehat{W}_- \widehat{W}_+.\end{aligned}\quad (13)$$

Как и соответствующий оператор в группе вращений, оператор $\widehat{V}_{+-}$, например, коммутирует с оператором $\widehat{V}_3$ и, естественно, с любым оператором из группы W . Поэтому операторы $\widehat{V}_{+-}$, $\widehat{W}_{+-}$, $\widehat{V}_3$ и $\widehat{W}_3$ коммутируют друг с другом.

Таким образом, тензорные моды можно искать как собственные векторы операторов $\widehat{V}_3$, $\widehat{W}_3$, $\widehat{V}_{+-}$, $\widehat{W}_{+-}$:

$$\widehat{V}_{+-} f_{k,m} = -\mu_{k,m} f_{k,m}, \quad \widehat{W}_{+-} f_{k,m} = -\nu_{k,m} f_{k,m}. \quad (14)$$

В силу коммутационных соотношений (7) имеется линейная зависимость операторов $\widehat{V}_{+-}$, $\widehat{V}_{-+}$ и $\widehat{W}_{+-}$, $\widehat{W}_{-+}$ соответственно с операторами $\widehat{V}_3$ и $\widehat{W}_3$:

$$\widehat{V}_{+-} - \widehat{V}_{-+} = 2i\widehat{V}_3, \quad \widehat{W}_{+-} - \widehat{W}_{-+} = 2i\widehat{W}_3. \quad (15)$$

Пусть $\mathbf{h}_{k,m}^n$ является верхней граничной модой. Каковы соответствующие ей собственные значения операторов $\widehat{V}_{+-}$ и $\widehat{V}_{-+}$? Так как $\widehat{V}_{-+} = \widehat{V}_- \widehat{V}_+$, а $\widehat{V}_+ \mathbf{h}_{k,m}^n = 0$, то $\widehat{V}_{-+} \mathbf{h}_{k,m}^n = 0$. Это один из важных признаков граничной моды. Аналогично нижние, левые и правые граничные моды имеют нулевые собственные значения операторов $\widehat{V}_{+-}$, $\widehat{W}_{+-}$, $\widehat{W}_{-+}$.

Подействуем теперь на верхнюю граничную моду $\mathbf{h}_{k_t, m_t}^n$ оператором $\widehat{V}_{+-}$. Из коммутационных соотношений (14) следует, что

$$\widehat{V}_{+-} \mathbf{h}_{k_t, m_t}^n = (\widehat{V}_{-+} + 2i\widehat{V}_3) \mathbf{h}_{k_t, m_t}^n = -(k_t + m_t) \mathbf{h}_{k_t, m_t}^n. \quad (16)$$

Такое же собственное значение имеет оператор $\widehat{V}_{-+}$ на следующей от границы моде $\mathbf{h}_{k_t-1, m_t-1}^n = c\widehat{V}_+ \mathbf{h}_{k_t, m_t}^n$ (так как собственные значения не зависят от множителя собственного вектора, то константу c мы будем опускать). Действительно, для любой, не только граничной, моды, если $\widehat{V}_{+-} \mathbf{h}_{k,m}^n = \mu \mathbf{h}_{k,m}^n$, то

$$\widehat{V}_{-+} \mathbf{h}_{k-1, m-1}^n = \widehat{V}_{-+} (\widehat{V}_- \mathbf{h}_{k,m}^n) = \widehat{V}_- (\widehat{V}_+ \widehat{V}_-) \mathbf{h}_{k,m}^n = \mu (\widehat{V}_- \mathbf{h}_{k,m}^n). \quad (17)$$

Оператор же $\widehat{V}_{+-}$ на этой моде имеет собственное значение

$$\widehat{V}_{+-} \mathbf{h}_{k-1, m-1}^n = (\widehat{V}_{-+} + 2i\widehat{V}_3) \mathbf{h}_{k-1, m-1}^n = \mu - (k + m - 2).$$

Таким образом, собственное значение оператора $\widehat{V}_{+-}$ на верхней граничной моде равно $-(k_t + m_t)$, а на следующей $[-(k_t + m_t) - (k_t + m_t - 2)]$. Отступление от верхней границы на l шагов путем l -кратного применения оператора $\widehat{V}_-$ приведет к моде $\mathbf{h}_{k-l, m-l}^n$, собственное значение оператора $\widehat{V}_{+-}$ на которой определяется суммой арифметической прогрессии:

$$\begin{aligned}\mu_l &= -((k_t + m_t) + (k_t + m_t - 2) + (k_t + m_t - 4) + \dots + (k_t + m_t - 2(l - 1))) = \\ &= (l + 1)(k_t + m_t - l).\end{aligned}\quad (18)$$

Из этого выражения видно, что через $l = L_V = k_t + m_t$ шагов мода

$$\mathbf{h}_{k_t - L_V, m_t - L_V}^n = \mathbf{h}_{-m_t, -k_t}^n \equiv \mathbf{h}_{k_b, m_b}^n$$

будет нижней граничной модой, соответствующей верхней граничной моде $\mathbf{h}_{k_t, m_t}^n$. Для конечности этого процесса должно выполняться условие $k_t + m_t \geq 0$. Для всех $L_V + 1$ мод (при учете верхней граничной моды) на этом пути число $k - m$ остается постоянным.

Изменение числа $k - m$ определяется операторами серии $\widehat{W}$. Применив подобную процедуру с операторами из серии $\widehat{W}$ к правой граничной моде $\mathbf{h}_{k_r, m_r}^n$, получаем цепочку мод длиной $L_W + 1$ ($L_W = k_r - m_r$) с постоянным значением $k + m$ от $\mathbf{h}_{-m_r, -k_r}^n$ до $\mathbf{h}_{k_r, m_r}^n$ с общим числом мод $(L_V + 1)(L_W + 1)$.

При четном $k_t + m_t$ через $l = L_V/2 = (k_t + m_t)/2$ шагов действия оператора $\widehat{V}_-$ сумма $k + m$ оказывается равной нулю, $k = -m = (k_t - m_t)/2$, а собственное значение μ достигает максимального значения

$$\mu_{\max} = \frac{L_V(L_V + 2)}{4} = \frac{L_V}{2} \left(\frac{L_V}{2} + 1 \right). \quad (19)$$

Если, наоборот, число μ известно, например μ_{00} для моды $\mathbf{h}_{0,0}^n$, оно определяет длину цепочки $L_V + 1$ вдоль направления V (по направлению изменения суммы $k + m$ при постоянной разности $k - m$).

Собственное значение $\nu_{00} = (L_W/2)(L_W/2 + 1)$ оператора $\widehat{W}_{+-}$ для моды $\mathbf{h}_{0,0}^n$ определяет длину цепочки $L_W + 1$ вдоль направления W (по направлению изменения разности $k - m$ при постоянной сумме $k + m$). Всего в этой генерации содержится $(L_V + 1)(L_W + 1)$ мод.

Числа L_V и L_W определяют максимальные значения чисел k и m :

$$k_{\max} = \left(\frac{k + m}{2} \right)_{\max} + \left(\frac{k - m}{2} \right)_{\max} = \frac{L_V + L_W}{2} \equiv n. \quad (20)$$

Число n характеризует изучаемую серию мод.

Пару чисел (L_V, L_W) будем называть характеристикой моды.

ТАБЛИЦА 1

$f_{k,m}$	$f_{-2,-2}$	$f_{-1,-1}$	$f_{0,0}$	$f_{1,1}$	$f_{2,2}$
$\widehat{V}_{+-}$	0	4	6	6	4
$\widehat{V}_{-+}$	4	6	6	4	0

ТАБЛИЦА 2

$f_{k,m}$	$f_{-2,-3}$	$f_{-1,-2}$	$f_{0,-1}$	$f_{1,0}$	$f_{2,1}$	$f_{3,2}$
$\widehat{V}_{+-}$	0	5	8	9	8	5
$\widehat{V}_{-+}$	5	8	9	8	5	0

Пример такой четной цепочки содержится в табл. 1, а для нечетной цепочки, содержащей моды с полуцелыми значениями оператора $\widehat{V}_3$, включающей моду $\widehat{V}_3 f_{1,0} =$

$(i/2)f_{1,0}$, – в табл. 2. Максимальное по модулю собственное значение оператора $\widehat{V}_{+-}$ равно l^2 , а число элементов в этой цепочке определяется четным числом $L_V = 2l$.

Соотношения (16)–(20) остаются справедливыми и для операторов $\widehat{W}_{+-}$, $\widehat{W}_{-+}$.

Таким образом, любая серия определяется двумя целыми числами: L_V и соответствующим числом L_W , а общее число элементов в серии равно $(L_V + 1)(L_W + 1)$.

3.5. Отражения. Метрика (1) удобна еще тем, что в ней явным и нетривиальным образом определяется дискретная симметрия сферы (группа Вейля), определяемая преобразованиями

$$\tilde{x} = \sqrt{1 - x^2}, \quad \tilde{u} = w, \quad \tilde{w} = -u. \quad (21)$$

Эти преобразования (будем обозначать их оператором $\widehat{P}$) не меняют метрику (1), но преобразуют поля Киллинга. Преобразуются комбинации, определяющие векторы Киллинга:

$$u + w = \tilde{u} - \tilde{w}, \quad u - w = -(\tilde{u} + \tilde{w}).$$

Компоненты любого вектора A^i преобразуются по формулам

$$\tilde{A}^1 = - \left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} A^1 \right) \Big|_{x \rightarrow \sqrt{1 - x^2}}, \quad \tilde{A}^2 = A^3 \Big|_{x \rightarrow \sqrt{1 - x^2}}, \quad \tilde{A}^3 = -A^2 \Big|_{x \rightarrow \sqrt{1 - x^2}}. \quad (22)$$

Сами векторы Киллинга преобразуются следующим образом:

$$\widehat{V}_3 \rightarrow \widehat{W}_3, \quad \widehat{V}_+ \rightarrow -\widehat{W}_+, \quad \widehat{V}_- \rightarrow -\widehat{W}_-, \quad \widehat{W}_3 \rightarrow -\widehat{V}_3, \quad \widehat{W}_+ \rightarrow \widehat{V}_-, \quad \widehat{W}_- \rightarrow \widehat{V}_+. \quad (23)$$

Эти преобразования не меняют коммутационных соотношений. Самое главное в преобразованиях (21) – перестановка $u + w$ и $u - w$.

Повторное преобразование (21) восстанавливает исходную систему координат, поэтому квадрат оператора $\widehat{P}$ является единичным оператором.

При отражениях векторы Киллинга преобразуются в соответствии с формулами (23), а классифицирующие операторы преобразуются следующим образом:

$$\widehat{P}\widehat{V}_{+-} = \widehat{W}_{+-}, \quad \widehat{P}\widehat{V}_{-+} = \widehat{W}_{-+}, \quad \widehat{P}\widehat{W}_{+-} = \widehat{V}_{-+}, \quad \widehat{P}\widehat{W}_{-+} = \widehat{V}_{+-}. \quad (24)$$

Видно, что оператор $\widehat{P}$ не коммутирует с операторами $\widehat{V}_{-+}$ и $\widehat{W}_{-+}$, поэтому моды, как собственные функции этих операторов, не являются собственными модами оператора $\widehat{P}$. Если некоторая серия мод имеет характеристики (L, S) , то оператор $\widehat{P}$ переводит ее в другую серию мод с характеристикой (S, L) , при этом максимальное значение индекса $k_{\max}$, определяемое формулой (20), не меняется. Поэтому тензорные поля с неравными друг другу L и S обязательно имеют по две серии мод (две поляризации).

4. СКАЛЯРНЫЕ ПОЛЯ НА ТРЕХМЕРНОЙ СФЕРЕ

Скалярные поля достаточно подробно исследованы и без использования рассмотренной техники (см., например, [9]). Их изучение полезно для составления единой картины различных полей на трехмерной сфере и для проверки новых методов уже

известными. Хотя из-за отсутствия какой-либо пространственной структуры скалярного поля соответствующую процедуру можно проводить в любой координатной системе на сфере, для единства описания скалярных, векторных и тензорных полей мы будем работать в той же системе координат с метрикой (1).

На скалярном поле проще всего проследить методику Ли-генерации мод. Как собственные функции операторов $\widehat{V}_3$, $\widehat{W}_3$, моды имеют вид

$$\mathbf{h}_{km} = f(x) e^{i(ku+mw)}. \quad (25)$$

Например, действие на эту моду оператора $\widehat{V}_+$ определяется следующим выражением:

$$\widehat{V}_+ \mathbf{h}_{km} = -\frac{i}{2} \left(\sqrt{1-x^2} f'(x) + \left(m \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - k \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \right) f(x) \right) e^{i((k+1)u+(m+1)w)}.$$

Действие операторов $\widehat{V}_{+-}$, $\widehat{V}_{-+}$, $\widehat{V}_3$ на любую функцию $f(x, u, w)$ связано с действием оператора Лапласа:

$$\widehat{V}_{+-} + \widehat{V}_3^2 - i\widehat{V}_3 = \widehat{V}_{-+} + \widehat{V}_3^2 + i\widehat{V}_3 = \frac{1}{4}\Delta. \quad (26)$$

Аналогичные соотношения можно записать и для операторов серии W .

Этот момент очень важен: обычно ищутся собственные моды того или иного оператора. Из приведенного соотношения видно, что искомые моды являются собственными модами геометрических операторов самого пространства и оказываются собственными модами, например, оператора Лапласа лишь в силу того, что он инвариантен относительно движений сферы.

4.1. Четные моды. Теперь найдем простейшие (базовые) моды. Простейшим является поле, зависящее только от координаты x : $\mathbf{h}_{00} = f(x)$. Действие оператора Лапласа определяет дифференциальное уравнение на функцию $f(x)$:

$$-\Delta f(x) - \lambda f = (x^2 - 1)f'' + \frac{3x^2 - 1}{x} f' - \lambda f = 0. \quad (27)$$

Это линейное дифференциальное уравнение второго порядка имеет четыре регулярные особые точки $0, \pm 1, \infty$, однако заменой переменной $z = x^2$ оно сводится к уравнению класса Фукса с тремя особыми точками. В окрестности нуля его асимптотика

$$f'' + \frac{1}{x} f' = 0$$

приводит к степенному решению $f = x^k$ с соотношением $k^2 = 0$. Поэтому решение может быть представлено полиномом по $z = x^2$ (полиномы Якоби [10]):

$$f_q = 1 + a_1^q x^2 + a_2^q x^4 + \dots + a_q^q x^{2q}.$$

На бесконечности основным является старший член x^{2q} , что определяет константу λ_q :

$$\lambda_q = (2q + 1)^2 - 1 = 4q(q + 1) = n(n + 2), \quad (28)$$

где q – степень полинома по $z = x^2$, а n – степень по x : $n = 2q$.

Подстановка полинома в уравнение (27) приводит к рекуррентному соотношению на коэффициенты

$$a_k = -a_{k-1} \frac{(q-k+1)(q+k)}{k^2},$$

что позволяет построить базовую функцию любого порядка.

Первые три полинома имеют вид

$$f_0 = 1, \quad f_1 = 1 - 2x^2, \quad f_2 = 1 - 6x^2 + 6x^4.$$

Вследствие наличия симметрии отражения эти полиномы являются *палиндромами*: при замене $x^2 \rightleftharpoons 1 - x^2$ четные полиномы не меняются, а нечетные меняют знак.

Действие операторов $\widehat{V}_{-+}$, $\widehat{W}_{-+}$ на эти функции одинаково:

$$\widehat{V}_{-+} f_q = -2q(q+1), \quad \widehat{W}_{-+} f_q = -2q(q+1), \quad (29)$$

что приводит к числу функций $N = (2q+1)^2 = (n+1)^2$ в серии, порожденной из полинома f_q операторами $\widehat{V}_+$, $\widehat{V}_-$, $\widehat{W}_+$, $\widehat{W}_-$.

4.2. Нечетные моды. Нечетные моды порождаются функциями с полупелым собственным значением операторов $\widehat{V}_3$, $\widehat{W}_3$. Простейшей такой функцией является $f(x) e^{iu}$. Уравнение на собственные функции оператора Лапласа приводит к несколько отличному дифференциальному уравнению на функцию $f(x)$:

$$-e^{-iu} \Delta(f(x) e^{iu}) - \lambda f(x) = (x^2 - 1)f'' + \frac{3x^2 - 1}{x} f' + \left(\frac{1}{x^2} - \lambda \right) f = 0. \quad (30)$$

Решениями этого дифференциального уравнения являются полиномы нечетных степеней

$$f_{oq} = x(1 + a_1^q x^2 + a_2^q x^4 + \dots + a_q^q x^{2q}),$$

коэффициенты которых находятся из рекуррентного соотношения

$$a_k^q = -a_{k-1}^q \frac{(q-k+1)(q+k+1)}{k(k+1)}, \quad (31)$$

а собственные значения определяются тем же выражением по степени полинома $n = 2q + 1$, что и для четных функций (28):

$$\lambda_q = (2q+2)^2 - 1 = n(n+2).$$

Первые полиномы имеют вид

$$f_{o1} = x, \quad f_{o2} = x \left(1 - \frac{3}{2} x^2 \right), \quad f_{o3} = x \left(1 - 4x^2 + \frac{10}{3} \right) x^4.$$

В этом случае операторы $\widehat{V}_{+-}$, $\widehat{V}_{-+}$, $\widehat{W}_{+-}$, $\widehat{W}_{-+}$ на функции $\mathbf{h} = f_{oq}(x) e^{iu}$ действуют уже по разному:

$$\begin{aligned} \widehat{V}_{+-}(f_{oq}(x) e^{iu}) &= -(q+1)^2 (f_{oq}(x) e^{iu}), & \widehat{V}_{-+}(f_{oq}(x) e^{iu}) &= (1 - (q+1)^2) (f_{oq}(x) e^{iu}), \\ \widehat{W}_{+-}(f_{oq}(x) e^{iu}) &= -(q+1)^2 (f_{oq}(x) e^{iu}), & \widehat{W}_{-+}(f_{oq}(x) e^{iu}) &= (1 - (q+1)^2) (f_{oq}(x) e^{iu}). \end{aligned}$$

Эти соотношения определяют серии по $4(q+1)^2$ мод.

5. ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ НА ТРЕХМЕРНОЙ СФЕРЕ

Ли-вариация векторного поля A^i по заданному векторному полю χ^i

$$\delta_\chi A^i = \chi^j \partial_j A^i - A^j \partial_j \chi^i \quad (32)$$

определяет действие операторов $\widehat{V}_+$, $\widehat{V}_-$, $\widehat{W}_+$, $\widehat{W}_-$ на векторные поля.

Как и в случае скалярного поля, для того чтобы воспользоваться техникой Ли-генерации для векторных полей, нужно явно построить одно решение, а затем, действуя операторами $\widehat{V}_+$, $\widehat{V}_-$, $\widehat{W}_+$, $\widehat{W}_-$, получить из него все моды данной серии.

5.1. Четные моды. Простейшие векторные моды можно выбрать в следующем виде (отлична от нуля только компонента по одному из полей Киллинга):

$$\mathbf{a} = (0, f_a(x), 0), \quad \mathbf{b} = (0, 0, f_b(x)). \quad (33)$$

Наиболее удобным инвариантным оператором второго порядка в трехмерном пространстве является оператор

$$\text{rot}(\text{rot } \mathbf{A}) = -\lambda \mathbf{A}, \quad (34)$$

при этом $\text{div } \mathbf{A} = 0$.

Подстановка выражений для $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ из (33) в уравнение (34) приводит к дифференциальным уравнениям на функции $f_a(x)$ и $f_b(x)$:

$$\begin{aligned} (x^2 - 1)f_a'' + \frac{5x^2 - 1}{x} f_a' + (4 - \lambda)f_a &= 0, \\ (x^2 - 1)f_b'' + \frac{5x^2 - 3}{x} f_b' + (4 - \lambda)f_b &= 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Точка $x = 0$ для этих уравнений является регулярной особой точкой, и $f = 1$ является решением обоих уравнений при $\lambda = 4$. Бесконечно удаленная точка также является регулярной, поэтому решение можно искать в виде полинома по x^2 степени q (по x четные степени, максимальная x^{2q}), определяющей собственное значение λ : на бесконечности оба уравнения имеют вид

$$x^2 f'' + 5x f' + (4 - \lambda)f = 0,$$

и для старшей степени полинома это приводит к алгебраическому уравнению

$$\lambda = 2q(2q - 1) + 10q + 4 = 4(q + 1)^2. \quad (36)$$

Рекуррентные соотношения для коэффициентов полиномов

$$\begin{aligned} P_a^q &= 1 + a_1^q x^2 + a_2^q x^4 + \dots + a_q^q x^{2q}, \\ P_b^q &= 1 + b_1^q x^2 + b_2^q x^4 + \dots + b_q^q x^{2q} \end{aligned}$$

определяются из дифференциальных уравнений (35):

$$\begin{aligned} a_k^q &= -a_{k-1}^q \frac{(q - k + 1)(q + k + 1)}{k(k + 1)}, \\ b_k^q &= -b_{k-1}^q \frac{(q - k + 1)(q + k + 1)}{k^2}, \end{aligned} \quad (37)$$

ТАБЛИЦА 3

q	P_a^q	P_b^q
0	1	1
1	$1 - 3x^2/2$	$1 - 3x^2$
2	$1 - 4x^2 + 10x^4/3$	$1 - 8x^2 + 10x^4$
3	$1 - 15x^2/2 + 15x^4 - 35x^6/4$	$1 - 15x^2 + 45x^4 - 35x^6$

ТАБЛИЦА 4

	V_{-+}	V_{+-}	W_{-+}	W_{+-}	λ
$\mathbf{h}_+^0$	2	2	0	0	4
$\mathbf{h}_-^0$	0	0	2	2	4
$\mathbf{h}_+^1$	6	6	2	2	16
$\mathbf{h}_-^1$	2	2	6	6	16
$\mathbf{h}_+^2$	12	12	6	6	36
$\mathbf{h}_-^2$	6	6	12	12	36
$\mathbf{h}_+^q$	$(q+1)(q+2)$	$(q+1)(q+2)$	$q(q+1)$	$q(q+1)$	$4(q+1)^2$
$\mathbf{h}_-^q$	$q(q+1)$	$q(q+1)$	$(q+1)(q+2)$	$(q+1)(q+2)$	$4(q+1)^2$

что позволяет генерировать полиномы любого порядка. Первые четыре пары таких полиномов приведены в табл. 3. Полиномы P_a^q и P_b^q связаны соотношением

$$P_b^q = \frac{1}{2x}(x^2 P_a^q)'. \quad (38)$$

5.2. Классифицирующие операторы. Базовые векторы (33) не являются собственными векторами операторов $\widehat{V}_{+-}$, $\widehat{W}_{+-}$. Собственными векторами этих операторов являются векторные поля

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_+^q &= (0, (q+1)P_a^q, P_b^q), \\ \mathbf{h}_-^q &= (0, -(q+1)P_a^q, P_b^q). \end{aligned} \quad (39)$$

Действие на эти поля операторов $\widehat{V}_{+-}$ и $\widehat{W}_{+-}$ представлено в табл. 4, откуда видно, что в q -м секторе каждой моды содержится $(2q+1)(2q+3)$ различных мод, порожденных операторами $\widehat{V}_+$, $\widehat{V}_-$, $\widehat{W}_+$, $\widehat{W}_-$.

Переобозначим $2q = n$ (по высшей степени полинома). Для четных n имеются две поляризации с собственным значением $\lambda_n = (n+2)^2$, и в каждой поляризации содержится $(n+1)(n+3)$ мод, т.е. общее число мод с одинаковым λ_n равно $N_n = 2(n+1)(n+3)$.

5.3. Нечетные моды. Базовая нечетная мода содержит множитель e^{iu} и, следовательно, должна иметь и компоненту a_x :

$$\mathbf{a} = (f_1(x), f_a(x), f_b(x))e^{iu}. \quad (40)$$

Требование $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$ приводит к соотношению

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = if_a + \frac{(xf_1(x))'}{x} = 0,$$

поэтому здесь тоже можно выделить две независимые моды:

$$\mathbf{a} = (if_1(x), f_a(x), 0)e^{iu}, \quad f_a = \frac{(xf_1(x))'}{x}, \quad \mathbf{b} = (0, 0, f_b(x))e^{iu}. \quad (41)$$

Чтобы эти векторы были собственными векторами положительно-определенного оператора $-\operatorname{rot} \operatorname{rot}$, функции $f_1(x)$ и $f_b(x)$ должны удовлетворять соотношениям

$$\begin{aligned} (x^2 - 1) \left(f_1'' + \frac{3}{x} f_1' \right) + (1 - \lambda) f_1 &= 0, \\ (x^2 - 1) f_b'' + \frac{5x^2 - 1}{x} f_b' + \left(\frac{1}{x^2} + 4 - \lambda \right) f_b &= 0. \end{aligned} \quad (42)$$

Подстановками $f_1 = (1 - x^2)f(x)$, $f_b = xf(x)$ оба уравнения сводятся к одному для функции $f(x)$:

$$(x^2 - 1)f'' + \frac{7x^2 - 3}{x} f' + (9 - \lambda)f = 0. \quad (43)$$

Точки $x = 0$ и $x = \infty$ являются регулярными особыми точками этого уравнения, и функция $f(x)$ представляется полиномом

$$P_q(x) = 1 + a_1^q x^2 + \dots + a_k^q x^{2k} + \dots + a_q^q x^{2q}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (43), находим рекуррентные формулы для коэффициентов:

$$a_k^q = -a_{k-1}^q \frac{(q - k + 1)(q + k + 2)}{k(k + 1)}. \quad (44)$$

Первые полиномы имеют вид

$$P_0 = 1, \quad P_1 = 1 - 2x^2, \quad P_2 = 1 - 5x^2 + 5x^4.$$

Собственные значения оператора $-\operatorname{rot} \operatorname{rot} \lambda_q = (2q + 3)^2 = (n + 1)^2$.

5.4. Классифицирующие операторы. Собственными векторами операторов $\widehat{V}_{+-}$, $\widehat{V}_{-+}$, $\widehat{W}_{+-}$, $\widehat{W}_{-+}$ являются

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_+^q &= (0, (q + 1)f_a^q, f_b^q), \\ \mathbf{h}_-^q &= (0, -(q + 1)f_a^q, f_b^q). \end{aligned} \quad (45)$$

Действие на них классифицирующих операторов представлено в табл. 5, откуда видно, что в q -м секторе каждой моды содержится $(2q + 2)(2q + 4) = (n + 1)(n + 3)$ (после переобозначения $2q + 1 = n$) различных мод, порожденных операторами $\widehat{V}_+$, $\widehat{V}_-$, $\widehat{W}_+$, $\widehat{W}_-$. Для нечетных n имеются две поляризации с собственным значением $\lambda_n = (2q + 3)^2 = (n + 2)^2$ и в каждой поляризации содержится $(n + 1)(n + 3)$ мод, т.е. общее число мод с одинаковым λ_n равно $N_n = 2(n + 1)(n + 3)$. Эти выражения совпадают с выражениями для четных мод (см. п. 5.2), т.е. являются универсальными вне зависимости от четности числа n .

ТАБЛИЦА 5

	V_{-+}	V_{+-}	W_{-+}	W_{+-}	λ
$\mathbf{h}_+^0$	0	1	3	4	9
$\mathbf{h}_-^0$	3	4	0	1	9
$\mathbf{h}_+^1$	3	4	8	9	25
$\mathbf{h}_-^1$	8	9	3	4	25
$\mathbf{h}_+^2$	8	9	15	16	49
$\mathbf{h}_-^2$	15	16	8	9	49
$\mathbf{h}_+^q$	$(q+1)^2 - 1$	$(q+1)^2$	$(q+2)^2 - 1$	$(q+2)^2$	$(2q+3)^2$
$\mathbf{h}_-^q$	$(q+2)^2 - 1$	$(q+2)^2$	$(q+1)^2 - 1$	$(q+1)^2$	$(2q+3)^2$

6. ТЕНЗОРНЫЕ ФЛУКТУАЦИИ НА ТРЕХМЕРНОЙ СФЕРЕ

6.1. Флуктуации метрики. Чисто тензорные структуры вариации метрики $\tilde{\gamma}_{ij} = \gamma_{ij} + h_{ij}$ описываются шестикомпонентным симметричным тензором h_{ij} ,

$$\mathbf{h} \equiv \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{12} & h_{22} & h_{23} \\ h_{13} & h_{23} & h_{33} \end{pmatrix}, \quad (46)$$

след и дивергенция которого равны нулю, $\gamma^{ij}h_{ij} = 0$, $\nabla_i(\gamma^{ik}h_{kj}) = 0$.

В описании малых изменений геометрических свойств при вариациях метрики главную роль играет вариация тензора Риччи, также являющегося симметричным тензором, выражающимся через вариации связностей (являющиеся тензорами):

$$\begin{aligned} \delta\Gamma_{jk}^i &= \frac{1}{2}\gamma^{is}(\nabla_j h_{sk} + \nabla_k h_{sj} - \nabla_s h_{jk}), \\ \delta R_{ij} &= \nabla_k \delta\Gamma_{ij}^k - \nabla_j \delta\Gamma_{ik}^k. \end{aligned} \quad (47)$$

С точки зрения математической физики это дифференциальный оператор второго порядка, действующий в пространстве тензоров $\mathbf{h}$. Моды вариаций метрики определяются как собственные векторы этого оператора, причем, привязываясь к вариациям метрики трехмерной сферы радиуса r , мы их определим следующим образом:

$$\delta R_{ij}(\mathbf{h}^n) = \frac{\lambda_n}{2r^2} h_{ij}^n. \quad (48)$$

Выделение явной зависимости вариации метрики от радиуса позволяет нам рассматривать лишь вариации метрики сферы единичного радиуса.

6.2. Ли-преобразования тензорного поля. При бесконечно малом преобразовании координат $\tilde{x}^i = x^i - \varepsilon \xi^i(x)$ происходит Ли-вариация тензорного поля $\mathbf{h}$:

$$\delta_\xi h_{ij} = \xi_{,i}^s h_{sj} + \xi_{,j}^s h_{is} + \xi^s h_{ij,s} \equiv \hat{\xi} h_{ij}. \quad (49)$$

Это также линейный оператор в пространстве тензорных полей $\mathbf{h}$.

Для того чтобы воспользоваться техникой Ли-генерации, в рассматриваемой серии нужно явно построить базовые моды, а затем, действуя операторами $\widehat{V}_+$, $\widehat{V}_-$, $\widehat{W}_+$, $\widehat{W}_-$, из этих базовых мод сгенерировать все моды данной серии.

6.3. Четные моды. Вариации метрики евклидова пространства являются поперечно-поперечными, и выбранная система координат позволяет построить поперечно-поперечные флуктуации на сфере как функции только одной переменной x . Прежде всего, это компонента $h_{23} = f_{23}(x)$. Зададим тензорное поле в виде

$$\mathbf{h}_{e1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_{23}(x) \\ 0 & f_{23}(x) & 0 \end{pmatrix}. \quad (50)$$

Вычисление вариации тензора Риччи $\delta\gamma_{23} = f_{23}(x)$ (47) приводит к появлению в этой вариации только одной компоненты

$$\delta R_{23} = -\frac{1-x^2}{2} \left(f_{23}'' - \frac{1}{x} f_{23}' \right) + 2f_{23}. \quad (51)$$

Уравнение (48) на собственные векторы оператора $\delta\hat{R}$ приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$(x^2 - 1) \left(f_{23}'' - \frac{1}{x} f_{23}' \right) + 4f_{23} = \lambda f_{23}. \quad (52)$$

Скалярное произведение компонент h_{23} и $\tilde{h}_{23}$, зависящих только от координаты x , образуется с помощью метрического тензора:

$$(h_{23}, \tilde{h}_{23}) = 2 \int \gamma^{22} \gamma^{33} h_{23} \tilde{h}_{23} \sqrt{\gamma} dx = \int_0^1 \frac{f_{23}(x) \tilde{f}_{23}(x)}{x^2(1-x^2)} 2x dx. \quad (53)$$

Несингулярность нормы (h_{23}^2) , а также требование, чтобы мода являлась собственным вектором оператора $\hat{P}$, означают, что решение должно представляться в виде $f_{23} = x^2(1-x^2)f(x^2)$. Для функции $f(z) = f(x^2)$ дифференциальное уравнение примет вид

$$z(z-1)f'' + 2(2z-1)f' = \frac{\lambda-12}{4} f. \quad (54)$$

Бесконечно удаленная точка для этого уравнения (уравнения Якоби) является регулярной, так как в ее окрестности уравнение (54) принимает вид

$$z^2 f'' + 4z f' = \mu f, \quad \mu = \frac{\lambda-12}{4},$$

допускающий степенное решение $f \sim z^q$ с целым q , откуда находятся собственные значения λ :

$$\mu = q(q+3), \quad \lambda = 4\mu + 12 = 4q^2 + 12q + 12. \quad (55)$$

При заданном q уравнение (54) полностью определено:

$$z(z-1)P_q'' + 2(2z-1)P_q' = q(q+3)P_q. \quad (56)$$

Его решение будем искать в виде полинома Якоби

$$P_q = 1 + a_1^q z + a_2^q z^2 + \dots + a_k^q z^k + \dots + a_q^q z^q.$$

Нулевой коэффициент выберем равным единице, $a_0^q = 1$. Остальные коэффициенты определяются из рекуррентного соотношения

$$a_{k+1}^q = -a_k^q \frac{(q-k)(q+k+2)}{(k+1)(k+2)}. \quad (57)$$

Первые полиномы (после подстановки $z = x^2$) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} P_0 &= 1, & \lambda &= 12, \\ P_1 &= 1 - 2x^2, & \lambda &= 28, \\ P_2 &= 1 - 5x^2 + 5x^4, & \lambda &= 52, \\ P_3 &= 1 - 9x^2 + 21x^4 - 14x^6, & \lambda &= 84. \end{aligned} \quad (58)$$

Эти полиномы также являются *палиндромами*, т.е. отображают действие оператора $\hat{P}$, которое для полиномов P_q выражается в замене $x^2 \rightarrow 1 - x^2$: полиномы с четным q при такой замене не меняются, а с нечетным q — меняют знак.

Скалярное произведение (53) компонент h_{23} и $\tilde{h}_{23}$ образуется с помощью метрического тензора:

$$(h_{23}, \tilde{h}_{23}) = \int_0^1 (1-z) P_q(z) P_{q'}(z) dz. \quad (59)$$

С этим весом полиномы друг другу ортогональны.

Вторая поперечно-поперечная четная мода $\mathbf{h}_{e2}$ связана с компонентами метрики h_{22} и h_{33} и диагональна. Требование равенства нулю следа приводит к выражению, содержащему две функции, зависящие только от x :

$$h_{11} = \gamma_{11} f_1(x), \quad h_{22} = \gamma_{22} f_2(x), \quad h_{33} = -\gamma_{33} (f_1(x) + f_2(x)).$$

Равенство нулю дивергенции тензора приводит к связи этих функций:

$$f_2(x) = (x(1-x^2)f_1(x))'.$$

После выражения f_2 через f_1 уравнение на собственные значения (48) приводит к уравнению на функцию $f_1(x^2) = f(z)$, в точности совпадающему с уравнением (54). Таким образом, и эти решения порождаются теми же полиномами Якоби с теми же собственными значениями.

6.4. Классифицирующие операторы. Построенные решения $\mathbf{h}_{e1}^q$, $\mathbf{h}_{e2}^q$ являются собственными векторами оператора $\hat{P}$ с собственными значениями ± 1 , а потому не являются собственными векторами операторов $\hat{V}_{+-}$ и $\hat{W}_{+-}$:

$$\mathbf{h}_{e+}^q = \mathbf{h}_{e2}^q + (2q+3)\mathbf{h}_{e1}^q, \quad \mathbf{h}_{e-}^q = \mathbf{h}_{e2}^q - (2q+3)\mathbf{h}_{e1}^q. \quad (60)$$

Оператор $\hat{P}$ меняет местами эти моды. При этом новые моды являются собственными векторами операторов $\hat{V}_{+-}$ и $\hat{W}_{+-}$:

$$\hat{V}_{+-}\mathbf{h}_{e+}^q = -q(q+1)\mathbf{h}_{e1}^q, \quad \hat{W}_{+-}\mathbf{h}_{e-}^q = -(q+2)(q+3)\mathbf{h}_{e1}^q. \quad (61)$$

Следовательно, характеристика этой серии $(L_V, L_W) = 2(q, q + 2)$, а максимальное значение, принимаемое индексами (k, m) , составляет $n = 2q + 2$.

Так как оператор $\widehat{P}$ меняет местами операторы $\widehat{V}$ и $\widehat{W}$, то для второй серии

$$\widehat{W}_{+-}\mathbf{h}_{e2}^q = -q(q+1)\mathbf{h}_{e2}^q, \quad \widehat{V}_{+-}\mathbf{h}_{e2}^q = -(q+2)(q+3)\mathbf{h}_{e2}^q. \quad (62)$$

Характеристика этой серии $(L_V, L_W) = 2(q+2, q)$, а максимальная степень такая же: $n = 2q + 2$.

В каждой серии содержится $N_n = (L_V + 1)(L_W + 1) = (n-1)(n+3)$ различных мод (n четное). Все они являются собственными векторами оператора $\delta\widehat{K}$ на сфере (48) с собственным значением (55), выраженным через $n = 2q + 2$:

$$\lambda_n = n^2 + 2n + 4. \quad (63)$$

6.5. Нечетные моды. Простейшую нечетную моду можно выбрать в виде

$$\mathbf{h}_o = \begin{pmatrix} \gamma_{11}f_1(x) & if(x) & 0 \\ if(x) & \gamma_{22}f_2(x) & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_{33}(f_1(x) + f_2(x)) \end{pmatrix} e^{iu}$$

с нулевым следом. Требование равенства нулю дивергенции позволяет выразить функции f и f_2 через $f_1(x)$:

$$f = -xf_1(x), \quad f_2 = 2(1-2x^2)f_1(x) + x(1-x^2)f_1'(x).$$

Все компоненты метрики определяются через функцию $f_1(x) = f_q$, удовлетворяющую уравнению

$$f_q'' + \frac{7x^2 - 3}{x(x^2 - 1)} f_q' + \frac{3 - (7 + 16q + 4q^2)x^2}{x^2(x^2 - 1)} f_q = 0,$$

определяющему, что эта функция есть полином

$$f_q = x(1 - a_1^q x^2 + a_2^q x^4 - \dots + (-1)^k a_k^q x^{2k} + \dots + (-1)^q a_q^q x^{2q}),$$

коэффициенты которого связаны соотношением

$$a_k^q = a_{k-1}^q \frac{(q-k+1)(q+k+3)}{k(k+2)}.$$

Первые полиномы имеют вид

$$\begin{aligned} f_0 &= x, & f_1 &= x \left(1 - \frac{5}{3} x^2 \right), & f_2 &= x \left(1 - 4x^2 + \frac{7}{2} x^4 \right), \\ f_3 &= x \left(1 - 7x^2 + 14x^4 - \frac{42}{5} x^6 \right). \end{aligned}$$

Вторую нечетную моду можно получить, действуя на найденную оператором $\widehat{V}_{+-}$ и не выражая ее в явном виде. Можно построить собственные функции операторов

ТАБЛИЦА 6

	$\widehat{V}_{+-}$	$\widehat{V}_{-+}$	$\widehat{W}_{+-}$	$\widehat{W}_{-+}$
$\mathbf{h}_{o+}$	$(q+1)^2 - 1$	$(q+1)^2$	$(q+3)^2 - 1$	$(q+3)^2$
$\mathbf{h}_{o-}$	$(q+3)^2 - 1$	$(q+3)^2$	$(q+1)^2$	$(q+1)^2 - 1$

$\widehat{V}_{+-}$, $\widehat{W}_{+-}$ следующим образом: сначала находим моду $\mathbf{h}_1 = \widehat{V}_{+-}\mathbf{h}_o$, а затем строим их линейные комбинации

$$\mathbf{h}_{o+} = \mathbf{h}_1 + (q+3)^2\mathbf{h}_o, \quad \mathbf{h}_{o-} = -(\mathbf{h}_1 + (q+1)^2\mathbf{h}_o). \quad (64)$$

Они являются собственными функциями классифицирующих операторов с собственными значениями, представленными в табл. 6. Характеристика определяется числом q : $(L, S) = (2q+1, 2q+5)$, а максимальная степень

$$n = \frac{L+S}{2} = 2q+3, \quad q = \frac{n-3}{2}.$$

Выражение для собственных значений нечетных мод в точности совпадает с выражением для четных мод (63). Поскольку имеются две поляризации, каждая нечетная серия содержит $2(n-1)(n+3)$ мод с одним и тем же λ_n .

6.6. Явный вид мод. Итак, собственные моды оператора Риччи

$$\widehat{R}h_{ij}^n \equiv \delta R_{ij} = \frac{1}{2r^2} \lambda_n h_{ij}^n \quad (65)$$

собираются в группы, характеризуемые целым числом $n = 2, 3, \dots$. Каждая мода в группе имеет собственное значение (63). При каждом n имеются две серии (соответствующие двум поляризациям) по $(n-1)(n+3)$ базисных тензоров в каждой. Они сопряжены друг с другом оператором отражения $\widehat{P}$. В одной из поляризаций сумма индексов $k+m$ изменяется от $-(n+2)$ до $+(n+2)$ с шагом 2, определяя $n+3$ различных комбинаций при заданной разности $k-m$, независимо принимающей значения от $-(n-2)$ до $+(n-2)$ также с шагом 2, определяя $n-1$ различных значений при заданной сумме $k+m$, так что общее число функций при заданном n равно $(n-1)(n+3)$.

Для другой поляризации ситуация такая же, но с заменой m на $-m$. Таким образом, всего имеются $2(n-1)(n+3)$ мод при заданном n .

Максимальные значения, которые могут принимать оба индекса, совпадают; например, для k оно составляет

$$k_{\max} = \frac{1}{2}((k+m)_{\max} + (k-m)_{\max}) = \frac{1}{2}((n+2) + (n-2)) = n.$$

Аналогично минимальное значение любого из индексов равно $-n$.

Например, возможные комбинации пар индексов k и m при $n=3$ для второй поляризации представлены в табл. 7, а для четного $n=4$ (первая мода) – в табл. 8. Для низших мод $n=2$, и в первой поляризации имеются всего пять мод ($k-m=0$): $(k, m) = (2, 2), (1, 1), (0, 0), (-1, -1), (-2, -2)$. Для второй поляризации ($k+m=0$): $(k, m) = (2, -2), (1, -1), (0, 0), (-1, 1), (-2, 2)$.

ТАБЛИЦА 7

$k - m$	k	m	k	m
5	2	-3	3	-2
3	1	-2	2	-1
1	0	-1	1	0
-1	-1	0	0	1
-3	-2	1	-1	2
-5	-3	2	-2	3
$k + m$	-1		1	

ТАБЛИЦА 8

$k + m$	k	m	k	m	k	m
6	2	4	3	3	4	2
4	1	3	2	2	3	1
2	0	2	1	1	2	0
0	-1	1	0	0	1	-1
-2	-2	0	-1	-1	0	-2
-4	-3	-1	-2	-2	-1	-3
-6	-4	-2	-3	-3	-2	-4
$k - m$	-2		0		2	

6.7. Явный вид мод. Приведем явный вид первых четных мод ($n = 2$):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{h}_{00}^{2\pm} &= \begin{pmatrix} 1-x^2 & 0 & 0 \\ 0 & x^2(1-3x^2) & \pm 3x^2(1-x^2) \\ 0 & \pm 3x^2(1-x^2) & (1-x^2)(-2+3x^2) \end{pmatrix}, \\
 \mathbf{h}_{1,-1}^{2-} &= e^{i(u-w)} \begin{pmatrix} 0 & \frac{ix^2}{\sqrt{1-x^2}} & -i\sqrt{1-x^2} \\ \frac{ix^2}{\sqrt{1-x^2}} & 2x^3\sqrt{1-x^2} & -x\sqrt{1-x^2}(1-2x^2) \\ -i\sqrt{1-x^2} & -x\sqrt{1-x^2}(1-2x^2) & -2x(1-x^2)^{3/2} \end{pmatrix}, \\
 \mathbf{h}_{2,-2}^{2-} &= e^{2i(u-w)} \begin{pmatrix} \frac{1}{1-x^2} & ix & ix \\ ix & -x^2(1-x^2) & -x^2(1-x^2) \\ ix & -x^2(1-x^2) & -x^2(1-x^2) \end{pmatrix}, \\
 \mathbf{h}_{1,-1}^{2+} &= e^{i(u+w)} \begin{pmatrix} 0 & \frac{ix^2}{\sqrt{1-x^2}} & -i\sqrt{1-x^2} \\ \frac{ix^2}{\sqrt{1-x^2}} & 2x^3\sqrt{1-x^2} & -x\sqrt{1-x^2}(1-2x^2) \\ -i\sqrt{1-x^2} & -x\sqrt{1-x^2}(1-2x^2) & -2x(1-x^2)^{3/2} \end{pmatrix}, \\
 \mathbf{h}_{2,-2}^{2+} &= e^{2i(u+w)} \begin{pmatrix} \frac{1}{1-x^2} & ix & ix \\ ix & -x^2(1-x^2) & -x^2(1-x^2) \\ ix & -x^2(1-x^2) & -x^2(1-x^2) \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{66}$$

Явный вид первых нечетных мод ($n = 3$) следующий:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{h}_{1,0}^{3,\pm} &= e^{iu} \begin{pmatrix} \frac{x}{1-x^2} & -ix^2 & \pm(1-x^2) \\ -ix^2 & x^2(3-5x^2) & -x(1-x^2)(1-5x^2) \\ \pm(1-x^2) & -x(1-x^2)(1-5x^2) & -x(1-x^2)(4-5x^2) \end{pmatrix}, \\
 \mathbf{h}_{0,-1}^{3,+} &= -i\widehat{V}^-\mathbf{h}_{1,0}^{3,+} = \\
 &= e^{-iw} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \frac{ix^3}{\sqrt{1-x^2}} & -ix\sqrt{1-x^2} \\ \frac{ix^3}{\sqrt{1-x^2}} & \frac{x^2(1-x^2)(1-5x^2)}{\sqrt{1-x^2}} & \frac{x^2(1-x^2)(4-5x^2)}{\sqrt{1-x^2}} \\ -ix\sqrt{1-x^2} & \frac{x^2(1-x^2)(4-5x^2)}{\sqrt{1-x^2}} & -(1-x^2)^{3/2}(2-5x^2) \end{pmatrix}, \\
 \mathbf{h}_{2,1}^{3,-} &= \frac{1}{2i}\widehat{V}^+\mathbf{h}_{1,0}^{3,-} = \\
 &= e^{i(2u+w)} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \frac{ix(1-3x^2)}{\sqrt{1-x^2}} & -3ix\sqrt{1-x^2} \\ \frac{ix(1-3x^2)}{\sqrt{1-x^2}} & -\frac{x^2(1-x^2)(1-5x^2)}{\sqrt{1-x^2}} & x^2\sqrt{1-x^2}(3-5x^2) \\ -3ix\sqrt{1-x^2} & x^2\sqrt{1-x^2}(3-5x^2) & -5x^2(1-x^2)^{3/2} \end{pmatrix}, \quad (67) \\
 \mathbf{h}_{3,2}^{3,-} &= \frac{1}{5}\widehat{V}^+\mathbf{h}_{2,1}^{3,-} = e^{i(3u+2w)} \begin{pmatrix} -\frac{x}{1-x^2} & -ix^2 & ix^2 \\ -ix^2 & x^3(1-x^2) & -x^3(1-x^2) \\ ix^2 & -x^3(1-x^2) & x^3(1-x^2) \end{pmatrix}, \\
 \mathbf{h}_{0,1}^{3,-} &= \frac{1}{5}\widehat{V}^-\mathbf{h}_{1,0}^{3,-} = \\
 &= e^{iw} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \frac{ix^3}{\sqrt{1-x^2}} & ix\sqrt{1-x^2} \\ \frac{ix^3}{\sqrt{1-x^2}} & \frac{x^2(1-x^2)(1-5x^2)}{\sqrt{1-x^2}} & -x^2\sqrt{1-x^2}(4-5x^2) \\ ix\sqrt{1-x^2} & -x^2\sqrt{1-x^2}(4-5x^2) & -(1-x^2)^{3/2}(2-5x^2) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Это граничные моды: $\widehat{V}^+\mathbf{h}_{1,0}^{3,+} = (0)$, $\widehat{V}^-\mathbf{h}_{0,-1}^{3,+} = (0)$, $\widehat{V}^+\mathbf{h}_{3,2}^{3,+} = (0)$, $\widehat{V}^-\mathbf{h}_{0,1}^{3,-} = (0)$, соответственно.

7. СПИНОРНЫЕ ПОЛЯ НА ТРЕХМЕРНОЙ СФЕРЕ

7.1. Ли-вариации спинорных полей. Обозначим Ли-вариации скалярного поля по полям Киллинга как

$$\hat{v}_+ = V_+^i \partial_i, \quad \hat{v}_- = V_-^i \partial_i, \quad \hat{v}_3 = V_3^i \partial_i.$$

Рассмотрим многокомпонентное поле $y_\alpha(x, u, w)$, $\alpha = 1, 2, \dots, m$. Представим Ли-вариации этих полей с помощью Ли-операторов скалярных полей, но добавим еще постоянные матрицы A_α^β , перемешивающие компоненты:

$$\widehat{V}_+ y_\alpha = \hat{v}_+ y_\alpha + A_\alpha^\beta y_\beta, \quad \widehat{W}_+ y_\alpha = \hat{w}_+ y_\alpha + B_\alpha^\beta y_\beta. \quad (68)$$

Чтобы сохранялась коммутационная структура операторов группы O_4 , матрицы должны коммутировать, как и Ли-операторы:

$$[\mathbf{A}_+, \mathbf{A}_-] = 2i\mathbf{A}_3. \quad (69)$$

В случае двухкомпонентного поля одна серия этих матриц (например, $\mathbf{B}$) должна быть нулевой, и нетривиальным оказывается выражение для второй серии матриц через матрицы Паули $A = \sigma/2$.

Таким образом, $\widehat{W}_i = \widehat{w}_i$, а операторы $\widehat{V}_i = \widehat{v}_i + \sigma_i/2$ представляют Ли-вариации двухкомпонентного (спинорного) поля.

Переходя опять к операторам

$$\widehat{V}_+ = \widehat{v}_+ + \mathbf{A}_+, \quad \widehat{V}_- = \widehat{v}_- + \mathbf{A}_-,$$

где введены матрицы

$$\mathbf{A}_+ = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

получаем полный инструментарий для использования метода Ли-генерации спинорных мод.

7.2. Базовые моды. Все моды должны быть собственными модами операторов $\widehat{V}_3$ и $\widehat{W}_3$. Представив спинор в виде

$$s = (f_1(x) e^{i(k_1 u + m_1 w)}, f_2(x) e^{i(k_2 u + m_2 w)}), \quad (70)$$

подействуем на него операторами $\widehat{V}_3$ и $\widehat{W}_3$ и подберем коэффициенты k_1, m_1, k_2, m_2 так, чтобы $\widehat{V}_3 s = iks$ и $\widehat{W}_3 s = ims$. Тогда эти коэффициенты связываются с собственными значениями k и m :

$$m = \frac{k_1 - m_1}{2} = \frac{k_2 - m_2}{2}, \quad k = \frac{k_1 + m_1 + 1}{2} = \frac{k_2 + m_2 - 1}{2},$$

откуда, наоборот, можно выразить коэффициенты через эти собственные значения:

$$k_1 = k + m - \frac{1}{2}, \quad m_1 = k - m - \frac{1}{2}, \quad k_2 = k + m + \frac{1}{2}, \quad m_2 = k - m + \frac{1}{2}.$$

Следует отметить важную особенность. Поскольку $k + m$ – всегда полуцелое число, простейшими базовыми модами являются моды с $k = 0, m = 1/2$ и $k = 1/2, m = 0$. Назовем моды с $k = 0$ и генерируемые ими серии модами типа s_a , а серии, генерируемые модой с $m = 0$, – модами типа s_b .

Базовый спинор типа s_a имеет вид $s_a = (f_1(x)e^{-iw}, f_2(x)e^{iu})$. Оператор $\widehat{W}_{-+}$, не содержащий матриц, не перепутывает компоненты, и уравнение на собственные векторы

$$\widehat{W}_{-+} s + \lambda s = 0 \quad (71)$$

приводит к двум независимым дифференциальным уравнениям на функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$.

Найдем сначала спинор, являющийся собственным вектором оператора $\widehat{W}_{-+}$ с нулевым собственным значением. Получим дифференциальные уравнения на функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$:

$$\begin{aligned} (x^2 - 1)f_1'' + \frac{3x^2 - 1}{x} f_1' - \frac{3x^2 - 2}{x^2 - 1} f_1 &= 0, \\ (x^2 - 1)f_2'' + \frac{3x^2 - 1}{x} f_2' - \frac{3x^2 - 1}{x^2} f_2 &= 0. \end{aligned}$$

Регулярные при $x = 0$ и $x = \pm 1$ решения этих уравнений имеют вид $f_1 = \sqrt{1-x^2}$, $f_2 = x$. Представив теперь спинор в виде

$$s_a = (\sqrt{1-x^2} f_1(x) e^{-iw}, x f_2(x) e^{iu}), \quad (72)$$

найдем функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ из уравнения на собственные значения (71), приводящего к дифференциальным уравнениям на эти функции:

$$\begin{aligned} (x^2 - 1)f_1'' + \frac{5x^2 - 1}{x} f_1' - \lambda f_1 &= 0, \\ (x^2 - 1)f_2'' + \frac{5x^2 - 3}{x} f_2' - \lambda f_2 &= 0. \end{aligned}$$

Решения этих уравнений, регулярные при $x = 0$ и $x = \pm 1$, представимы в виде четных по x полиномов

$$f_{1,2} \equiv P a^q = 1 + a_1^q x^2 + \dots + a_k^q x^{2k} + a_q^q x^{2q},$$

при этом коэффициенты a_k для функции f_1 находятся из рекуррентного соотношения

$$a_k^q = -a_{k-1} \frac{(q-k+1)(q+k+1)}{k^2}.$$

Первые полиномы суть

$$\begin{aligned} P_0 &= 1, \\ P_2 &= 1 - 3x^2, \\ P_3 &= 1 - 8x^2 + 10x^4, \\ P_4 &= 1 - 15x^2 + 45x^4 - 35x^6. \end{aligned}$$

Для функции f_2 рекуррентное соотношение несколько отличается:

$$a_k^q = -a_{k-1} \frac{(q-k+1)(q+k+1)}{k(k+1)},$$

а первые полиномы имеют вид

$$\begin{aligned} Q_0 &= 1, \\ Q_2 &= 1 - \frac{3}{2} x^2, \\ Q_3 &= 1 - 4x^2 + \frac{10}{3} x^4, \\ Q_4 &= 1 - \frac{15}{2} x^2 + 15x^4 - \frac{35}{4} x^6. \end{aligned}$$

Собственные значения оператора $\widehat{W}_{-+}$ для обеих серий одинаковы при одинаковом q : $\lambda_q = q(q+2)$. Они определяют длину порождаемых ими цепочек при действии операторами $\widehat{W}_+$, $\widehat{W}_-$, она равна $L_q = 2(q+1)$. Однако в общем случае спинор

$$s = s_a = (\sqrt{1-x^2} P a_q(x) e^{-iw}, a x Q a_q(x) e^{iu})$$

с произвольным множителем a во второй компоненте не является собственным вектором оператора $\widehat{V}_{+-}$. Действие

$$\widehat{V}_{+-}s + \mu s = 0$$

приводит к системе алгебраических уравнений

$$(q+1)^2 + a = \mu_1, \quad (q+1)^2 + (q+1)^2 a = \mu a,$$

из которых определяются множитель $a = \pm(q+1)$ и, соответственно, значения $\mu_+ = (q+1)(q+2)$, $\mu_- = q(q+1)$; оператор $\widehat{V}$ при этом порождает соответствующие цепочки вдоль направления V с длинами $2q+3$ и $2q+1$.

Теперь рассмотрим базовый спинор типа s_b , имеющий вид

$$s_b = (f_1(x), f_2(x)e^{i(u+w)}). \quad (73)$$

Как и для спинора типа s_a , найдем нулевой собственный вектор оператора $\widehat{W}_{-+}$:

$$s_{b0} = \left(a, \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} e^{i(u+w)} \right),$$

а затем представим базовый спинор:

$$s_b = \left(af_1(x), f_2(x) \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} e^{i(u+w)} \right). \quad (74)$$

Для того чтобы он был собственным вектором оператора $\widehat{W}_{-+}$ с собственным значением $-\lambda$, функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ должны удовлетворять дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} (x^2 - 1)f_1'' + \frac{3x^2 - 1}{x} f_1' - 4\lambda f_1 &= 0, \\ (x^2 - 1)\left(f_2'' + \frac{3}{x} f_2'\right) - 4\lambda f_2 &= 0. \end{aligned}$$

Решения этих уравнений – это также полиномы степени q

$$f_{1,2} = Pb_q = 1 + a_1^q x^2 + \dots + a_k^q x^{2k} + \dots + a_q^q x^{2q},$$

при этом коэффициенты a_k для функции f_1 находятся из рекуррентного соотношения

$$a_k^q = -a_{k-1} \frac{(q-k+1)(q+k)}{k^2},$$

а для функции f_2

$$a_k^q = -a_{k-1} \frac{(q-k+1)(q+k)}{k(k+1)}.$$

Собственные значения ν оператора $\widehat{W}_{-+}$ также определяются только степенями полинома: $\nu_q = q(q+1)$, и в этом направлении порождается цепочка длиной $2q+1$.

Чтобы спинор (74) был собственным вектором оператора $\widehat{V}_{+-}$ с собственным значением $-\mu$, константа a должна быть равна либо $1/n$ (в этом случае $\mu = (q+1)^2$), либо $-1/(q+1)$ (в этом случае $\mu = q^2$).

Таким образом, и в серии s_b имеются две поляризации по $(2q+1)(2q+2)$ мод в каждой.

7.3. Оператор Паули. Квадратичный оператор $\widehat{V}^2 = \widehat{V}_+ \widehat{V}_- + V_3^2$ коммутирует с любым оператором $\widehat{V}_i, \widehat{W}_i$, так как $\widehat{V}_i = \widehat{v}_i + \mathbf{A}_i$, где $\mathbf{A}_i$ – постоянные матрицы. При этом $\mathbf{A}_i^2 \sim 1$, поэтому оператор

$$\hat{p} = \frac{1}{i}(A_p \widehat{v}_- + A_m \widehat{v}_+ + 2A_3 \widehat{v}_3) \quad (75)$$

также оказывается инвариантным. Он является линейной комбинацией операторов дифференцирования по координатам, выражающейся через матрицы

$$\begin{aligned} \mathbf{b}^x &= \begin{pmatrix} 0 & ie^{-i(u+w)} \\ -ie^{i(u+w)} & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{b}^u &= \begin{pmatrix} x & \sqrt{1-x^2} e^{-i(u+w)} \\ \sqrt{1-x^2} e^{i(u+w)} & -x \end{pmatrix}, \\ \mathbf{b}^w &= \begin{pmatrix} \sqrt{1-x^2} & -xe^{-i(u+w)} \\ -xe^{i(u+w)} & -\sqrt{1-x^2} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (76)$$

удовлетворяющие соотношениям для матриц Паули

$$\mathbf{b}^u \cdot \mathbf{b}^w = i\mathbf{b}^x, \quad \mathbf{b}^w \cdot \mathbf{b}^x = i\mathbf{b}^u, \quad \mathbf{b}^x \cdot \mathbf{b}^u = i\mathbf{b}^w. \quad (77)$$

Квадрат каждой такой матрицы представляет собой единичную матрицу. Через эти матрицы оператор Паули (75) выражается следующим образом:

$$\hat{p} = \frac{1}{i} \left(\sqrt{1-x^2} \mathbf{b}^x \partial_x + \frac{1}{x} \mathbf{b}^u \partial_u + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathbf{b}^w \partial_w \right). \quad (78)$$

Поскольку собственные значения оператора Лапласа на трехмерной сфере $\lambda_n = 1 - (n+1)^2$, определяющиеся целым числом n , не являются квадратом целого числа, на сфере не может быть оператора, квадрат которого равен оператору Лапласа. Однако оператор Паули все-таки приводит к оператору Лапласа через соотношение

$$\hat{p}^2 + 2\hat{p} = -\Delta, \quad (\hat{p} + 1)^2 = 1 - \Delta. \quad (79)$$

Вследствие этого оператор $\hat{p}$ коммутирует со скалярным оператором Лапласа. Собственные значения оператора $\hat{p} + 1$ равны $\pm(n+1)$.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренные поля различаются величиной спина s , принимающей целые или полуцелые значения. Моды полей характеризуются целым числом n (а также числами k и m , определяющими зависимость от углов u и w), и, за исключением скалярного поля, каждому n соответствует серия мод, содержащая две поляризации, состоящие из $N = n(n+2s)$ компонент каждая. Преобразование отражения переводит моды одной поляризации в моды второй. Серии скалярного поля при отражениях переходят в себя. Размеры поляризаций и серий приведены в табл. 9. Длины цепочек в направлениях V и W определяются порядком моды n и определяют собственные значения различных классифицирующих и инвариантных операторов.

Таблица 9

Поле	s	N в поляризации	N в серии
Скалярное	0	n^2	n^2
Спинорное	1/2	$n(n + 1)$	$2n(n + 1)$
Векторное	1	$n(n + 2)$	$2n(n + 2)$
Тензорное	2	$n(n + 4)$	$2n(n + 4)$

Таким образом, метод Ли-генерации мод позволяет четко классифицировать возможные конфигурации мод полей различной тензорной размерности, а также получать их конкретную угловую зависимость. В частности, моды деформации метрики, полученные изложенной техникой, могут послужить основой для интерпретации феномена “ось зла”.

Список литературы

[1] B. Reiman, *Nachr. K. Ges. Wiss. Göttingen*, **13** (1868), 133; Перевод: Б. Риман, “О гипотезах, лежащих в основании геометрии”, *Альберт Эйнштейн и теория гравитации*, ред. Е. Куранский, Р. Зацепина, Г. Сорокина, Мир, М., 1979, 18.

[2] A. Friedman, *Z. Phys.*, **10** (1922), 377; Перевод: А. Фридман, “О кривизне пространства”, *Альберт Эйнштейн и теория гравитации*, ред. Е. Куранский, Р. Зацепина, Г. Сорокина, Мир, М., 1979, 320.

[3] K. Land, J. Magueijo, *Phys. Rev. Lett.*, **95** (2005), 071301; *The axis of evil*, [astro-ph/0502237](#).

[4] B. Mashhoon, *Phys. Rev. D*, **8** (1973), 4297.

[5] Е. М. Лифшиц, *ЖЭТФ*, **16** (1946), 587.

[6] H. Kodama, “Behavior of cosmological perturbations in the brane-world mode”, *Cosmology and Particle Physics: CAPP 2000* (Verbier, Switzerland 17–28 July, 2000), AIP Conference Proceedings, **555**, eds. R. Durrer, J. Garcia-Bellido, M. Shaposhnikov, American Institute of Physics, Melville, NY, 2001, 539; [hep-th/0012132](#).

[7] V. F. Mukhanov, L. R. W. Abramo, R. H. Branderberger, *Phys. Rev. Lett.*, **78** (1997), 1624.

[8] Д. Е. Бурланков, *Динамика пространства*, Изд-во ННГУ, Нижний Новгород, 2005.

[9] V. Fok, *Z. Phys.*, **98** (1935), 145; В. А. Фок, “Атом водорода и неевклидова геометрия”, *Избранные труды*, СПбГУ, С.-Пб., 2003, 159.

[10] Н. Я. Виленкин, *Специальные функции и теория представления групп*, Наука, М., 1965.

Поступила в редакцию 13.01.2006,
после доработки 18.04.2006